Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Renata Karwowska

Polar spaces i struktury podprzestrzeni regularnych w przestrzeniach Fanowskich

Praca magisterska napisana
pod kierunkiem
dr hab. K. Prażmowskiego, prof UwB

Białystok 2010

Składam serdeczne podziękowania
Panu dr Mariuszowi Żynelowi
za okazaną pomoc podczas pisania pracy
oraz Panu prof. Krzysztofowi Prażmowskiemu
za cenne uwagi.

Renata Karwowska

Spis treści

Wstęp

Matematyka zawiera nie tylko prawdę, ale i dostateczne piękno — chłodne i surowe, podobne do piękna rzeźby; nie odwołuje się do żadnej słabości naszej natury... majestatycznie czysta, o nieskazitelnej doskonałości, na jaką może się zdobyć tylko sztuka sięgająca najwyższych szczytów.

Bertrand Russell

Studiując literaturę tematyczną zauważyłam, że wielu matematyków, zajmujących się geometrią, omija temat przestrzeni Fanowskich, czyli nad ciałami charakterystyki 2. Jest to szczególny przypadek, często niewygodny, ale zachodzi w nim wiele ciekawych własności. W swojej pracy postawiłam sobie za główny cel przebadanie własności pseudobiegunowości i związanych z nią struktur podprzestrzeni regularnych w przestrzeniach rzutowo-metrycznych. Pierwsza ciekawostka związana z pseudobiegunowością polega na tym, że samosprzężone względem niej punkty tworzą hiperpłaszczyznę. Usuwając ją automatycznie dostajemy zatem przestrzeń afiniczną $\mathfrak{A}$. Geometria na tej hiperpłaszczyźnie natomiast jest symplektyczna. Sporą trudność przysporzyły mi Grassmanniany regularnych podprzestrzeni o wysokich wymiarach.

W **rozdziale pierwszym** zajęłam się wprowadzeniem podstawowych definicji niezbędnych w pracy oraz omówieniem własności przestrzeni rzutowych i afinicznych. Przedstawiłam również formę półtoraliniową, która wyznacza pseudobiegunowość. Podaję tutaj również definicję i konstrukcję modelu przestrzeni biegunowej, czyli polar space.

W **rozdziale drugim** charakteryzuję podprzestrzenie regularne względem pseudobiegunowości w analitycznej przestrzeni rzutowo-metrycznej. Dokładniej mówiąc w twierdzeniu 2.5 charakteryzuję, kiedy podprzestrzenie są regularne a kiedy nie. Dalej zajmuję się szczególnymi przypadkami tego twierdzenia dla prostych (por. 2.7, 2.9) i płaszczyzn (por. 2.10).

Kolejnym etapem rozważań struktur regularnych podprzestrzeni w **rozdziale trzecim** jest geometria $\mathfrak{B}$ — grassmannian regularnych punktów i prostych rzutowych. Zaczynam od zdefiniowania relacji równoległości prostych w $\mathfrak{B}$ (por. 3.7). W dalszej części tego rozdziału zajmuję się rekonstrukcją całej geometrii afinicznej $\mathfrak{A}$ w terminach geometrii $\mathfrak{B}$ (por. 3.12). Poprzez domknięcie rzutowe można zatem w $\mathfrak{B}$ reinterpretować wyjściową geometrię rzutową. Rozpatrując aspekt definiowalności dochodzę jednak do wnioisku, że przestrzeni rzutowo-metrycznej nie można zdefiniować w języku geometrii $\mathfrak{B}$ (por. 3.14).

Istotną częścią mojej pracy jest także badanie automorfizmów geometrii $\mathfrak{B}$. Wyniki zgromadzone są w twierdzeniach 3.18 oraz 3.19.

W **rozdziale czwartym** zajmuję się grassmannianem regularnych prostych i płaszczyzn rzutowych. Zaczynam od zdefiniowania trójargumentowej relacji współpękowości $\mathbf{L}$ (por. (4.2)) oraz relacji $\triangle$ bycia trójątem (por. (4.3)) na regularnych prostych rzutowych w terminach naszego grassmanianu. Te dwie relacje razem z relacją wiązki regularnych prostych rzutowych (por. (4.4), (4.5), (4.6)) pozwalają wyrazić w języku naszego grassmanianu geometrię $\mathfrak{B}$ (por. 4.16).

Rozdział 1

Pojęcia podstawowe

1.1 Częściowe przestrzenie prostych

Zaczynamy od zdefiniowania podstawowych pojęć dla naszych dalszych rozważań.

Definicja 1.1. Niech S i $\mathcal{L}$ będą niepustymi zbiorami i niech $\mathrm{I} \subseteq S \times \mathcal{L}$. Elementy zbioru S nazywać będziemy *punktami*, elementy zbioru $\mathcal{L}$ *prostymi*, natomiast relację I *relacją incydencji*. Dla punktu $a \in S$ i prostej $k \in \mathcal{L}$ relację $a \mathrm{~I~} k$ czytamy *a incyduje* z k.

Struktura $\langle S, \mathcal{L}, \mathrm{I} \rangle$ jest *częściową przestrzenią prostych*, jeśli spełnia następujące warunki:

(A1) $(\forall\ k, l \in \mathcal{L})\ (\forall\ a, b \in S)\ [a, b \mathrm{~I~} k, l\ \Rightarrow\ a = b\ \vee\ k = l]$,

(A2) $(\forall\ k \in \mathcal{L})\ (\exists\ a, b \in S)\ [a \neq b \wedge\ a, b \mathrm{~I~} k]$,

(A3) $(\forall\ k \in \mathcal{L})\ (\exists\ a \in S)\ [a \not\mathrm{I}\ k]$.

Warunek (A1) mówi, że przez dwa różne punkty przechodzi najwyżej jedna prosta, warunek (A2) mówi, że na każdej prostej leżą przynajmniej dwa punkty i warunek (A3) gwarantuje, że poza każdą prostą jest jakiś punkt.

Definicja 1.2. Strukturę $\langle S, \mathcal{L}, \mathrm{I} \rangle$ nazywamy *przestrzenią prostych*, gdy jest częściową przestrzenią prostych oraz spełniony jest następujący warunek:

(A4) $(\forall\ a, b \in S)\ (\exists\ k \in \mathcal{L})\ [a, b \mathrm{~I~} k]$.

Warunek (A4) mówi, że każde dwa punkty są współliniowe.

Gdy spełnione są warunki (A1) i (A2) to w definicji 1.1 możemy zamiast prostych wziąć *łańcuchy*. Przez łańcuch rozumiemy tutaj zbiór wszystkich punktów incydujących z daną prostą, formalnie dla $l \in \mathcal{L}$

$$l^* = \{a \in S \colon a \mathrm{~I~} l\}.$$

W ten sposób relację incydencji I możemy zastąpić relacją $\in$. Dalej będziemy zakładać, że $\mathcal{L} \subset 2^S$.

Jeżeli $a, b \in S$ są takimi punktami, że istnieje prosta $k \in \mathcal{L}$ na której one leżą, tzn. $a, b \in k$ wówczas mówimy krótko, że punkty a, b są *współliniowe*. Dla różnych współliniowych punktów $a, b \in S$ prostą przez nie wyznaczoną oznaczamy $\overline{a, b}$. Dualnie, jeśli $k, l \in \mathcal{L}$ są takimi prostymi, że istnieje ich punkt wspólny $a \in S$, tzn., $a \in k \cap l$, to mówimy, że proste k, l *przecinają się*.

Podprzestrzenią częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ nazywamy zbiór $X \subseteq S$ spełniający warunek:

(B1) X jest zamknięty ze względu na prowadzenie prostych tzn., dla dowolnej prostej $k \in \mathcal{L}$ jeśli $|k \cap X| \geqslant 2$, to $k \subseteq X$.

Podprzestrzeń $H \subseteq S$ nazywamy *hiperpłaszczyzną* w $\mathfrak{A}$, gdy dla dowolnej prostej $k \in \mathcal{L}$ mamy: albo $k \subseteq H$ albo k przecina H w punkcie.

Mocną podprzestrzenią przestrzeni $\mathfrak{A}$ nazywamy podprzestrzeń $X \subseteq S$, w której dwa dowolne punkty są współliniowe.

Definicja 1.3. Częściowa przestrzeń prostych $\langle S, \mathcal{L} \rangle$, w której spełniony jest warunek (none-one-or-all):

(Γ) dla dowolnego punktu $p \in S$ i dowolnej prostej $l \in \mathcal{L}$, punkt p nie jest współliniowy z żadnym punktem na prostej l, jest współliniowy z dokładnie jednym punktem z prostej l lub ze wszystkimi punktami prostej l.

jest *przestrzenią gamma.*

W przestrzeni gamma jeśli punkt $p \in S$ jest współliniowy z dwoma różnymi punktami prostej $l \in \mathcal{L}$ to p jest współliniowy ze wszystkimi punktami prostej l.

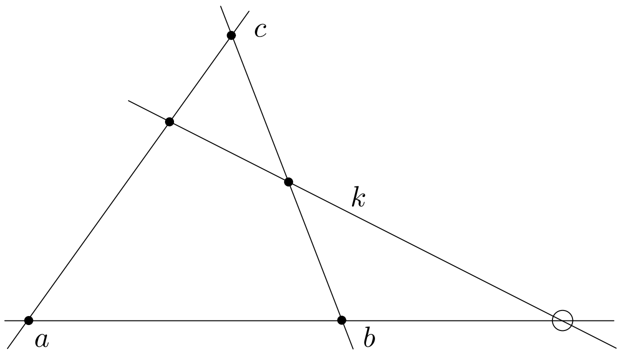
W kontekście przestrzeni biegunowych naturalnym wydaje się oznaczenie współliniowości punktów w częściowej przestrzeni prostych symbolem $\perp$. Przyjmijmy, że dla $a \in S$

$$a^\perp = \{b \in S : a \perp b\}.$$

Lemat 1.4 (A. Cohen [2]). *Częściowa przestrzeń prostych $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest przestrzenią gamma, gdy $a^\perp$ jest podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$ dla dowolnego $a \in S$.*

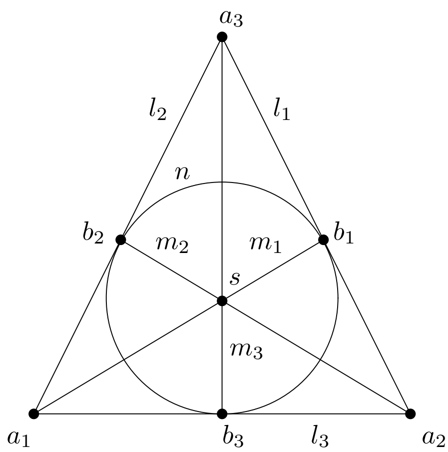
Trójkątem nazywamy układ trzech parami różnych punktów zwanych *wierzchołkami* oraz trzech parami różnych prostych zwanych *bokami* takich, że boki przecinają się parami w wierzchołkach (dualnie wierzchołki parami połączone są bokami).

Definicja 1.5. Rzutowy warunek Veblena (PVC).
Jeżeli prosta $k \in \mathcal{L}$ przecina dwa boki trójkąta w dokładnie dwóch różnych punktach, to przecina ona też trzeci bok tego trójkąta. (rys. 1.1)



Rysunek 1.1: Rzutowy warunek Veblena (PVC).

Definicja 1.6. Rzutowy warunek Fano (PFC).
Punkty przekątniowe każdego czworokąta są współliniowe (rys. 1.2)



Rysunek 1.2: Rzutowa płaszczyzna Fano.

Definicja 1.7. Strukturę $\mathfrak{P} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ nazywamy *przestrzenią rzutową* gdy:

(C1) $\mathfrak{P}$ jest przestrzenią prostych,

(C2) na każdej prostej leżą przynajmiej trzy różne punkty,

(C3) $\mathfrak{P}$ spełnia rzutowy warunek Veblena.

Definicja 1.8. Relację $\|$ nazywamy relacją *równoległości*, gdy spełnione są następujące warunki:

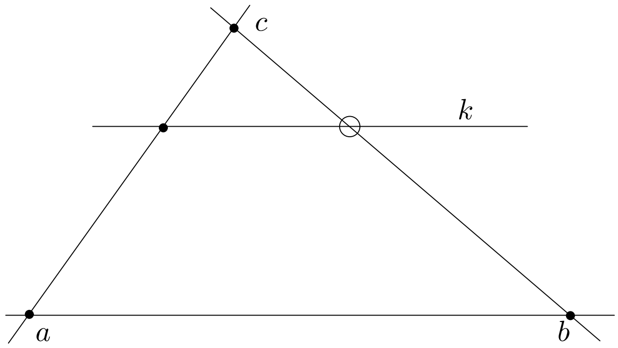
(D1) $\|$ jest relacją równoważności,

(D2) przez każdy punkt możemy przeprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej, tzn., dla każdego $a \in S$ i $k \in \mathcal{L}$ istnieje dokładnie jedna prosta $l \in \mathcal{L}$ taka, że $a \in l$ i $l \| k$.

Relacja równoległości dzieli zbiór prostych na klasy abstrakcji, które nazywamy *kierunkami*. Warunek (D2) w powyższej definicji to pełny postulat Euklidesa dotyczący równoległości. Czasem osłabia się go żądając by istniała co najwyżej jedna odpowiednia prosta.

Definicja 1.9. Afiniczny warunek Veblena (AVC).

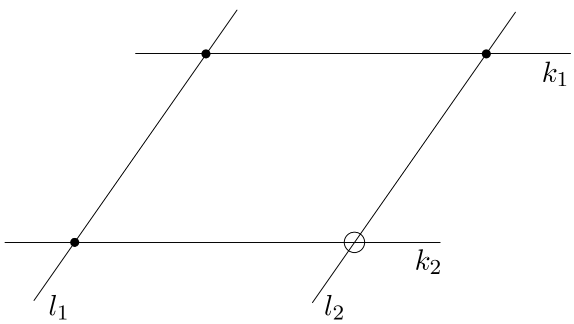
Niech $a, b, c \in S$ tworzą niezdegenerowany trójkąt tzn., a, b, c są niewspółliniowe, ale parami współliniowe. Jeśli prosta $k \in \mathcal{L}$ przecina bok $\overline{a, c}$ i $k \parallel \overline{a, b}$ to k przecina bok $\overline{b, c}$ (rys. 1.3).



Rysunek 1.3: Afiniczny warunek Veblena (AVC).

Definicja 1.10. Warunek uzupełniania do równoległoboku (PC).

Niech $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathcal{L}$. Jeśli prosta k_2 przecina proste l_1 i l_2, prosta l_2 przecina proste k_1 i k_2 oraz $k_1 \| k_2$ i $l_1 \| l_2$ to k_2 przecina l_2 (rys. 1.4)



Rysunek 1.4: Warunek uzupełniania do równoległoboku (PC).

Definicja 1.11. Strukturę $\langle S, \mathcal{L}, \| \rangle$ nazywamy *przestrzenią afiniczną*, gdy jest przestrzenią prostych wraz z relacją równoległości, oraz gdy spełnione są warunki: (AVC) i (PC).

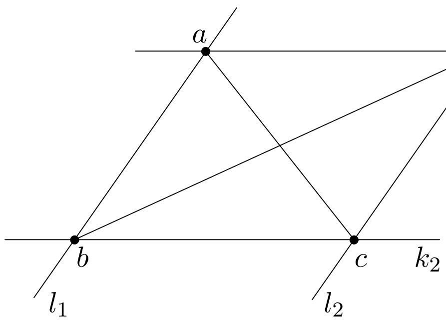
Definicja 1.12. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \| \rangle$ będzie przestrzenią afiniczną. *Podprzestrzenią* przestrzeni $\mathfrak{A}$ nazywamy zbiór $X \subseteq S$ spełniający warunki:

(E1) X jest podprzestrzenią częściowej przestrzeni prostych $\langle S, \mathcal{L} \rangle$,

(E2) X jest zamknięty ze względu na prowadzenie prostych równoległych tzn., jeśli $k, l \in \mathcal{L}$, $k \subseteq X$, $k \parallel l$ oraz $l \cap X \neq \emptyset$ to $l \subseteq X$.

Definicja 1.13. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \parallel \rangle$ będzie przestrzenią afiniczną. Podprzestrzeń $H \subseteq S$ nazywamy *hiperpłaszczyzną* w $\mathfrak{A}$, gdy dla dowolnej prostej $k \in \mathcal{L}$ mamy: albo $k \subseteq H$, albo w H istnieje prosta l taka, że $k \parallel l$, albo k przecina H w punkcie.

Definicja 1.14. Afiniczny warunek Fano (AFC)
W każdym równoległoboku przekątne są równoległe. (rys. 1.5)



Rysunek 1.5: Afiniczna płaszczyzna Fano.

Stwierdzenie 1.15. *W przestrzeni afinicznej spełniającej warunek Fano trzy proste poprowadzone przez wierzchołki trójkąta, równoległe odpowiednio do przeciwległych boków tego trójkąta, są współpękowe.*

1.2 Przestrzenie biegunowe

Definicja 1.16. *Przestrzeń biegunowa* jest częściową przestrzenią prostych $\langle S, \mathcal{L} \rangle$, która spełnia dodatkowo warunki:

(F1) żaden punkt nie jest współliniowy ze wszystkimi pozostałymi,

(F2) $p^{\perp}$ jest hiperpłaszczyzną dla dowolnego punktu $p \in S$.

Warunek (F2) nazywa się czasem *one-or-all*, bo rzeczywiście, gdy $p^{\perp}$ jest hiperpłaszczyzną to każda prosta $l \in \mathcal{L}$ albo przecina $p^{\perp}$ punktowo i tym samym p jest połączalny przynajmniej z jednym punktem na l, albo $l \subseteq p^{\perp}$ i wtedy p jest połączalny ze wszystkimi punktami na l. W drugą stronę, przy założeniu one-or-all, z 1.3 mamy przestrzeń gamma. Z 1.4 wynika wtedy, że $p^{\perp}$ jest podprzestrzenią. Dla dowolnej prostej $l \in \mathcal{L}$ punkt p jest współliniowy chociaż z jednym z jej punktów, więc podprzestrzeń $p^{\perp}$ jest hiperpłaszczyzną. Z warunku (F2) wynika zatem, że przestrzeń biegunowa jest przestrzenią gamma.

Definicja 1.17. *Odwzorowaniem biegunowym* nazywamy odwzorowanie π zbioru wszystkich punktów przestrzeni rzutowej w zbiór jej hiperpłaszczyzn, mające następującą własność:

(G1) jeśli punkt a należy do hiperpłaszczyzny b^{π}, będącej obrazem punktu b, to punkt b należy do hiperpłaszczyzny a^{π}.

Obraz a^{π} punktu a nazywamy *hiperpłaszczyzną biegunową* lub *biegunową*. Jeśli H jest taką hiperpłaszczyzną, że $H = h^{\pi}$ dla pewnego punktu h, to h nazywamy *biegunem hiperpłaszczyzny* H.

Punkty a, b takie, że $a \in b^{\pi}$ nazywamy *sprzężonymi*, natomiast gdy $a \in a^{\pi}$ to mówimy, że punkt a jest *samosprzężony* względem biegunowości π.

Lemat 1.18 (H. Lenz [6]). *Każde odwzorowanie biegunowe jest wzajemnie jednoznaczne, to znaczy każda hiperpłaszczyzna ma co najwyżej jeden biegun.*

Definicja 1.19. *Kolineacją* nazywamy takie odwzorowanie zbioru punktów jednej częściowej przestrzeni prostych w drugą częściową przestrzeń prostych, które jest bijekcją przy której obrazem prostej jest prosta i przeciwobrazem prostej jest również prosta.

Przestrzeń dualna P^* do przestrzeni rzutowej P powstaje przez odwrócenie porządku w kracie wszystkich podprzestrzeni przestrzeni P. Tak więc punktami P^* są hiperpłaszczyzny P, a prostymi P^* są ko-hiperpłaszczyzny (podprzestrzenie kowymiaru 2) w P.

Definicja 1.20. *Korelacją* przestrzeni rzutowej nazywamy kolineację z niej w przestrzeń rzutową dualną do niej.

Inaczej mówiąc *biegunowość* to inwolucyjna korelacja, albo korelacja o okresie 2.

1.2.1 Model przestrzeni biegunowej

Do dalszych rozważań ustalmy przestrzeń wektorową V nad pierścieniem z dzieleniem F.

Definicja 1.21. Odwzorowanie f, różne od zerowego, przestrzeni wektorowej V nad pierścieniem z dzieleniem F w przestrzeń wektorową V' nad pierścieniem z dzieleniem F' jest *półliniowe*, jeśli istnieje taki izomorfizm $\sigma : F \to F'$, że

(i) $f(u + w) = f(u) + f(w)$;

(ii) $f(\lambda u) = \sigma(\lambda) f(u)$.

dla dowolnych wektorów $u, w \in V$ oraz $\lambda \in F$. Mówimy także, że f jest σ-półliniowe.

Definicja 1.22. Niech F będzie pierścieniem z dzieleniem, σ anty-automorfizmem F oraz V przestrzenią wektorową nad F. *σ-półtoraliniową formą* na V albo *półtoraliniową formą* względem σ jest takie odwzorowanie $\xi : V \times V \to F$, że:

(i) $\xi(u + w, v) = \xi(u, v) + \xi(w, v)$;

(ii) $\xi(u, w + v) = \xi(u, w) + \xi(u, v)$;

(iii) $\xi(\lambda u, w) = \lambda \xi(u, w)$;

(iv) $\xi(u, \mu w) = \xi(u, w)\sigma(\mu)$

dla wszystkich $u, w, v \in V$ i dla wszystkich $\lambda, \mu \in F$.

Nazwa półtoraliniowa bierze się stąd, że ξ jest liniowa na pierwszej współrzędnej i półliniowa na drugiej. Szczególnym przypadkiem formy półtoraliniowej jest *forma dwuliniowa*, czyli forma półtoraliniowa względem $\sigma = \mathrm{id}$.

Definicja 1.23. Przy oznaczeniach z definicji 1.22 mówimy, że forma półtoraliniowa ξ jest:

(i) *symplektyczna*, gdy $\xi(u, u) = 0$ dla $u \in V$, czyli wszystkie wektory względem tej formy są prostopadłe,

(ii) *symetryczna*, gdy $\xi(u, w) = \xi(w, u)$ dla wszystkich $u, w \in V$,

(iii) *anty-symetryczna*, gdy $\xi(u, w) = -\xi(w, u)$ dla wszystkich $u, w \in V$,

(iv) *refleksywna* lub *z symetrycznym zerowaniem*, gdy $\xi(u, w) = 0$ implikuje $\xi(w, u) = 0$ dla dowolnych $u, w \in V$.

Należy zwrócić uwagę na ciała charakterystyki 2 i różnej od 2.

W ciele charakterystyki 2 forma anty-symetryczna jest symetryczna. Załóżmy, że $\xi(u, w) = -\xi(w, u)$. Ale z uwagi na fakt, że $-1 = 1$ mamy $\xi(u, w) = \xi(w, u)$. Zatem ξ jest formą symetryczną.

W ciele charakterystyki różnej od 2 forma anty-symetryczna jest symplektyczna i na odwrót. Załóżmy, że ξ jest formą anty-symetryczną, czyli $\xi(u, u) = -\xi(u, u)$. Stąd $\xi(u, u) = 0$ dla wszystkich $u \in V$. Zaś z drugiej strony mamy, że $\xi(u + w, u + w) = 0$ dla dowolnych $u, w \in V$. Policzmy

$$\xi(u+w, u+w) = \xi(u, u)+\xi(u, w)+\xi(w, u)+\xi(w, w) = \xi(u, w)+\xi(w, u) = 0.$$

Zatem $\xi(u, w) = -\xi(w, u)$. Stąd forma ξ jest formą anty-symetryczną.

Niech ξ będzie ustaloną refleksywną formą półtoraliniową na V. Dla podprzestrzeni U, W przestrzeni V w standardowy sposób określamy:

$$U \perp W \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \xi(u,w) = 0 \text{ dla wszystkich } u \in U, w \in W$$

oraz

$$U^{\perp} := \{w \in V \colon \xi(u,w) = 0 \text{ dla wszystkich } u \in U\}.$$

Mówimy, że podprzestrzeń U w przestrzeni V jest *izotropowa*, gdy $U \perp U$.

Fakt 1.24. *Dla podprzestrzeni U, W, B przestrzeni V są prawdziwe następujące własności:*

(i) $U \perp W$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $U \subseteq W^{\perp}$*;*

(ii) jeśli $U \perp U$ *oraz* $W \subseteq U$ *to* $W \perp W$*;*

(iii) jeśli $U \perp B$ *i* $W \subseteq B$ *to* $U \perp W$*;*

(iv) jeśli $U, W \subseteq B$ *oraz* $B \perp B$ *to* $U \perp W$*;*

(v) $B \perp (U + W)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $B \perp U$ *i* $B \perp W$*;*

(vi) jeśli $U \subseteq W$ *to* $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$*;*

(vii) $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$*;*

(viii) $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$*;*

(ix) $(U \cap W)^{\perp} \supseteq U^{\perp} + W^{\perp}$*;*

(x) jeśli $U \subseteq W^{\perp}$ *to* $W \subseteq U^{\perp}$*;*

(xi) dla $B = U + W$ *mamy* $B \perp B$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $U \perp U$*,* $W \perp W$ *oraz* $U \perp W$*.*

DOWÓD. (xi) " $\Rightarrow$ " Załóżmy, że $B \perp B$. Ponieważ $U, W \subseteq B$ więc z założenia i z (iii) mamy $U \perp W$. Teraz, skoro $U \subseteq B$ i (ii) to mamy już $U \perp U$, analogicznie dla W.

" $\Leftarrow$ " Jeśli $U \perp U$ to prawdą jest, że $U \subseteq U^{\perp}$ z (i), tak samo jest dla W. Również wiemy, że skoro $U \perp W$ to $U \subseteq W^{\perp}$ oraz $W \subseteq U^{\perp}$. Zatem mamy $U \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}$ oraz $W \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}$ co na mocy (viii) daje nam

$$B = U + W \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp} = (U + W)^{\perp} = B^{\perp}.$$

$\square$

Definicja 1.25. Niech V będzie przestrzenią wektorową i ξ formą półtoraliniową na V. *Radykał* formy ξ to zbiór

$$\mathrm{Rad}(\xi) := \{u \in V : \xi(u, V) = 0\},$$

czyli zbiór wektorów, które są prostopadłe względem formy ξ do wszystkich wektorów V.

Dla podprzestrzeni U w V, *radykałem* U będziemy nazywać radykał formy ξ obciętej do U, tzn.

$$\mathrm{Rad}(U) := \mathrm{Rad}(\xi|U) := \{u \in U : \xi(u, U) = 0\}.$$

Dla skrócenia zapisu używamy również oznaczenia

$$\mathrm{rdim}(U) := \dim(\mathrm{Rad}(U)).$$

Stwierdzenie 1.26. *Dla dowolnej podprzestrzeni U w V mamy:*

$$\mathrm{Rad}(U) = U \cap U^{\perp}.$$

Dowód. " $\subseteq$ " Weźmy dowolny wektor $v \in \mathrm{Rad}(U)$. Z tego wynika, że $\xi(v, U) = 0$, dając tym samym, że dla dowolnego $u \in U$, $\xi(v, u) = 0$, co oznacza, że $v \in U \cap U^{\perp}$.

" $\supseteq$ " Weźmy $v \in U \cap U^{\perp}$ czyli $v \in U$ i $v \in U^{\perp}$. Skoro $v \in U^{\perp}$, to dla dowolnego $u \in U$ mamy $\xi(v, u) = 0$. Z dowolności u mamy $\xi(v, U) = 0$, co ozncza, że $v \in \mathrm{Rad}(U)$. □

Lemat 1.27 (J. Komorowski [5])**.** *Jeśli ξ jest niezdegenerowaną formą półtoraliniową na przestrzeni wektorowej V, $\dim V = n$, a W jest podprzestrzenią wymiaru r, to istnieje taka r-wymiarowa podprzestrzeń U, że $U \cap W = \Theta$, a przestrzeń $U + W$ nie jest izotropowa.*

Definicja 1.28. *Indeksem Witta*, lub inaczej, *indeksem formy półtoraliniowej* ξ nazywamy wymiar maksymalnej podprzestrzeni izotropowej względem ξ i oznaczamy go $\mathrm{ind}(\xi)$.

Przez $\mathrm{Sub}(V)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich podprzestrzeni przestrzeni wektorowej V, natomiast przez $\mathrm{Sub}_k(V)$ zbiór wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni.

Analityczną przestrzenią rzutową nazywamy strukturę

$$\mathbf{P}(V) = \langle \mathrm{Sub}_1(V), \mathrm{Sub}_2(V), \subseteq \rangle.$$

Gdy $\dim V = n$ to $\mathbf{P}(V) = \mathrm{PG}(n, F)$.

Wprowadźmy nowe oznaczenie

$$\mathcal{H}(V) = \{a + U \colon a \in V, U \in \mathrm{Sub}(V)\}$$

zbioru wszystkich warstw w przestrzeni V. Dla $a \in V, U \in \mathrm{Sub}(V)$ przyjmujemy, że $\dim(a+U) = \dim(U)$ oraz piszemy

$$\mathcal{H}_k(V) = \{A \in \mathcal{H}(V)\colon \dim(A) = k\} = \{a + U\colon a \in V, U \in \mathrm{Sub}_k(V)\}.$$

Relacja równoległości na (jednowymiarowych) warstwach określona jest następująco: dla $a, b \in V; U, W \in \mathrm{Sub}_1(V)$

$$a + U \parallel b + W \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } U = W.$$

Analityczną przestrzenią afiniczną nazywamy strukturę

$$\mathbf{A}(V) = \langle V, \mathcal{H}_1(V), \parallel \rangle.$$

Twierdzenie 1.29 (Cameron [1])**.**

(i) Każda korelacja $\mathbf{P}(V)$*, jest indukowana przez niezdegenerowaną* σ*-półtoraliniową formę przestrzeni wektorowej* V*, gdzie* σ *jest anty-automorfizmem* F*. Odwrotnie, każda niezdegenerowana półtoraliniowa forma na* V *indukuje* korelację $\mathbf{P}(V)$*.*

(ii) Korelacja $\mathbf{P}(V)$ *jest przekształceniem biegunowym wtedy i tylko wtedy, gdy półtoraliniowa forma, która wyznacza tę korelację jest refleksywna.*

Dla naszych dalszych rozważań istotny jest zbiór wszystkich podprzestrzeni izotropowych, czyli

$$Q = \{U \in \mathrm{Sub}(V) : U \perp U\}$$

natomiast zbiór izotropowych podprzestrzeni k-wymiarowych to

$$Q_k = Q \cap \mathrm{Sub}_k(V).$$

Przykład 1.30. Załóżmy, że $\dim(V) = n < \infty$ oraz $\mathrm{ind}(\xi) \geqslant 2$. Rozważmy strukturę

$$\mathbb{Q} = \langle Q_1, Q_2, \subseteq \rangle.$$

Sprawdzimy, że $\mathbb{Q}$ jest częściową przestrzenią prostych. Zacznijmy od (A1): weźmy dwie dowolne, izotropowe podprzestrzenie jednowymiarowe $U_1, W_1 \in Q_1$ oraz dwie dowolne, izotropowe podprzestrzenie dwuwymiarowe $U_2, W_2 \in Q_2$. Zakładamy, że $U_1, W_1 \subseteq U_2, W_2$. Zatem albo $U_1 = W_1$ albo $U_2 = W_2$, bo dwie różne podprzestrzenie jednowymiarowe wyznaczają jedną podprzestrzeń dwuwymiarową w V.

Przejdźmy do (A2). Bierzemy $U_2 \in Q_2$. Podprzestrzeń U_2 ma bazę dwuelementową. Każdy z dwu wektorów bazowych U_2 rozpina izotropową podprzestrzeń z Q_1 z uwagi na 1.24(ii). Czyli, w każdej dwuwymiarowej podprzestrzeni izotropowej zawierają się dwie izotropowe podprzestrzenie jednowymiarowe.

Rozważmy ostatni warunek (A3). Niech $U_2 \in Q_2$. Z lematu 1.27 wynika, że istnieje $W_2 \in Q_2$ takie, że $U_2 \cap W_2 = \Theta$. Weźmy $U_1 \subseteq W_2$. Z faktu 1.24(ii) mamy $U_1 \in Q_1$. Ponadto $U_1 \cap U_2 = \Theta$ zatem U_1, U_2 spełniają wymagania (A3).

Zauważmy, że współliniowość punktów U_1, W_1 w Q oznacza prostopadłość odpowiednio podprzestrzeni jednowymiarowych $U_1 \perp W_1$. Q jest przestrzenią gamma z uwagi na fakt 1.24(v).

Teraz pokażemy, że $\mathbb{Q}$ jest przestrzenią biegunową, to znaczy, że spełnia (F1) i (F2). Pierwszy warunek: z założenia, że forma ξ jest niezgdegenerowana, czyli $\mathrm{Rad}(\xi) = \Theta$, w V nie ma takiego wektora, który byłby prostopadły do wszystkich wektorów z V. Oznacza to, że nie ma $U_1 \in Q_1$ takiego, że dla wszystkich $W_1 \in Q_1$ byłoby $U_1 \perp W_1$.

Przejdźmy do (F2). Przy formie niezdegenerowanej $\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U)$. Więc gdy $U_1 \in Q_1$ to $U_1^\perp$ jest hiperpłaszczyzną.

Ostatecznie $\mathbb{Q}$ jest przestrzenią biegunową.

1.3 Przestrzenie pęków

Definicja 1.31. Dla $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V), B \in \mathrm{Sub}_{k+1}$ takich, że $H \subset B$ definiujemy pęk $\mathbf{p}(H, B)$ o wierzchołku H i podstawie B warunkiem

$$\mathbf{p}(H, B) = \{U \in \mathrm{Sub}_k(V) : H \subset U \subset B\}.$$

Niech $\mathcal{P}_k(V)$ oznacza rodzinę wszystkich takich pęków. Przestrzeń pęków, to struktura incydencyjna

$$\mathbf{P}_k(V) = \langle \mathrm{Sub}_k(V), \mathcal{P}_k(V) \rangle.$$

Dla $k = 1$ oraz dla $k = \dim(V) - 1$ przestrzeń pęków $\mathbf{P}_k(V)$ jest przestrzenią rzutową. Gdy $1 < k < \dim(V) - 1$ to $\mathbf{P}_k(V)$ jest właściwą przestrzenią prostych, właściwą w tym sensie, że zawsze istnieje para punktów niewspółliniowych (niewspółpękowych).

Rozdział 2

Podprzestrzenie regularne

Mówimy, że podprzestrzeń U przestrzeni V jest *regularna*, gdy

$$\mathrm{Rad}(U) = \Theta,$$

gdzie Θ to podprzestrzeń zerowa w V. Zbiór wszystkich regularnych podprzestrzeni wymiaru k będziemy oznaczać przez $\mathcal{R}_k$.

Dalej zakładamy, że ciało F jest charakterystyki 2 i forma ξ jest symetryczna. Wówczas $\perp$ nazywamy *pseudo-biegunowością*. Niech H będzie zbiorem wszystkich wektorów izotropowych w V względem ξ. O H lub raczej o $\mathrm{Sub}_1(\mathsf{H})$ możemy myśleć jak o *kwadryce* w przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}(V)$. W naszej sytuacji, gdy $\perp$ jest pseudo-biegunowością, H jest hiperpłaszczyzną w V (por. [3]). Niech b będzie biegunem tej hiperpłaszczyzny. Ograniczenie $\perp_{\mathsf{H}}$ biegunowości $\perp$ do $\mathrm{Sub}_1(\mathsf{H})$ wyznacza na H *biegunowość symplektyczną*. Jeśli $\mathrm{Rad}(\mathsf{H}) = \Theta$, to ta biegunowość jest niezdegenerowana.

Dalej będziemy mówić *rzutowy punkt, prosta, płaszczyzna* w odniesieniu do jedno, dwu i trójwymiarowych podprzestrzeni V. Usuwając hiperpłaszczyznę rzutową H z $\mathbf{P}(V)$ uzyskujemy przestrzeń *afiniczną*. Zatem punkty, proste i płaszczyzny rzutowe, które nie leżą na H będziemy nazywać *afinicznymi* lub *właściwymi*. Natomiast te punkty, proste i płaszczyzny, które leżą na H będziemy nazywać *niewłaściwymi*. Jeżeli l jest prostą afiniczną to punkt niewłaściwy leżący na niej będziemy oznaczać przez

$$l^\infty := l \cap \mathsf{H},$$

ogólnie gdy U jest podprzestrzenią afiniczną to przez

$$U^\infty := U \cap \mathsf{H}$$

będziemy oznaczać jej horyzont.

Fakt 2.1. *Biegun* b *hiperpłaszczyzny* H *może leżeć względem niej na dwa sposoby (por. [3, 2.1.5]):*

(1) *Gdy* $\mathbf{b}$ *leży na* $\mathbf{H}$ *to w tym przypadku* $\mathrm{Rad}(\mathbf{H}) = \mathbf{b}$*, tak więc biegunowość* $\perp$ *ograniczona do* $\mathbf{H}$ *jest zdegenerowaną biegunowością symplektyczną. Wówczas wymiar przestrzeni wektorowej* V *jest parzysty i forma* ξ *ma wzór:*

$$\xi([x_0, x_1, \ldots, x_{2k-1}], [y_0, y_1, \ldots, y_{2k-1}]) = x_0 y_0 + \Sigma_{i=0}^{k-1}(x_{2i}y_{2i+1} + x_{2i+1}y_{2i}).$$

Hiperpłaszczyzna $\mathbf{H}$ *i jej biegun* $\mathbf{b}$ *są scharakteryzowane równaniami:*

$$\mathbf{H} : x_0 = 0, \qquad \mathbf{b} = [0, 1, 0, \ldots, 0].$$

(2) *Gdy* $\mathbf{b}$ *nie leży na* $\mathbf{H}$*, to wymiar przestrzeni wektorowej* V *jest nieparzysty i forma* ξ *wyraża się wzorem:*

$$\xi([x_0, x_1, \ldots, x_{2k}], [y_0, y_1, \ldots, y_{2k}]) = x_0 y_0 + \Sigma_{i=1}^{k}(x_{2i-1}y_{2i} + x_{2i}y_{2i-1}).$$

Hiperpłaszczyzna $\mathbf{H}$ *i jej biegun* $\mathbf{b}$ *są scharakteryzowane równaniami:*

$$\mathbf{H} : x_0 = 0, \qquad \mathbf{b} = [1, 0, \ldots, 0].$$

Lemat 2.2. *Jeśli* a *jest punktem rzutowym z* $\mathrm{Rad}(U)$ *to* $a \perp a$.

DOWÓD. Z 1.26 mamy, że $a \subseteq (U \cap U^{\perp})$. Zatem $a \subseteq U$. Z 1.24(vi) otrzymujemy $U^{\perp} \subseteq a^{\perp}$. Ponieważ $a \subseteq U^{\perp}$ to $a \subseteq a^{\perp}$, co kończy dowód. □

Fakt 2.3. *Niech* a *będzie punktem rzutowym i niech* $U \in \mathrm{Sub}(V)$.

(i) *Jeśli* $a \subseteq \mathrm{Rad}(U)$ *to* $a \perp U, U^{\perp}$.

(ii) $\mathrm{Rad}(U) \subset \mathrm{Rad}(U \cap \mathbf{H}) \subset \mathbf{H}$.

(iii) *Niech* $U \nsubseteq \mathbf{H}$*, to* $\dim(U \cap (U \cap \mathbf{H})^{\perp}) \geqslant 1$.

DOWÓD. (i): Niech $a \subseteq \mathrm{Rad}(U)$. Ponieważ $\mathrm{Rad}(U) = U \cap U^{\perp}$ z 1.26, więc $a \subseteq U^{\perp}$ zatem $a \perp U$. Z drugiej strony $a \subseteq U$ i z 1.24(vii) mamy $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$ co daje nam $a \perp U^{\perp}$.

(ii): Niech $a \subseteq \mathrm{Rad}(U)$. Wówczas $a \subseteq U$. Z lematu 2.2 mamy $a \perp a$. Z określenia $\mathbf{H}$ mamy $a \subseteq \mathbf{H}$, więc $a \subseteq U \cap \mathbf{H}$. Oczywiste jest, że $U \cap \mathbf{H} \subset U$. Z tego, że $a \subseteq \mathrm{Rad}(U)$ mamy $a \subseteq U^{\perp}$. Z faktu 1.24(vi) mamy $U^{\perp} \subseteq (U \cap \mathbf{H})^{\perp}$. Zatem $a \subseteq \mathrm{Rad}(U \cap \mathbf{H})$. Czyli

$$\mathrm{Rad}(U) \subset \mathrm{Rad}(U \cap \mathbf{H}).$$

Niech teraz $x \in \mathrm{Rad}(U \cap \mathbf{H})$. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że x nie jest wektorem zerowym. Niech $a = \langle x \rangle$ będzie punktem rzutowym wyznaczonym przez x. Z lematu 2.2 $a \perp a$ więc $a \subseteq \mathbf{H}$. Zatem z dowolności x mamy

$$\mathrm{Rad}(U \cap H) \subset \mathbf{H}.$$

(iii): Niech $k = \dim(U \cap (U \cap \mathbf{H})^{\perp})$ oraz $m = \dim(U)$. Wtedy $\dim(U \cap \mathbf{H}) = m - 1$ i

$$n \geqslant \dim(U + (U \cap \mathbf{H})^{\perp}) = m + (n - (m-1)) - k = n + 1 - k,$$

co daje nam tezę. □

2.1 Regularne punkty, proste i płaszczyzny

Ze względu na specyficzną rolę podprzestrzeni $\mathbf{H}$ określamy

$$\mathrm{Hrd}(U) := U \cap (U \cap \mathbf{H})^{\perp},$$

dla dowolnej podprzestrzeni U w V. Zwróćmy uwagę, że z faktu 2.3(iii) wynika, że $\mathrm{Hrd}(U)$ jest co najmniej rzutowym punktem dla każdej podprzestrzeni U nie zawierającej się w $\mathbf{H}$. Natomiast, gdy $U \subseteq \mathbf{H}$ to $\mathrm{Hrd}(U) = U \cap U^{\perp} = \mathrm{Rad}(U)$.

Lemat 2.4 (Rozendorn [4]). *Niech U będzie regularną podprzestrzenią. Zakładamy, że U jest hiperpłaszczyzną podprzestrzeni W albo W jest hiperpłaszczyzną U. W obu przypadkach* $\mathrm{rdim}(W) \leqslant 1$.

Twierdzenie 2.5. *Niech U będzie podprzestrzenią z V nie zawierającą się w $\mathbf{H}$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *podprzestrzeń* $\mathrm{Hrd}(U)$ *jest punktem,*

(2) *podprzestrzeń U jest regularna,*

(3) $\mathrm{rdim}(U \cap \mathbf{H}) \leqslant 1$ *i zachodzi jedna z dwu możliwości:*

  (a) *podprzestrzeń $U \cap \mathbf{H}$ jest regularna w symplektycznej geometrii rzutowej indukowanej na $\mathbf{H}$,*

  (b) $\mathrm{Rad}(U \cap \mathbf{H})$ *jest rzutowym punktem p i $U \not\subseteq p^{\perp}$.*

DOWÓD. Oznaczmy

$$W := U \cap \mathbf{H} \ \text{ i } \ X := U \cap W^{\perp}.$$

(1) $\implies$ (2): Zakładamy, że $\mathrm{Hrd}(U)$, jest punktem, który dalej oznaczymy przez p. Przypuśćmy, że U nie jest regularna. To znaczy, że istnieje rzutowy punkt $q \subseteq \mathrm{Rad}(U)$. Wówczas $q \perp U$ oraz $q \subseteq U$. Z faktu 1.24(iii) $q \perp U \cap \mathbf{H}$. Zatem

$$q \subseteq U \cap (U \cap \mathbf{H})^{\perp} = \mathrm{Hrd}(U) = p,$$

co oznacza, że $p = q$. To oznacza, że $p \perp U$. Ponieważ $q \perp q$ więc $q \subseteq \mathbf{H}$. Zatem $q \subseteq U \cap \mathbf{H}$, czyli $q \perp (U \cap \mathbf{H})^{\perp}$. Stąd i z faktu 1.24(v) mamy $p \perp U + (U \cap \mathbf{H})^{\perp}$. Zakładając, że $\dim(U) = k$ policzmy

$$\dim((U \cap \mathbf{H})^{\perp}) = n - \dim(U \cap \mathbf{H}) = n - (k-1) = n - k + 1$$

i dalej

$$\begin{aligned}\dim(U + (U \cap \mathbf{H})^{\perp}) = \dim U + \dim((U \cap \mathbf{H})^{\perp}) - \dim(\mathrm{Hrd}(U)) = \\ = k + (n - k + 1) - 1 = n.\end{aligned}$$

Tak więc $U + (U \cap \mathbf{H})^{\perp} = V$ i w konsekwencji $p \in \mathrm{Rad}(V) = \Theta$. Co oznacza, nasze przypuszczenie, że $\mathrm{Rad}(U) \neq \Theta$ było fałszywe.

(2) $\Longrightarrow$ (3): $U \cap \mathbf{H}$ jest hiperpłaszczyzną w U z założenia $U \nsubseteq \mathbf{H}$. Z lematu 2.4 mamy $\mathrm{rdim}(U \cap \mathbf{H}) \leqslant 1$. Mamy dwie możliwości:

(a) $\mathrm{rdim}(U \cap \mathbf{H}) = 0$,

(b) $\mathrm{rdim}(U \cap \mathbf{H}) = 1$.

Podpunkt (a) oznacza, że $U \cap \mathbf{H}$ jest regularna w $\mathbf{H}$. W (b) $\mathrm{Rad}(U \cap \mathbf{H})$ jest rzutowym punktem. Oznaczmy ten punkt przez p. Gdy $p \subseteq U^{\perp}$ to ponieważ $p = \mathrm{Rad}(U \cap \mathbf{H}) \subseteq U \cap \mathbf{H} \subseteq U$, więc $p \subseteq U \cap U^{\perp}$, co przeczy, że U jest podprzestrzenią regularną.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Załóżmy najpierw, że $U \cap \mathbf{H}$ jest podprzestrzenią regularną. Z drugiej strony $U \cap \mathbf{H}$ jest hiperpłaszczyzną w U. Gdyby, podprzestrzeń $\mathrm{Hrd}(U)$ była co najmniej prostą, to ponieważ $\mathrm{Hrd}(U) \subseteq U$, więc $\mathrm{Hrd}(U)$ przecinałoby $U \cap \mathbf{H}$ w jakimś punkcie rzutowym p. Tak więc

$$p \subseteq \mathrm{Hrd}(U) \cap U \cap \mathbf{H} = (U \cap \mathbf{H})^{\perp} \cap U \cap \mathbf{H},$$

co przeczy naszemu założeniu o regularności $U \cap \mathbf{H}$. Zatem $\mathrm{Hrd}(U)$ jest najwyżej rzutowym punktem.

Załóżmy teraz, że $\mathrm{Rad}(U \cap \mathbf{H})$ jest rzutowym punktem. Dla skrócenia nazwijmy go p. Zauważmy, że

$$p = U \cap \mathbf{H} \cap (U \cap \mathbf{H})^{\perp} \subseteq U \cap (U \cap \mathbf{H})^{\perp} = \mathrm{Hrd}(U) \subseteq U.$$

Przypuśćmy, że $\mathrm{Hrd}(U)$ jest co najmniej prostą. Wówczas na $\mathrm{Hrd}(U)$ jest punkt q różny od p. Jeśli $q \subseteq U \cap \mathbf{H}$ to ponieważ $q \subseteq (U \cap \mathbf{H})^{\perp}$ więc $q \subseteq \mathrm{Rad}(U \cap \mathbf{H})$, co oznacza,że $p = q$, ale my założyliśmy inaczej. Musi być zatem $q \subseteq U \backslash U \cap \mathbf{H}$. Innymi słowy $U = U \cap \mathbf{H} + q$. Z określenia q mamy $q \perp U \cap \mathbf{H}$. Stąd na mocy 1.24(iii) mamy $q \perp \mathrm{Rad}(U \cap \mathbf{H}) = p$. Tak więc $p \perp U \cap \mathbf{H} + q = U$ z uwagi na fakt 1.24(v). Dostajemy sprzeczność z założeniem (3)(b), że $U \nsubseteq p^{\perp}$. Zatem nasze przypuszczenie, że $\mathrm{Hrd}(U)$ jest co najmniej prostą jest fałszywe, co kończy dowód. $\square$

Wniosek 2.6. *Jeśli* $p = \mathrm{Rad}(U \cap \mathbf{H})$ *jest rzutowym punktem to* $\mathrm{Hrd}(U) = p$.

Dowód. Załóżmy, że $\mathrm{Rad}(U \cap \mathbf{H})$ jest punktem rzutowym p. Z 2.5 wynika, że $\mathrm{Hrd}(U)$ jest punktem. Zauważmy, że $p \perp U \cap \mathbf{H}$, czyli $p \subseteq (U \cap \mathbf{H})^{\perp}$. Ponadto $p \subseteq U \cap \mathbf{H} \subset U$. Tak więc

$$p \subseteq U \cap (U \cap \mathbf{H})^{\perp} = \mathrm{Hrd}(U),$$

co kończy dowód. □

Niech U będzie regularną podprzestrzenią nie zawierającą się w $\mathbf{H}$ i niech $k = \dim(U)$. Wtedy ograniczenie $\perp_U$ biegunowości $\perp$ do U jest pseudobiegunowością. Przez $\mathbf{H}_U$ oznaczamy zbiór wszystkich samosprzężonych punktów ze struktury $(U, \perp_U)$. Wówczas $\mathrm{Hrd}(U)$ jest biegunem $\mathbf{H}_U$. W ten sposób jeśli $2 \mid k$ to $\mathrm{Hrd}(U) \subset \mathbf{H}_U$ i jeśli $2 \nmid k$ to $\mathrm{Hrd}(U) \not\subset \mathbf{H}_U$.

Przypomnijmy, że geometria indukowana na $\mathbf{H}$ jest symplektyczna. Dlatego $U \cap \mathbf{H}$ może być regularna wtedy i tylko wtedy, gdy $2 \mid \dim(U \cap \mathbf{H})$, co daje nam:

Uwaga. Niech U będzie podprzestrzenią nie zawierającą się w $\mathbf{H}$ i niech $\dim(U) = k$.

- Jeśli $2 \mid k$ wtedy: U jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Rad}(U \cap H)$ jest rzutowym punktem p i $U \backslash \mathbf{H}$ nie przecina $p^{\perp}$.
- Jeśli $2 \nmid k$ wtedy: U jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy podprzestrzeń $U \cap \mathbf{H}$ jest regularna.

Zbadamy teraz radykał prostej oraz warunki konieczne i wystarczające na to by prosta z $\mathbf{P}(V)$ była regularna.

Lemat 2.7. *Niech* l *będzie prostą z* $\mathbf{P}(V)$ *i niech* p *będzie rzutowym punktem takim, że* $p \subseteq l \cap \mathbf{H}$ *(taki punkt zawsze istnieje bo* $\mathbf{H}$ *jest hiperpłaszczyzną).*

(i) *Jeśli* $l \subseteq \mathbf{H}$ *to*

$$p^{\perp} \cap l = \begin{cases} p, & \textit{wtedy } \mathrm{Rad}(l) = \Theta, \\ l, & \textit{wtedy } \mathrm{Rad}(l) = l. \end{cases}$$

(ii) *Jeśli* $l \cap \mathbf{H} = p$ *to*

$$p^{\perp} \cap l = \begin{cases} p, & \textit{wtedy } \mathrm{Rad}(l) = \Theta, \\ l, & \textit{wtedy } \mathrm{Rad}(l) = p. \end{cases}$$

(iii) *Prosta* l *jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy* $l \not\subseteq p^{\perp}$.

(iv) $\mathrm{Rad}(l) = p$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $l \cap \mathbf{H} = p$ *oraz* $l \subseteq p^{\perp}$.

(v) *Prosta l jest izotropowa wtedy i tylko wtedy, gdy $l \subseteq \mathsf{H}$ oraz $l \subseteq p^{\perp}$.*

DOWÓD. Ponieważ H jest hiperpłaszczyzną to możliwe są dwa przypadki: albo $l \subseteq \mathsf{H}$, albo $l \cap \mathsf{H} = p$. Dalej wykorzystujemy fakt, że $p^{\perp}$ jest również hiperpłaszczyzną. Rozważmy wszystkie możliwości.

- Gdy $l \subseteq \mathsf{H}$, mamy dwa przypadki:

$$p^{\perp} \cap l = \begin{cases} p, \text{ wtedy } \operatorname{Rad}(l) = \Theta, \\ l, \text{ wtedy } \operatorname{Rad}(l) = l. \end{cases}$$

  W pierwszym gdyby był jakiś punkt $a \in \operatorname{Rad}(l)$ to mielibyśmy $a \perp p$, ale wówczas $a = p$, bo $a \subseteq p^{\perp} \cap l = p$. Nie może być $p \perp l$, gdyż wówczas $p^{\perp} \cap l = l$ i sprzeczność z naszym założeniem, że $p^{\perp} \cap l = p$.

  W drugim przypadku, wszystkie punkty l są samosprzężone, więc dla dowolnego punktu $a \neq p$, $a \subseteq l$ mamy $a \perp a$ i $a \perp p$ więc $a \perp l$, a zatem $a \in \operatorname{Rad}(l)$, czyli $l \subseteq \operatorname{Rad}(l) \subseteq l$.

- Gdy $l \cap \mathsf{H} = p$, mamy dwa przypadki:

$$p^{\perp} \cap l = \begin{cases} p, \text{ wtedy } \operatorname{Rad}(l) = \Theta, \\ l, \text{ wtedy } \operatorname{Rad}(l) = p. \end{cases}$$

  W pierwszym przypadku jedynym podejrzanym punktem nadającym się do $\operatorname{Rad}(l)$ jest punkt p bo jest samosprzężony, ale $p \not\perp l$.

  W drugim przypadku tylko jeden punkt jest samosprzężony, a punkty $\operatorname{Rad}(l)$ muszą być samosprzężone zatem tylko p odpowiada tym wymaganiom. Punkt p jest z $\operatorname{Rad}(l)$ ponieważ $p \perp l$.

$\square$

Lemat 2.8. *Niech q będzie regularnym punktem z $\mathbf{P}(V)$. Prosta l przechodząca przez q jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy nie przecina $q^{\perp} \cap \mathsf{H}$.*

DOWÓD. Rozważamy taką prostą l, że $q \subseteq l$. Ponieważ H jest hiperpłaszczyzną punktów samosprzężonych to niech p będzie takim punktem, że $p = l \cap \mathsf{H}$.

$\Rightarrow$: Załóżmy, że prosta l jest regularna. Przypuśćmy, że l przecina $q^{\perp} \cap \mathsf{H}$ w pewnym punkcie x. Wówczas $x \subseteq q^{\perp}$, $x \subseteq \mathsf{H}$ i $x \subseteq l$. Zatem $x = p$, bo $p = l \cap \mathsf{H}$. Dalej mamy $p \subseteq q^{\perp}$, czyli $q \subseteq p^{\perp}$. Mamy więc dwa różne punkty z prostej l na $p^{\perp}$: p oraz q. Ale, z 2.7 prosta l nie jest zawarta w hiperpłaszczyźnie $p^{\perp}$ i dostajemy sprzeczność.

$\Leftarrow$: Zakładamy, że prosta l nie przecina $q^{\perp} \cap \mathsf{H}$. Przypuśćmy, że l nie jest regularna. Z 2.7 $l \subseteq p^{\perp}$. Zatem $p \subseteq l^{\perp}$. Ponadto wiemy, że $q \subseteq l$ więc $l^{\perp} \subseteq q^{\perp}$ z 1.24(vi). Stąd $p \subseteq q^{\perp}$. Z określenia $p = l \cap \mathsf{H}$, a więc $p \subseteq q^{\perp} \cap \mathsf{H}$ i $p \subseteq l$, co oznacza sprzeczność z naszym założeniem. $\square$

Dla dowolnego punktu rzutowego q zbiór wszystkich prostych rzutowych z V przez q tworzy przestrzeń rzutową P. Formalnie jej punkty to elementy $\mathrm{Sup}_2(q)$, a proste to elementy $\mathrm{Sup}_3(q)$.

Gdy punkt q jest regularny to nie leży na hiperpłaszczyźnie $q^\perp$ i w konsekwencji proste przechodzące przez q przecinają $q^\perp$ punktowo. Wręcz można te proste utożsamić z punktami w $q^\perp$ i w ten sposób P można utożsamić z $q^\perp$. Wśród wszystkich prostych przez q, te kóre nie przecinają $q^\perp \cap \mathbf{H}$ są, zgodnie z 2.8, regularne. Ponieważ $q^\perp \cap \mathbf{H}$ jest hiperpłaszczyzną w $q^\perp$, to proste regularne przez q tworzą przestrzeń afiniczną, horyzontem tej przestrzeni są proste przez q przecinające $q^\perp \cap \mathbf{H}$.

Lemat 2.9. *Jeśli $\mathbf{b} \subseteq \mathbf{H}$ to afiniczna prosta, o kierunku $\mathbf{b}$ jest regularna. Jeśli $\mathbf{b} \not\subseteq \mathbf{H}$, to prosta afiniczna przechodząca przez $\mathbf{b}$ nie jest regularna.*

DOWÓD. Niech $\mathbf{b} \subseteq \mathbf{H}$. Rozważmy rzutową prostą l przechodzącą przez $\mathbf{b}$. Albo l leży na horyzoncie $\mathbf{H}$, ale wtedy nie wyznaczymy prostej afinicznej, albo l przecina $\mathbf{H}$ w punkcie. Tym punktem jest $\mathbf{b}$. Gdyby $l \subseteq \mathbf{b}^\perp = \mathbf{H}$, to l nie wyznacza prostej afinicznej. Tak więc $l \not\subseteq \mathbf{b}^\perp$ i z 2.7 l jest regularna.

Niech $\mathbf{b} \not\subseteq \mathbf{H}$. Rozważmy rzutową prostą l przechodzącą przez $\mathbf{b}$. Prosta l wyznacza prostą afiniczną i $l^\infty = l \cap \mathbf{H} =: p$. Zauważmy, że $p \subseteq \mathbf{H}$ więc $p \perp \mathbf{b}$ oraz $p \perp p$. Zatem $l \subseteq p^\perp$ i z 2.7 l nie jest regularna. □

Szczególnym przypadkiem twierdzenia 2.5 jest następujący:

Lemat 2.10. *Niech U będzie płaszczyzną nie zawierającą się w $\mathbf{H}$ i niech $l = U \cap \mathbf{H}$. Zatem l jest prostą. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *płaszczyzna U jest regularna,*

(2) *$U \cap l^\perp$ jest punktem,*

(3) *prosta l jest regularna w symplektycznej geometrii rzutowej.*

Uwaga. Niech U będzie płaszczyzną nie zawierającą się w $\mathbf{H}$. Jeśli $\mathrm{Hrd}(U)$ jest punktem p nie należącym do $\mathbf{H}$, wtedy U jest regularna.

Rozdział 3

Grassmanniany regularnych punktów i prostych

Strukturę regularnych punktów i prostych z pseudobiegunowością $\perp$ będziemy oznaczali przez
$$\mathbf{G}_1(\mathcal{R}) := \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \subset \rangle.$$
Pierwsze spostrzeżenie jest takie, że zbiór $\mathcal{R}_1$ jest punktowym dopełnieniem hiperpłaszczyzny H. Weźmy
$$\mathfrak{A} = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{L} \rangle,$$
gdzie
$$\mathcal{L} = \{l \in \mathrm{Sub}_2(V) : l \not\subseteq \mathsf{H}\},$$
będącą przestrzenią afiniczną pochodzącą od $\mathbf{P}(V)$ przez usunięcie hiperpłaszczyzny rzutowej H. Przez $\mathcal{L}_r$ oznaczmy zbiór regularnych prostych niezawierających się w H,
$$\mathcal{L}_r = \{l \in \mathcal{R}_2 : l \not\subseteq \mathsf{H}\} = \{l \in \mathcal{R}_2 : l \in \mathcal{L}\} \subset \mathcal{L}.$$
Zauważmy, że $\mathbf{G}_1(\mathcal{R})$ nie jest częściową przestrzenią prostych gdyż na prostej $l \in \mathcal{R}_2$ takiej, że $l \subseteq \mathsf{H}$ nie ma punktów z $\mathcal{R}_1$. Jeśli $\mathsf{b} \not\subseteq \mathsf{H}$, wtedy b jest punktem z $\mathfrak{A}$, ale dodatkowo jest izolowany w $\mathbf{G}_1(\mathcal{R})$, ponieważ, żadna regularna prosta nie przechodzi przez b (por. 2.9). Przez $\mathfrak{B}$ będziemy oznaczać strukturę powstałą z $\mathbf{G}_1(\mathcal{R})$ przez usunięcie izolowanych punktów i prostych. Wtedy
$$\mathfrak{B} = \begin{cases} \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{L}_r, \subset \rangle, \text{ gdy } \mathsf{b} \subseteq \mathsf{H}, \\ \langle \mathcal{R}_1 \setminus \{\mathsf{b}\}, \mathcal{L}_r, \subset \rangle, \text{ gdy } \mathsf{b} \not\subseteq \mathsf{H} \end{cases}$$
jest podstrukturą $\mathfrak{A}$.

3.1 Rekonstrukcja geometrii afinicznej

Stwierdzenie 3.1. *Na płaszczyźnie U w $\mathfrak{A}$ przez każdy punkt z U^∞ przechodzi nieregularna prosta.*

Dowód. Niech $p \subseteq U^\infty$. Ponieważ $p^\perp$ jest hiperpłaszczyzną w V i $U \nsubseteq \mathbf{H}$ to $U \cap p^\perp$ jest hiperpłaszczyzną w U. Oznacza to, że $U \cap p^\perp$ jest prostą rzutową. Ponieważ p jest na $\mathbf{H}$, co równoważne jest, że $p \subseteq p^\perp$, więc $p \subseteq U \cap p^\perp$. Zatem $U \cap p^\perp$ jest prostą przechodzącą przez p na U. Dla dowolnego punktu $q \subseteq U \cap p^\perp$ mamy oczywiście $q \subseteq p^\perp$ co oznacza, że $p \subseteq \mathrm{Rad}(U \cap p^\perp)$ i kończy dowód. □

Stwierdzenie 3.1 można wysłowić inaczej: na płaszczyźnie afinicznej, w każdym kierunku tej płaszczyzny istnieje prosta nieregularna.

Stwierdzenie 3.2. *Jeśli płaszczyzna U w $\mathfrak{A}$ zawiera dwie równoległe nieregularne proste k, l to $k^\infty = l^\infty = \mathrm{Rad}(U)$ i w konsekwencji U jest nieregularna.*

Dowód. Weźmy dwie nieregularne proste $k, l \subset U$, takie, że $k \| l$. Wyznaczmy horyzonty tych prostych. Zatem $k^\infty = l^\infty =: p$. Ponieważ proste k, l są nieregularne to $\mathrm{Rad}(k) = p = \mathrm{Rad}(l)$. Zatem $p \perp k, l$. Więc z 1.24(v) wynika, że $p \perp k + l$. Ale $k + l = U$. Czyli $p \subseteq \mathrm{Rad}(U)$, co daje nam, że podprzestrzeń U jest nieregularna. □

Stwierdzenie 3.3. *Jeśli płaszczyzna U w $\mathfrak{A}$ zawiera trójkąt o nieregularnych bokach to $\mathrm{Rad}(U) = U^\infty$ oraz na U nie ma regularnych prostych afinicznych.*

Dowód. Niech l_1, l_2, l_3 będą nieregularnymi bokami oraz niech a_1, a_2, a_3 będą wierzchołkami trójkąta na U takimi, że $a_i \nsubseteq l_i$. Oznaczmy $p_i := \mathrm{Rad}(l_i) = l^\infty = l_i \cap \mathbf{H}$. Zatem $p_i \perp l_i$. Możemy teraz wypisać kolejno prostopadłości:

$$p_1 \perp a_2, a_3, \qquad p_2 \perp a_1, a_3, \qquad p_3 \perp a_1, a_2.$$

Co daje nam od razu kolejne prostopadłości:

$$a_1 \perp p_2, p_3, \qquad a_2 \perp p_1, p_3, \qquad a_3 \perp p_1, p_2.$$

Korzystając z 1.24(v) mamy:

$$a_1 \perp p_2 + p_3, \qquad a_2 \perp p_1 + p_3, \qquad a_3 \perp p_1 + p_2.$$

Ale $p_2 + p_3 = p_1 + p_3 = p_1 + p_2 = U^\infty$, oraz $a_1 + a_2 + a_3 = U$. Znowu z 1.24(v) otrzymaliśmy, że $U \perp U^\infty$. Stąd mamy $U^\infty \subseteq U$ oraz $U^\infty \subseteq U^\perp$, co daje, że $U^\infty \subseteq \mathrm{Rad}(U)$. Gdyby inkluzja była ostra, oznaczałoby to, że $2 = \dim(U^\infty) < \mathrm{rdim}(U)$. Czyli $\mathrm{rdim}(U) = 3 = \dim(U)$. Ale z tego mamy, że $U = \mathrm{Rad}(U)$, a to oznacza, że $U \subseteq \mathbf{H}$ co daje sprzeczność z założeniem. Zatem $U^\infty = \mathrm{Rad}(U)$.

Weźmy prostą $l \subseteq U$, byle tylko $l \nsubseteq \mathbf{H}$. Prosta l przecina U^∞ w punkcie, nazwijmy go p. Stąd $p \subseteq \mathrm{Rad}(U)$ czyli $p \perp U \supseteq l$. Więc z 2.7 prosta l nie jest regularna i dowód jest skończony. □

Stwierdzenie 3.4. *Niech U będzie płaszczyzną w $\mathfrak{A}$ i niech $l = U^\infty$. Możliwe są następujące przypadki:*

(i) l jest regularna. Wtedy U jest regularna, czyli $\mathrm{Hrd}(U)$ *jest jakimś afinicznym punktem p z U. Prosta $m \in \mathcal{L}$ zawierająca się w U jest nieregularna wtedy i tylko wtedy, gdy $p \subseteq m$.*

(ii) l jest izotropowa oraz zachodzą w tym przypadku dwie możliwości:

- $l = \mathrm{Rad}(U)$, *czyli $l \perp U$. Wtedy U nie jest regularna i nie zawiera żadnej regularnej prostej. W tym przypadku* $\mathrm{Hrd}(U) = U$.
- $l \neq \mathrm{Rad}(U)$. *Wtedy* $\mathrm{Rad}(U) = q$ *jest punktem z l. Prosta $m \in \mathcal{L}$ zawierającą się w U jest nieregularna wtedy i tylko wtedy, gdy $q \subseteq m$. Teraz,* $\mathrm{Hrd}(U) = l$.

DOWÓD. Ponieważ $l \subseteq \mathbf{H}$, więc z wniosku 2.7 wynika, że $\mathrm{Rad}(l) = \Theta$ albo $\mathrm{Rad}(l) = l$, czyli zostały tutaj jedynie dwa wymienione przypadki z trzech i aby dowieść to twierdzenie należy zająć się charakteryzacją nieregularnych prostych z U.

(i) l jest regularna

Na mocy 2.10 płaszczyzna U jest regularna. Z 2.5 $\mathrm{Hrd}(U)$ jest punktem rzutowym p spoza $\mathbf{H}$, czyli jest punktem afinicznym. Zatem $p = U \cap (U \cap \mathbf{H})^\perp = U \cap l^\perp$.

Jeśli jakaś prosta m na U przechodzi przez p to przecina l w jakimś punkcie $q \neq p$. Ponieważ $q \subseteq \mathbf{H}$ czyli $q \perp q$, oraz $p \perp l$, a w szczególności $p \perp q$, więc $q \perp \overline{p\,q} = m$. Tym samym $q \subseteq \mathrm{Rad}(m)$ i m nie jest regularna.

Załóżmy teraz, że prosta m jest nieregularna, ale nie przechodzi przez p. Prosta m przecina prostą l w pewnym punkcie q. Rozważmy prostą $k = \overline{p\,q}$. Zauważmy, że $m^\infty = q = k^\infty$, czyli $m \parallel k$. Prosta k przechodzi przez p, więc z tego co wyżej udowodniliśmy jest nieregularna. Mamy zatem dwie różne, równoległe i nieregularne proste m, k na U. Z 3.2 wynika, że $q \subseteq \mathrm{Rad}(U)$, co oznacza, że U jest nieregularna i otrzymaliśmy sprzeczność.

(ii) l jest izotropowa

Rozważmy pierwszy przypadek, gdy $\mathrm{Rad}(U) = l$. Wówczas rzeczywiście $l \perp U$, i oczywiście U nie jest regularna. Dowolna prosta m z U przecina prostą l w jakimś punkcie q. Wiemy z 1.24(iii), że $q \perp U$, w szczególności $q \perp m$ a więc $q \subseteq \mathrm{Rad}(m)$ i z dowolności wyboru m żadna prosta na U nie jest regularna.

Zobaczmy, że

$$\mathrm{Hrd}(U) = U \cap (U \cap \mathbf{H})^\perp = U \cap l^\perp = U$$

jako, że $U \subseteq l^\perp$.

Teraz rozpatrzmy przypadek drugi, gdy $\mathrm{Rad}(U) \neq l$. $\mathrm{Rad}(U) \subseteq \mathbf{H}$ więc albo $\mathrm{Rad}(U) = \Theta$ albo $\mathrm{Rad}(U)$ jest punktem q z prostej l. W sytuacji gdy

$\mathrm{Rad}(U) = \Theta$, z 2.5 mamy punkt $p = \mathrm{Hrd}(U) = U \cap l^{\perp}$. Dowolnego punktu $q \subseteq l$ mamy $p \perp q$. Ponadto $q \perp l$ bo l jest izotropowa a więc $q \perp l + p = U$ z 1.24(v). Co oznacza, że $q \in \mathrm{Rad}(U)$ i otrzymujemy sprzeczność. Tak więc $\mathrm{Rad}(U) = q$ jest punktem na l.

Dla prostej m z U przechodzącej przez q oczywiście $q \perp m$ bo $q \perp U$ i w konsekwencji $q \in \mathrm{Rad}(m)$, co znaczy, że m jest nieregularna.

Na odwrót, rozważmy prostą nieregularną m na U. $\mathrm{Rad}(m) = r$ jest punktem i musi zachodzić $r \subseteq \mathbf{H}$, a więc $r \subseteq U \cap \mathbf{H} = l$. Przypuśćmy, że $q \not\subseteq m$. Wówczas $r \perp q+m = U$ daje nam $r \subseteq \mathrm{Rad}(U)$ czyli $q = r \subseteq m$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Musi zatem być $q \subseteq m$.

Na koniec przeliczmy

$$\mathrm{Hrd}(U) = U \cap (U \cap \mathbf{H})^{\perp} = U \cap l^{\perp}.$$

Prosta l jest izotropowa więc $l \subseteq U \cap l^{\perp}$, zatem $\mathrm{Hrd}(U)$ jest co najmniej prostą l. dyby $\mathrm{Hrd}(U)$ było większe, a więc płaszczyzną U, czyli $U = U \cap l^{\perp}$ to $U \subseteq l^{\perp}$. Stąd $l \subseteq U \cap U^{\perp} = \mathrm{Rad}(U)$, sprzeczność z założeniem, że $\mathrm{Rad}(U) = q$. Ostatecznie $\mathrm{Hrd}(U) = l$.

□

Na mocy 3.4 możemy twierdzić, że na płaszczyźnie afinicznej U takiej, że $\mathrm{rdim}(U) \leqslant 1$, wszystkie proste nieregularne tworzą pęk. Wierzchołek tego pęku będziemy oznaczać $\mathbf{q}(U)$. Następny fakt niżej mówi o tym wierzchołku.

Stwierdzenie 3.5. *Niech U będzie płaszczyzną w $\mathfrak{A}$, taką że* $\mathrm{rdim}(U) \leqslant 1$.

- $\mathbf{q}(U)$ *jest punktem afinicznym, gdy* $\mathrm{rdim}(U) = 0$.
- $\mathbf{q}(U)$ *jest punktem niewłaściwym na U^{∞}, gdy* $\mathrm{rdim}(U) = 1$.

Dowód. Dowód tego stwierdzenia jest bezpośrednią konsekwencją 3.4. □

Lemat 3.6. *Zakładamy, że proste z $\mathbf{P}(V)$ mają rząd co najmniej 4.*

Niech m_1, m_2 będą dwiema regularnymi równoległymi prostymi z $\mathcal{L}$ i niech U będzie afiniczną płaszczyzną zawierającą te proste. Wtedy U jest regularna albo $\mathrm{Rad}(U)$ *jest punktem. W obu przypadkach U zawiera parę regularnych prostych k_1, k_2, które przecinają się w afinicznym punkcie oraz k_i przecina się z m_j w afinicznym punkcie dla wszystkich i, j.*

Dowód. Niech a_1 będzie jakimś punktem z m_1. Rozważmy prostą k_0 łączącą a_1 z wierzchołkiem $\mathbf{q}(U)$ pęku prostych nieregularnych na U. Niech $y = m_2 \cap k_0$ i a_2 będzie afinicznym punktem z m_2 różnym od y. Weźmy $k_1 = \overline{a_1, a_2}$. Niech $b \in k_1$ będzie afinicznym punktem różnym od a_1, a_2 i niech $k_2 = \overline{b, y}$. Prosta k_2 przecina prostą m_1 na mocy (AVC). □

Twierdzenie 3.7. *Równoległość regularnych prostych w terminach $\mathfrak{B}$ definiujemy następująco:*

$$\begin{aligned} m_1 \| m_2 \Leftrightarrow\ & (\exists\ k_1, k_2)(\exists\ p, a_1, a_2, b_1, b_2) \\ & [k_1 \neq k_2 \wedge p \mathrm{\ I\ } k_1, k_2 \wedge a_1 \mathrm{\ I\ } k_1, m_1 \wedge a_2 \mathrm{\ I\ } k_1, m_2 \wedge b_1 \mathrm{\ I\ } k_2, m_1 \\ & \wedge b_2 \mathrm{\ I\ } k_2, m_2 \wedge p \not\mathrm{I}\ m_1, m_2] \wedge \neg \exists\ a[a \mathrm{\ I\ } m_1, m_2] \end{aligned} \tag{3.1}$$

Lemat 3.8. *Niech U będzie płaszczyzną afiniczną z* $\mathrm{rdim}(U) \leqslant 1$. *Wtedy U zawiera trójkąt o regularnych bokach. Jeśli założymy dodatkowo, że rząd prostej w $\mathbf{P}(V)$ jest co najmniej* 5 *to wówczas przez każdy afiniczny punkt z U różny od $\mathbf{q}(U)$ przechodzi regularna prosta przecinająca boki tego trójkąta w co najmniej dwóch afinicznych punktach.*

DOWÓD. Z uwagi na 3.4 nieregularne proste z U tworzą pęk z wierzchołkiem $\mathbf{q}(U)$: właściwym gdy $\mathrm{rdim}(U) = 0$ albo niewłaściwym gdy $\mathrm{rdim}(U) = 1$. W taki sposób istnienie wymaganego trójkąta jest oczywiste. Niech a_1, a_2, a_3 będą wierzchołkami tego trójkąta i x będzie dowolnym afinicznym punktem z U. Jedyne proste przez x, które nie przecinają naszego trójkąta w żądany sposób to: $\overline{x, a_1} \parallel \overline{a_2, a_3}$, $\overline{x, a_2} \parallel \overline{a_1, a_3}$, $\overline{x, a_3} \parallel \overline{a_1, a_2}$ i $\overline{x, \mathbf{q}(U)}$. Korzystając z 1.15 w $\mathfrak{A}$ wszystkie proste przechodzące przez a_i, równoległe do $\overline{a_j, a_k}$ dla $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ są współpękowe i potencjalnie przechodzą przez x. Z założenia przez x przechodzi co najmniej 5 prostych. Eliminując 4 z nich pozostaje jeszcze jedna, wymagana prosta. □

Definicja 3.9. Niech $\triangle$ będzie trójkątem w $\mathfrak{B}$ o bokach l_1, l_2, l_3. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} \pi(\triangle) := \{x : (\exists\ k)(\exists\ a, b) & \\ & [x, a, b \mathrm{\ I\ } k \wedge a \neq b \wedge ((a \mathrm{\ I\ } l_1, b \mathrm{\ I\ } l_2) \\ & \vee (a \mathrm{\ I\ } l_2 \wedge b \mathrm{\ I\ } l_3) \vee (a \mathrm{\ I\ } l_1, b \mathrm{\ I\ } l_3))]\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Niech $\mathcal{P}$ będzie zbiorem płaszczyzn w $\mathfrak{A}$ i $\mathcal{P}_i$ będzie zbiorem płaszczyzn w $\mathcal{P}$ z $\mathrm{rdim} = i$. Wtedy

$$\mathcal{P}_{01} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$$

jest zbiorem płaszczyzn z $\mathrm{rdim} \leqslant 1$. Dla $U \in \mathcal{P}_{01}$ oznaczamy przez

$$[U] = \mathcal{R}_1(U) \backslash \{\mathbf{q}(U)\}.$$

Jeśli $U \in \mathcal{P}_1$ wtedy $[U] = \mathcal{R}_1(U)$. Jeśli $U \in \mathcal{P}_0$ wtedy $[U]$ jest afiniczną płaszczyzną z usuniętym jednym punktem. Gdy $F \neq \mathbf{GF}(2)$ to

$$\{[U] : U \in \mathcal{P}_{01}\} = \{\pi(\triangle) : \triangle \text{ jest trójkątem w } \mathfrak{B}\}.$$

Lemat 3.10. *Niech $l \in \mathcal{L}$ będzie prostą nieregularną, $a \subseteq l$ będzie afinicznym punktem i niech $l^\infty =: p$. Niech $U \in \mathcal{P}_{01}$ zawiera l i niech $m := U^\infty$. Wtedy zachodzi jedna z dwu możliwości:*

(i) *$m \cap p^{\perp} = p$ ($m \not\subseteq p^{\perp}$). W tym przypadku m jest prostą regularną, więc również U jest regularna.*

Daje to nam, że $\mathbf{q}(U) \subseteq l$, więc $m \subseteq \mathbf{q}(U)^{\perp}$. Aby $a \neq \mathbf{q}(U)$ musi być $m \not\subset a^{\perp}$.

(ii) *$m \subseteq p^{\perp}$, $m \not\perp l$ i albo $\mathbf{b} \subseteq \mathbf{H}$, albo $\mathbf{b} \not\subseteq l$.*

Dowód. Skoro p jest punktem to $p^{\perp}$ jest hiperpłaszczyzną i prosta m leży na $p^{\perp}$ albo przecina $p^{\perp}$ w punkcie.

(i) Dowód wynika bezpośrednio ze stwierdzenia 3.4.

(ii) Wiemy, że $m \subseteq \mathbf{H}$, $m \subseteq p^{\perp}$ oraz $p \subset m$. Biorąc dowolny punkt $x \subset m$ mamy albo $p = x$ i wtedy $x \subseteq m^{\perp}$, albo $p \neq x$, a wtedy $x \perp x$ oraz $x \perp p$, co daje $x \subseteq m^{\perp}$, na mocy 1.24(v), bo $m = \overline{p,x}$. Zatem z dowolności wyboru x mamy $m \subseteq m^{\perp}$, czyli prosta m jest izotropowa. Gdy $m \perp l$ to wówczas $m \perp m + l = U$, a zakładaliśmy, że $\operatorname{rdim}(U) \leqslant 1$, więc $m \not\perp l$.

Załóżmy teraz, że $\mathbf{b} \not\subseteq \mathbf{H}$ i $\mathbf{b} \subseteq l$. Nie może być $p = \mathbf{b}$ z uwagi na nasze założenia, że $p = l^{\infty} \subset \mathbf{H}$. Zatem $l = \overline{p,\mathbf{b}} = p + \mathbf{b}$. Zgodnie z 1.24(viii) mamy

$$l^{\perp} = p^{\perp} \cap \mathbf{b}^{\perp} = p^{\perp} \cap \mathbf{H},$$

ale ponieważ $m \subseteq p^{\perp} \cap \mathbf{H}$, więc $m \perp l$. To kończy dowód na mocy prawa kontrapozycji. □

Lemat 3.11. *Załóżmy, że proste z $\mathbf{P}(V)$ mają rząd co najmniej 5. Jeśli l jest nieregularną prostą oraz a_1, a_2, a_3 są afinicznymi punktami takimi, że $\mathbf{b} \neq a_1, a_2, a_3 \subset l$, to istnieją różne płaszczyzny afiniczne $U_1, U_2 \in \mathcal{P}_{01}$ takie, że $a_1, a_2, a_3 \in [U_1] \cap [U_2]$.*

Dowód. Niech $p := l^{\infty}$. Z uwagi na 3.10 wystarczy znaleźć dwie proste $m_1, m_2 \subset \mathbf{H}$, takie by $m_1, m_2 \not\subset p^{\perp}, a_1^{\perp}, a_2^{\perp}, a_3^{\perp}$. □

Zauważmy, że założenie o rzędzie prostych jest istotne. Hiperpłaszczyzny $p^{\perp}, a_1^{\perp}, a_2^{\perp}, a_3^{\perp}$ tworzą pęk, bo mają wspólny następnik V oraz wspólny poprzednik $l^{\perp}$. Taki pęk po zdualizowaniu jest z dokładnością do izomorfizmu prostą rzutową. Muszą być na niej co najmniej 4 punkty, zatem F musi być co najmniej $\mathbf{GF}(4)$, wówczas proste są rzędu co namniej 5.

Twierdzenie 3.12. *Jeśli ciało F ma co najmniej 4 elementy, to afiniczna przestrzeń $\mathfrak{A}$ jest definiowalna w terminach geometrii $\mathfrak{B}$ i w konsekwencji $\mathbf{P}(V)$ jest definiowalna w terminach $\mathfrak{B}$.*

Dowód. Bezpośrednią konsekwencją 3.11 jest, że relacja współliniowości na zbiorze punktów afinicznych różnych od $\mathbf{b}$ jest definiowalna w terminach geometrii $\mathfrak{B}$. Niech $\mathcal{L}_0$ będzie zbiorem klas równoważności tej relacji. Jeśli $\mathbf{b}$ jest punktem niewłaściwym to mamy koniec, bo $\mathcal{L}_0$ składa się z afinicznych nieregularnych prostych.

Zakładamy, że $\mathbf{b}$ jest punktem afinicznym, tzn. $\mathbf{b} \not\subset \mathbf{H}$. Wtedy $\mathcal{L}_0$ składa się z nieregularnych prostych nie zawierających $\mathbf{b}$ i zbiorów postaci $l \backslash \mathbf{b}$, gdzie l jest prostą nieregularną przechodzącą przez $\mathbf{b}$. Rozważmy incydencyjną strukturę

$$\mathfrak{B}' := \langle S \backslash \mathbf{H}, \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_r \rangle.$$

Dla każdego trójkąta $\triangle$ z $\mathfrak{B}$ otrzymujemy zbiór

$$\pi'(\triangle) = \bigcup \{ l \in \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_r \colon |\pi(\triangle) \cap l| \geqslant 2 \}.$$

Weźmy $l \in \mathcal{L}_0$. jeśli wszystkie zbiory $\pi'(\triangle)$ zawierające l^* są afinicznymi płaszczyznami w $\mathfrak{B}'$, to l^* jest kompletną prostą i piszemy $l' = l^*$. W przeciwnym razie $l' := l^* \cup \{\mathbf{b}\}$. Wtedy $\mathcal{L}_0' := \{ l' : l \in \mathcal{L}_0 \}$ jest zbiorem nieregularnych prostych w $\mathfrak{A}$ i $\mathcal{L} = \mathcal{L}_r \cup \mathcal{L}_0'$. □

3.2 Niewykonalność rekonstrukcji geometrii rzutowo-metrycznej

Dla dowolnego zbioru $\mathcal{X}$ afinicznych punktów przez $\overline{\mathcal{X}}$ oznaczamy najmniejszą podprzestrzeń w $\mathbf{P}(V)$ zawierającą $\mathcal{X}$.

Lemat 3.13. *Załóżmy, że $F \neq \mathbf{GF}(2)$. Weźmy $q \in \mathbf{H}$. Wtedy zbiór*

$$[q] := \{ a : a \textit{ jest punktem w } \mathfrak{A},\ \overline{a, q} \notin \mathcal{L}_r \}$$

jest zbiorem afinicznych punktów na $q^\perp$ oraz $\overline{[q]} = q^\perp$.

Podobnie, jeśli a jest punktem w $\mathfrak{A}$, wtedy zbiór $[a] = \{ k^\infty : a \mid k,\ k \in \mathcal{L} \backslash \mathcal{L}_r \}$ koincyduje ze zbiorem $\mathrm{Sub}_1(a^\perp \cap \mathbf{H})$, ale nie ze zbiorem $a^\perp$.

Twierdzenie 3.14. *Jeśli $F \neq \mathbf{GF}(2)$ to wówczas rzutowa przestrzeń metryczna $\langle \mathbf{P}(V), \perp \rangle$ nie jest definiowalna w terminach geometrii $\mathfrak{B}$.*

Dowód. Niech $\mathbf{b} = \langle e_0 \rangle$ dla pewnego wektora e_0. Są dwie możliwości do rozpatrzenia.

• $\mathbf{b} \nsubseteq \mathbf{H}$: Niech $\xi_{\mathbf{H}}$ będzie ograniczeniem ξ do $\mathbf{H}$. Wtedy $\xi_{\mathbf{H}}$ jest niezdegenerowaną formą symplektyczną. Oznaczmy $\varepsilon = \xi(e_0, e_0)$. Niech $e_1, ..., e_n$ będzie bazą w $\mathbf{H}$. Wtedy rodzina $\mathcal{E} = (e_i, i = 0, ..., n)$ jest bazą w V. Mamy $\mathbf{b} \perp \langle h \rangle$ dla wszystkich $h \in \mathbf{H}$ i w ten sposób formę ξ można wyrazić za pomocą poniższej formuły:

$$\xi(h_1 + \alpha_1 e_0, h_2 + \alpha_2 e_0) = \xi_{\mathbf{H}}(h_1, h_2) + \alpha_1 \alpha_2 \varepsilon, \tag{3.3}$$

gdzie $h_1, h_2 \in \mathbf{H}$ oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in F$. Odwrotnie, dla dowolnej niezdegenerowanej formy symplektycznej $\xi_{\mathbf{H}}$ określonej na $\mathbf{H}$ oraz dla dowolnego $\varepsilon \in F$ byle $\varepsilon \neq 0$

formuła (3.3) definiuje niezdegenerowaną formę dwuliniową $\xi = \xi_\varepsilon$. Jeśli M jest macierzą formy $\xi_{\mathbf{H}}$ w danej bazie, wtedy

$$\mathbf{M}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

jest macierzą formy ξ_ε i $\det(M_\varepsilon) \neq 0$. W szczególności, dla $h, h_1 \in \mathbf{H}$ i dla $\alpha \in F$ mamy:

$$\xi_\varepsilon(h_1, h + \alpha e_0) = \xi_\varepsilon(h_1, h) \quad \text{oraz} \quad \xi_\varepsilon(h + \alpha e_0, h + \alpha e_0) = \alpha^2 \varepsilon.$$

Biegunowość wyznaczoną przez ξ_ε będziemy oznaczać przez $\perp_\varepsilon$, natomiast strukturę regularnych punktów i prostych względem $\perp_\varepsilon$ będziemy oznaczać przez $\mathfrak{B}_\varepsilon$. Weźmy $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ będące skalarami różnymi od zera. Wtedy dla punktów rzutowych a, p, q takich, że $a \not\subseteq \mathbf{H}$, $p, q \subseteq \mathbf{H}$:

$$p \perp_{\varepsilon_1} q \Longleftrightarrow p \perp_{\varepsilon_2} q \tag{3.4}$$
$$\text{i} \;\; p \perp_{\varepsilon_1} a \Longleftrightarrow p \perp_{\varepsilon_2} a \tag{3.5}$$

Z (3.3),(3.4) i (3.5) wynika, że zbiór samosprzężonych punktów względem ξ_{ε_i} jest hiperpłaszczyzną $\mathrm{Sub}_1(\mathbf{H})$, oraz prosta w $\mathfrak{A}$ jest regularna względem $\perp_{\varepsilon_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona regularna względem $\perp_{\varepsilon_2}$. Daje to nam rezultat w postaci $\mathfrak{B}_{\varepsilon_1} = \mathfrak{B}_{\varepsilon_2}$.

Teraz weźmiemy takie $h_1, h_2 \in \mathbf{H}$, że $\xi_{\mathbf{H}}(h_1, h_2) \neq 0$. Niech $\varepsilon_1 = \xi_{\mathbf{H}}(h_1, h_2)$, $a_i = \langle h_i + e_0 \rangle$ dla $i = 1, 2$ i weźmy ε_2 będące niezerowym skalarem różnym od ε_1. Z (3.3) policzymy bezpośrednio, że

$$\xi_{\varepsilon_1}(a_1, a_2) = \xi_{\varepsilon_1}(h_1 + e_0, h_2 + e_0) = \xi_{\mathbf{H}}(h_1, h_2) + \varepsilon_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 = 0.$$

Zatem $a_1 \perp_{\varepsilon_1} a_2$ oraz podobnie dla

$$\xi_{\varepsilon_2}(a_1, a_2) = \xi_{\varepsilon_2}(h_1 + e_0, h_2 + e_0) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \neq 0,$$

bo $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, ale również $\varepsilon_2 \neq -\varepsilon_1 = \varepsilon_1$. Tak więc $a_1 \not\perp_{\varepsilon_2} a_2$. Zatem nie można zdefiniować $\perp_{\varepsilon_i}$ w terminach $\mathfrak{B}_{\varepsilon_i}$.

• **b** $\subseteq \mathbf{H}$: Weźmy $\omega \notin \mathbf{H}$. Forma $\xi_{\mathbf{H}}$ będzie zdegenerowaną formą symplektyczną. Niech $Y = \omega^\perp \cap \mathbf{H}$, wtedy $e_0, \omega \notin Y$. Niech $(e_1, ..., e_{n-1})$ będzie bazą w Y, wtedy $(e_0, ..., e_{n-1})$ będzie bazą w $\mathbf{H}$ oraz $(\omega, e_0, ..., e_{n-1})$ będzie bazą w V. Weźmy $y \in Y$, wtedy

$$\xi(y, \omega) = 0, \qquad \xi(y, e_0) = 0, \qquad \xi(e_0, e_0) = 0.$$

Weźmy dowolne dwa wektory $y_i + \alpha_i e_o + \beta_i \omega$, $(y_i \in Y, \alpha_i, \beta_i \in F, i = 1, 2)$ w V. Mamy:

$$\xi(y_1 + \alpha_1 e_o + \beta_1\omega, y_2 + \alpha_2 e_o + \beta_2\omega) = \\ \xi_0(y_1, y_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\lambda + \beta_1\beta_2\mu, \quad (3.6)$$

gdzie $\mu = \xi(\omega, \omega) \neq 0$, $\lambda = \xi(e_0, \omega) \neq 0$ oraz ξ_Y jest ograniczeniem ξ do Y.

Dla dowolnych skalarów $\mu, \lambda \neq 0$ niech $\xi_{\mu,\lambda,}$ będzie dwuliniową formą zdefiniowaną na V przez formułę (3.6). Weźmy M będące macierzą formy ξ_Y w podanej bazie, ξ_Y jest niezdegenerowaną formą symplektyczną. Wtedy

$$\mathbf{M}_{\mu,\lambda} = \begin{bmatrix} \mu & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & M & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

jest macierzą $\xi_{\mu,\lambda}$ w naszej bazie. Rzeczą jasną jest to, że $\det(M_{\mu,\lambda}) \neq 0$, zatem $\xi_{\mu,\lambda}$ jest niezdegenerowana.

Weźmy $\perp_{\mu,\lambda}$ będące biegunowością wyznaczoną przez formę $\xi_{\mu,\lambda}$ oraz niech $\mathfrak{B}_{\mu,\lambda}$ będzie indukowaną strukturą regularnych punktów i prostych względem $\xi_{\mu,\lambda}$.

Ponieważ $\xi_{\mu,\lambda}(\omega, \omega) \neq 0$, forma $\xi_{\mu,\lambda}$ nie jest symplektyczna. Mamy prosty rachunek $\xi_{\mu,\lambda}(y + \alpha e_0, y + \alpha e_0) = 0$, dla każdego $y \in Y$ i dla wszystkich skalarów α. W konsekwencji, H jest zbiorem izotropowych wektorów $\xi_{\mu,\lambda}$.

Na podstawie (3.6) obliczamy

$$\xi_{\mu,\lambda}(y_1 + \alpha_1 e_0, y_2 + \alpha_2 e_0) = \xi_Y(y_1, y_2)$$

$$\text{i } \xi_{\mu,\lambda}(y_1 + \alpha_1 e_0, y_2 + \alpha_2 e_0 + \beta\omega) = \xi_Y(y_1, y_2) + \lambda\alpha_1\beta$$

dla wszystkich $y_1, y_2 \in Y$ oraz $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in F$. To oznacza, że dla niezerowych skalarów $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ i punktów rzutowych a, p, q takich,że $a \not\subseteq \mathsf{H}$, $p, q \subseteq \mathsf{H}$:

$$p \perp_{\mu_1,\lambda_1} q \Longleftrightarrow p \perp_{\mu_2,\lambda_2} q \quad (3.7)$$

$$p \perp_{\mu_1,\lambda_1} a \Longleftrightarrow p \perp_{\mu_2,\lambda_2} a. \quad (3.8)$$

Weźmy jakieś $y_1, y_2 \in Y$ takie, że $\xi_Y(y_1, y_2) \neq 0$ i weźmy $\mu_1 = \xi_Y(y_1, y_2)$. Oznaczmy $a_i = \langle y_i + \omega \rangle$. Na koniec weźmy μ_1, μ_2 takie, że $\mu_2 \neq \mu_1$. Wtedy $\mathfrak{B}_{\mu_1,\lambda} = \mathfrak{B}_{\mu_2,\lambda}$; przeliczmy

$$\xi_{\mu_1,\lambda}(a_1, a_2) = \xi_{\mu_1,\lambda}(y_1 + \omega, y_2 + \omega) = \\ \xi_Y(y_1, y_2) + 0\lambda + \mu_1 = \mu_1 + \mu_1 = 2\mu_1 = 0,$$

a więc $a_1 \perp_{\mu_1,\lambda} a_2$ oraz podobnie

$$\xi_{\mu_2,\lambda}(a_1, a_2) = \xi_{\mu_2,\lambda}(y_1 + \omega, y_2 + \omega) = \xi_Y(y_1, y_2) + 0\lambda + \mu_2 = \mu_1 + \mu_2 \neq 0,$$

zatem $a_1 \not\perp_{\mu_2,\lambda} a_2$. W konsekwencji $\perp_{\mu_i,\lambda}$ nie można zdefiniować w $\mathfrak{B}_{\mu_i,\lambda}$. $\square$

Przypomnijmy, że $\mathcal{R}_k$ jest rodziną regularnych podprzestrzeni k-wymiarowych $\mathbf{P}(V)$. Bezpośrednią konsekwencją 2.5, 3.12, 3.13 są następujące wnioski:

Wniosek 3.15. *Dla wszystkich całkowitych k rodzina $\mathcal{R}_k$ jest definiowalna w $\mathfrak{B}$, przy założeniu, że pęki w $\mathbf{P}(V)$ są rzędu co najmniej 5.*

Regularna przestrzeń pęków to struktura postaci

$$\mathbf{P}_k(\mathcal{R}) = \langle \mathcal{R}_k, \mathcal{P}_k(\mathcal{R}) \rangle,$$

gdzie punktami są k-wymiarowe regularne podprzestrzenie a natomiast prostymi są regularne pęki, to znaczy pęki o regularnym wierzchołku i podstawie.

Wniosek 3.16. *Załóżmy, że pęki w $\mathbf{P}(V)$ są rzędu co najmniej 5. Jeśli $1 \leqslant k < \dim(V)$ dla całkowitego k to wyjściowa przestrzeń rzutowo-metryczna nie może być zdefiniowana w terminach struktury*

$$\mathbf{G}_k(\mathcal{R}) = \langle \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_{k+1}, \subset \rangle$$

ani w terminach struktury

$$\mathbf{P}_k(\mathcal{R}) = \langle \mathcal{R}_k, \mathcal{P}_k(\mathcal{R}) \rangle.$$

3.3 Automorfizmy

Z uwagi na 3.12, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$ jest podgrupą $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. Weźmy $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ oraz niech f^∞ będzie jego działaniem na horyzoncie $\mathrm{Sub}_1(\mathsf{H})$ w $\mathfrak{A}$. Jeśli $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$ to wtedy f^∞ będzie automorfizmem indukowanej rzutowo-metryczno-symplektycznej geometrii na H. Ponadto f musi zachowywać rodzinę hiperpłaszczyzn

$$\{[q] : q \in \mathsf{H}\}.$$

Rozpatrzmy teraz prosty, ale pożyteczny lemat:

Lemat 3.17. *Niech $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$,

(2) $f^\infty \in \mathrm{Aut}(\langle \mathsf{H}, \perp_{\mathsf{H}} \rangle)$ *i* (f, f^∞) *zachowuje* $\perp \cap (\mathfrak{R}_1 \times \mathsf{H})$.

DOWÓD. Wystarczy zauważyć, że f zachowuje klasę regularnych prostych wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje klasę nieregularnych prostych. Z 2.7(i) prosta $\overline{p, q}$, gdzie p jest regularnym punktem, a q punktem niewłaściwym, jest nieregularna wtedy i tylko wtedy, gdy $p \perp q$, co kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 3.18. *Zakładamy, że $\mathbf{b} \not\subseteq \mathsf{H}$. Niech ξ_{H} będzie obcięciem ξ do H. Wtedy ξ_{H} wyznacza $\perp_{\mathsf{H}}$ oraz*

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{B}) = \{\varphi \in \Gamma L(\mathsf{H}) : \varphi \text{ zachowuje } \perp_{\mathsf{H}}\}.$$

Dowód. Zauważmy, że przestrzeń afiniczna $\mathfrak{A}$ może być reprezentowana jako analityczna przestrzeń afiniczna $\mathbf{A}(\mathbf{H})$. Punkt $\mathbf{b}$ jest jednoznacznie wyznaczonym punktem przestrzeni $\mathfrak{A}$ takim, że każda prosta przez niego jest nieregularna. Dlatego punkt $\mathbf{b}$ jest niezmiennikiem automorfizmu przestrzeni $\mathfrak{B}$. W przestrzeni $\mathbf{A}(\mathbf{H})$ mamy odpowiednik $\mathbf{b}'$ punktu $\mathbf{b}$. Można dobrać układ współrzędnych $\mathbf{A}(\mathbf{H})$, tak aby $\mathbf{b}'$ był początkiem tego układu. Wówczas każdy automorfizm φ przestrzeni $\mathfrak{B}$ jest półliniową bijekcją na $\mathbf{H}$. Ponieważ $\mathbf{H}$ jest horyzontem przestrzeni $\mathfrak{A}$, to z 3.13 automorfizm φ zachowuje $\perp_{\mathbf{H}}$. Zastosowanie formuły (3.3) uzasadnia, że jeśli $\varphi \in \Gamma L(\mathbf{H})$ zachowuje biegunowość określoną na $\mathbf{H}$ przez formę symplektyczną $\xi_{\mathbf{H}}$, to wówczas φ zachowuje klasę prostych regularnych. W ten sposób dowód jest zakończony. $\square$

Dalej rozważamy przypadek gdy $\mathbf{b} \subset \mathbf{H}$ i korzystamy z rozkładu formy tak jak w 2.1.

Twierdzenie 3.19. *Zakładamy, że $\mathbf{b} \subset \mathbf{H}$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$,

(2) *Istnieje $\varphi \in \Gamma L(\mathbf{H})$ i wektor $\omega \in \mathbf{H}$ taki, że $f(p) = \varphi(p) + \omega$ dla wszystkich $p \in \mathbf{H}, \varphi$ zachowuje $\perp_{\mathbf{H}}$, i następnie mamy*

$$\xi_{\mathbf{H}}(p,q) = \pi_1(q) \Longrightarrow \xi_{\mathbf{H}}(\varphi(p),\varphi(q)) + \xi_{\mathbf{H}}(\omega,\varphi(q)) = \pi_1(\varphi(q)),$$

dla wszystkich $p, q \in \mathbf{H}$, gdzie π_1 jest rzutowaniem na pierwszą współrzędną.

Dowód. Jako szczególny przypadek automorfizmu przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ (por. 3.12) automorfizm f przestrzeni $\mathfrak{B}$ jest złożeniem półliniowego odwzorowania φ i translacji o wektor ω. W rzutowych współrzędnych możemy zapisać

$$f([1,p]) = [1, \varphi(p) + \omega] \qquad \text{i} \qquad f([0,q]) = [0, \varphi(q)].$$

Odwzorowanie f w takiej postaci jest automorfizmem $\mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy gdy zachowuje $\perp_{\mathbf{H}}$ oraz zachowuje regularne proste. Z 3.18 f zachowuje regularne proste wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje odpowiednie ograniczenie biegunowości. Aby dopełnić dowód należy przeliczyć:

$$\xi([1,p],[0,q]) = \xi_{\mathbf{H}}(p,q) + \pi_1(q),$$

dla wszystkich $p, q \in \mathbf{H}$. $\square$

Rozdział 4

Grassmanniany regularnych podprzestrzeni o wyższych wymiarach

4.1 Pęki prostych regularnych

W tym rozdziale zwrócimy uwagę na Grassmannian

$$\mathbf{G}_2(\mathcal{R}) = \langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \subset \rangle$$

regularnych prostych i płaszczyzn rzutowych.

Lemat 4.1. *Jeżeli l_1, l_2, l_3 są wierzchołkami trójkąta w $\mathbf{G}_2(V)$, to wówczas $\dim(l_1 \cap l_2 \cap l_3) = 1$.*

Dowód. Rozpatrzmy trójkąt o wierzchołkach l_1, l_2, l_3 w $\mathbf{G}_2(V)$. Odwołując się do [8, Lemat 1.9] wiemy, że wierzchołki mają albo wspólny poprzednik albo następnik w kracie wszystkich podprzestrzeni przestrzeni V. Gdyby miały wspólny następnik, to boki rozważanego trójkąta byłyby tym następnikiem, co daje sprzeczność z definicją trójkąta. Ostatecznie otrzymujemy, że l_1, l_2, l_3 mają wspólny poprzednik $l_1 \cap l_2 \cap l_3$, czyli $\dim(l_1 \cap l_2 \cap l_3) = 1$. $\square$

Fakt 4.2. *W $\mathbf{G}_2(V)$ rozważmy trójkąt o wierzchołkach l_0, l_1, l_2 oraz bokach U_0, U_1, U_2 takich, że $l_i \not\subset U_i$, $i = 0, 1, 2$. Proste rzutowe l_0, l_1, l_2 mają wspólny punkt rzutowy p oraz*

$$\Big\{ l \in \mathrm{Sub}_2(V) \colon (\exists\ U \in \mathrm{Sub}_3(V))\ [l \subset U_i, U\ \wedge\ l_i \subset U] \Big\} = \Big\{ l \in \mathrm{Sub}_2(V) \colon p \subset l \subset U_i \Big\} = \mathbf{p}(p, U_i) \in \mathcal{P}_2(V). \quad (4.1)$$

Fakt 4.3. *Relacja*

$$\mathbf{L}_{\mathbf{P}(V)}(l_1, l_2, l_3) \Leftrightarrow (\exists\ l_0 \in \mathrm{Sub}_2(V))(\exists\ U_0, U_1, U_2, U_3 \in \mathrm{Sub}_3(V)) \left[l_0 \not\subset U_0\ \wedge\ \bigwedge_{i=1}^{3} (l_i \subset U_0, U_i\ \wedge\ l_0 \subset U_i) \right], \quad (4.2)$$

gdzie l_1, l_2, l_3 są dowolnymi prostymi rzutowymi, pokrywa się z relacją współpękowości w $\mathbf{P}_2(V)$.

Lemat 4.4. *Niech $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$ oraz $k \geqslant 3$. Jeśli U zawiera izotropową podprzestrzeń wymiaru $k-2$ to jest nieregularne.*

Dowód. Niech W będzie izotropową podprzestrzenią wymiaru $k-1$ w U. Istnieje wówczas rzutowy punkt p taki, że $U = p \oplus W$. Zauważmy, że $p^\perp$ jest hiperpłaszczyzną w V. Zatem $W \cap p^\perp$ jest hiperpłaszczyzną w W albo $W \subset p^\perp$. W pierwszym przypadku mamy $\dim(W \cap p^\perp) = k-2 \geqslant 1$ z założenia, że $k \geqslant 3$. W drugim przypadku $\dim(W \cap p^\perp) = \dim W = k-1$. W obu przypadkach możemy wziąć taki punkt rzutowy q, że $q \subseteq W \cap p^\perp$. Ponieważ $W \perp W$, więc w szczególności $q \perp W$. Ponadto $q \perp p$. Zatem $q \perp p \oplus W = U$, co oznacza, że $q \subseteq \mathrm{Rad}\, U$, a więc U jest nieregularne. □

Lemat 4.5. *Jeśli $U \in \mathrm{Sub}_3(V)$ oraz $U \subseteq \mathsf{H}$, to U jest nieregularne.*

Dowód. Niech p będzie dowolnym punktem rzutowym na U. Jeśli $p \subseteq \mathrm{Rad}\, U$ to dowód jest zakończony. W przeciwnym razie zauważmy, że $U \cap p^\perp$ jest hiperpłaszczyzną w U, a dokładniej $\dim(U \cap p^\perp) = 2$. Możemy zatem wziąć drugi punkt rzutowy $q \neq p$ taki, że $q \subseteq U \cap p^\perp$. Ponieważ $p \perp p$, $q \perp q$ oraz $p \perp q$, więc z 1.24 (xi) mamy $p+q \perp p+q$, ale $p+q = U \cap p^\perp$. Teraz z lematu 4.4 dowód jest zakończony. □

Lemat 4.6. *Niech $U \in \mathcal{R}_3$ i niech p będzie punktem rzutowym na U.*

(i) *Jeśli $p = \mathbf{q}(U)$, to $\mathbf{p}(p, U) \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$.*

(ii) *Jeśli $p \neq \mathbf{q}(U)$, to $\mathbf{p}(p, U) \cap \mathcal{R}_2 = \mathbf{p}(p, U) \setminus \overline{p, \mathbf{q}(U)}$.*

Pokażemy teraz, że rodzina pęków regularnych jest definiowalna w $\mathbf{G}_2(\mathcal{R})$.

Stwierdzenie 4.7. *Zakładamy, że $F \neq \mathbf{GF}(2)$. Weźmy relację $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\mathcal{R}}$ zdefiniowaną formułą* (4.2)*, w której* $\mathrm{Sub}(V)$ *zastępujemy przez* $\mathcal{R}$. *Niech $l_1, l_2, l_3 \in \mathcal{R}_2$. Relacja $\mathbf{L}(l_1, l_2, l_3)$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $l_1, l_2, l_3 \in \mathbf{p}(p, U)$ dla pewnego punktu p i pewnej płaszczyzny $U \in \mathcal{R}_3$.*

Dowód. $\Rightarrow$: Oczywiste z uwagi na 4.2.

$\Leftarrow$: Niech $U \in \mathcal{R}_3$, niech p będzie punktem z U i niech l_1, l_2, l_3 będą trzema parami różnymi regularnymi prostymi na U przechodzącymi przez p. Oznaczmy $m = U^\infty$. Z uwagi na 2.7(i) mamy dwie możliwości, albo m jest regularna albo izotropowa. Prosta m nie może być jednak izotropowa ze względu na lemat 4.4, bo wówczas U byłoby nieregularne. Tak więc $m \in \mathcal{R}_2$.

Aby skończyć ten dowód musimy znaleźć regularną prostą l_0 przechodzącą przez p, ale nie na U. Pomysł jest taki, aby podprzestrzenie

$$U_1 = l_0 + l_1, \qquad U_2 = l_0 + l_2, \qquad U_3 = l_0 + l_3$$

były regularne. W tym celu musimy rozpatrzyć trzy następujące możliwości.

(1°) p jest punktem afiniczny (właściwy).

Wiemy, że $m \cap m^{\perp} = \Theta$. Oznaczmy $q_i = m \cap l_i$ dla $i = 1, 2, 3$. Ponieważ prosta l_i jest regularna oraz $q_i \perp q_i$ więc $q_i \not\subseteq p^{\perp}$ dla wszystkich $i = 1, 2, 3$. W ten sposób po pierwsze: $p \not\perp m$, po drugie: przecięcie prostej m z hiperpłaszczyzną $p^{\perp}$ jest punktem q_0 różnym od q_1, q_2 i q_3.

Niech x będzie punktem z m różnym od q_i, gdzie $i = 0, 1, 2, 3$ i niech y będzie takim punktem z $(m^{\perp} \cap \mathbf{H}) + x$, że $y \neq x$ oraz $y \notin m^{\perp}$. Zauważmy, że y musi leżeć na prostej $\overline{x, z} = x + z$, gdzie z jest punktem na $m^{\perp}$ jednoznacznie określonym przez wybór y. Zauważmy również, że nie może być $y \subset m$, bo gdyby tak, to

$$z \subset \overline{x, y} = x + y = m,$$

co oznacza, że $z \subset \mathrm{Rad}(m) = \Theta$ i sprzeczność.

Przypuśćmy teraz, że $y \perp q_i$ dla pewnego $i = 1, 2, 3$. Zauważmy, że $q_i \perp m^{\perp}$ bo $q \subset m$. Ponadto $q_i \perp q_i$ bo $q_i \subset m \subset \mathbf{H}$. Zatem $q_i \subseteq m^{\perp} + q_i$, czyli $m^{\perp} + q_i \subseteq q_i^{\perp}$, ale $q_i^{\perp}$ jest hiperpłaszczyzną, natomiast $m^{\perp}$ jest ko-hiperpłaszczyzną, więc ostatecznie z przeliczenia wymiarów musi być $m^{\perp} + q_i = q_i^{\perp}$. Z tego co tutaj założyliśmy mamy $y \subset m^{\perp} + q_i$, czyli $y \subset \overline{z_i, q_i} = z_i + q_i$ dla pewnego punktu rzutowego z_i na $m^{\perp}$. Ponieważ $m \cap m^{\perp} = \Theta$, więc musi być $q_i = x$, co nie jest możliwe.

Teraz przypuśćmy, że $y \perp p$ i oznaczmy $l = y + q_0$. Wówczas $l \subset p^{\perp}$. Dla wszystkich $i = 1, 2, 3$ prosta l przecina $q_i + m^{\perp}$ w pewnym punkcie y_i takim, że $y_i \neq y$. Zauważmy, że $y_i \perp p$, a ponadto $y_i \subset \overline{z_i, q_i} = z_i + q_i$ dla pewnego $z_i \subset m^{\perp}$. Gdyby $z \neq z_i$, to proste m oraz $\overline{z, z_i}$ leżałyby na płaszczyźnie $m + l$. To oznaczałoby, że te proste przecinają się i w efekcie $m \cap m^{\perp} \neq \Theta$, co przeczy poprzednim ustaleniom. Rozważmy jeszcze jeden punkt y' na prostej $\overline{x, z} = x + z$. Gdy $y' \subset p^{\perp}$, to może być kolejny punkt y'_1 na prostej $z + q_1$ taki, że $p \perp y'_1$. W końcu dostaniemy w ten sposób $q_i \perp p$, co jest wykluczone.

Weźmy prostą $l_0 = \overline{p, y}$. Zauważmy, że $y \perp y$ i pokazaliśmy już, że $y \not\perp p$, a zatem $l_0 \in \mathcal{R}_2$ z uwagi na 2.7. Oznaczmy płaszczyzny $U_i = l_0 + l_i$ dla $i = 1, 2, 3$. Rozważmy proste $U_i^{\infty} = \overline{q_i, y}$. Ponieważ $y \perp y$ i $y \not\perp q_i$, więc z 2.7 mamy $U_i^{\infty} \in \mathcal{R}_2$. Stąd, na mocy 2.10 musi być $U_i \in \mathcal{R}_3$.

(2°) $p \subset m$ i $m \neq l_1, l_2, l_3$, czyli l_i są prostymi afinicznymi (właściwymi).

Wiemy, że prosta m jest regularna oraz $m \subset \mathbf{H}$. Niech l_0 będzie inną regularną prostą przechodzącą przez p leżącą w $\mathbf{H}$. Weźmy $U_i = l_0 + l_1$. Wtedy $U_i^{\infty} = l_0$ i w ten sposób $U_i \in \mathcal{R}_3$ na mocy 2.10.

(3°) $p \subset m$ i $m = l_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2, 3\}$.

Bez zmniejszania ogólności naszych rozważań możemy przyjąć, że $i = 1$. Weźmy płaszczyznę D zawierającą prostą m i zawartą w $\mathbf{H}$. Skoro D zawiera prostą regularną m, to z 2.4 radykał D jest najwyżej punktem, natomiast z 4.5 ten radykał to co najmniej punkt. Zatem $\mathrm{Rad}(D)$ jest punktem i przyjmijmy, że $q := \mathrm{Rad}(D)$.

Nie może być $p = q$ bo wówczas $p \perp D$ i w szczególności $p \perp l_1$, co przeczy założeniu, że proste l_i są regularne. Jedyna nieregularna prosta przechodząca przez p na U to $k_1 := \overline{p, \mathbf{q}(U)}$ oraz jedyna nieregularna prosta przechodząca przez p na D to $k_2 := \overline{p, q}$. Niech $U_0 := k_1 + k_2$. Ponieważ $p \perp k_1, k_2$, to mamy $p \perp U_0$. Przyjmijmy $Y := D + U$. Mamy $Y \in \mathrm{Sub}_4(V)$. Ponieaż $p^\perp$ jest hiperpłaszczyzną, to albo $Y \subset p^\perp$, albo $Y \cap p^\perp$ jest płaszczyzną. W pierwszym przypadku dostajemy $l_1 \subset p^\perp$ i sprzeczność bo l_1 jest regularna. W drugim przypadku otrzymujemy $Y \cap p^\perp = U_0$.

Weźmy prostą m_3 na D przez p, różną od k_2 i od m. Zauważmy, że prosta m_3 jest regularna. Dla $U_3 := l_3 + m_3$ mamy $U_3 \in \mathcal{R}_3$ bo $U_4^\infty = m_3$.

Ponieważ $p \subset U_3, U_0 \subset Y$, to przekrój $k_0 := U_3 \cap U_0$ jest prostą.

Rozważmy płaszczyznę $B := l_2 + k_2$. Wtedy B i U_3 mają wspólną prostą k_4. Niech l_0 będzie prostą w $\mathbf{p}(p, U_3)$ różną od l_3, k_4, k_0, m_3 . Wtedy $l_0 \not\subset U_0$ i w ten sposób l_0 jest regularna. Niech $U_2 := l_0 + l_2$. Wówczas $p \in U_2^\infty$ oraz

$$U_2^\infty = U_2 \cap \mathbf{H} = U_2 \cap D \neq k_2,$$

co daje, że $U_2 \in \mathcal{R}_3$.

Ostatecznie, weźmy $U_1 := l_0 + l_1$. Wtedy $U_1^\infty = m$ i w ten sposób $U_1 \in \mathcal{R}_3$. W ten sposób dowód jest zakończony. ☐

Rodzina klas abstrakcji relacji $\mathbf{L}_\mathcal{R}$ jest zbiorem:

$$\{\mathbf{p}_r(p, U) : p \subset U \in \mathcal{R}_3\} \setminus \{\emptyset\},$$

gdzie

$$\mathbf{p}_r(p, U) = \{l \in \mathcal{R}_2 : p \subset l \subset U\}.$$

Lemat 4.8. *Zakładamy, że $\mathbf{b} \subset \mathbf{H}$. Jeśli U jest płaszczyzną rzutową nie zawartą w $\mathbf{H}$ i $\mathbf{b} \subset U$ wtedy U jest nieregularna.*

Dowód. Zauważmy, że $U \cap \mathbf{H}$ przy naszym założeniu musi być hiperpłaszczyzną w U, czyli prostą rzutową. Z uwagi na 2.5 płaszczyzna U nie jest regularna. ☐

Lemat 4.9. *Niech l będzie regularną prostą. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathbf{b} \subset l$ *oraz* $\mathbf{b} \subset \mathbf{H}$,

(2) *każda płaszczyzna rzutowa zawierająca l jest nieregularna.*

Dowód. (1) $\Longrightarrow$ (2): Przyjmijmy nie wprost, że jest płaszczyzna regularna U taka, że $l \subset U$. Z przechodniości $\mathbf{b} \subset U$, bo $\mathbf{b} \subset l$.

Mamy dwie możliwości: albo $U \subset \mathbf{H}$, albo $U \cap \mathbf{H}$ jest hiperpłaszczyzną w U. W pierwszym przypadku dostajemy sprzeczność z lematu 4.5. W drugim przypadku dostajemy sprzeczność z lematu 4.8. Zatem nasze przypuszczenie było fałszywe.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Rozważmy dwa przypadki:

(1°) $\mathbf{b} \subset \mathbf{H}$

Przypuśćmy, że $\mathbf{b} \not\subset l$. Jeśli $l \subset \mathbf{H}$ to rozpatrujemy dowolną płaszczyznę U nie zawartą w $\mathbf{H}$ taką, że $U^\infty = l$. Ponieważ l jest prostą regularną więc na mocy 2.10 U jest płaszczyzną regularną i mamy sprzeczność. Musi być zatem $l \not\subset \mathbf{H}$, a więc $l^\infty = q$ jest rzutowym punktem.

Ponieważ $\mathbf{b} \not\subset l$ więc $q \neq \mathbf{b}$ i na $\mathbf{H}$ możemy znaleźć prostą regularną m przez q. Zauważmy, że płaszczyzna $U = m + l$ rozpięta przez proste m i l, jest regularna z uwagi na 2.10. Ponownie dostajemy sprzeczność z założeniem. Musi być zatem $\mathbf{b} \subset l$.

(2°) $\mathbf{b} \not\subset \mathbf{H}$

Gdy $l \subset \mathbf{H}$ to bierzemy $U = l + \mathbf{b}$. Zauważmy wówczas, że $U^\infty = l$, więc na mocy 2.10 U jest regularne. Musi być zatem $l^\infty = q$ dla pewnego rzutowego punktu q. Zauważmy, że $\mathbf{b} \not\subset l$, bo w przeciwnym razie byłoby $\mathbf{b} \perp q$, a więc $\mathbf{b} = \mathrm{Rad}(l)$. Podobnie jak wcześniej możemy wziąć prostą regularną m przez q na $\mathbf{H}$ i rozpiąć $U = m + l$. Takie U jest regularną płaszczyzną z 2.10. Za każdym razem dochodzimy do sprzeczności, więc nie może być $\mathbf{b} \not\subset \mathbf{H}$. W ten sposób dowód jest zakończony.

□

Dla poprawienia czytelności trójargumentowa relacja bycia trójkątem w $\mathbf{G}_2(\mathcal{R})$ będzie oznaczana w następujący sposób:

$$\triangle(l_1, l_2, l_3) \quad \Longleftrightarrow \quad l_1, l_2, l_3 \text{ są wierzchołkami trójkąta w } \mathbf{G}_2(\mathcal{R}). \tag{4.3}$$

Z 4.2 wynika, że gdy $\triangle(l_1, l_2, l_3)$ i punkt rzutowy p leży na prostych rzutowych l_1 i l_2, to p leży również na prostej rzutowej l_3.

Lemat 4.10. *Zakładamy, że $F \neq \mathbf{GF}(2)$. Niech $\mathcal{Q} = \mathbf{p}_r(p, U) \neq \emptyset$, gdzie p jest punktem właściwym i $p \subset U \in \mathcal{R}_3$. Niech l_0 będzie taką regularną prostą, że $l_0 \notin \mathcal{Q}$. Oznaczmy $q := l_0^\infty$ oraz $m := U^\infty$.*

Jeśli $p \subset l_0$ i $q \neq \mathbf{b}$, to zachodzi jeden z następujących warunków:

(i) *$q \not\subset m^\perp$. Wówczas istnieją dwie różne proste rzutowe $l_1, l_2 \in \mathcal{Q}$, takie, że $\triangle(l_0, l_1, l_2)$.*

(ii) *$q \subset m^\perp$. Wówczas istnieją dwie różne regularne proste l', l'' przechodzące przez punkt p takie, że $\mathbf{L}_{\mathcal{R}}(l_0, l', l'')$ i $l'^\infty, l''^\infty \not\subset m^\perp$, a więc zarówno prosta l' jak i prosta l'' spełnia warunek* (i).

Odwrotnie, jeśli prosta l_0 spełnia warunek (i) *lub* (ii), *to $p \subset l_0$.*

DOWÓD. Zakładamy, że $p \subset l_0$ i $q \neq \mathbf{b}$. Rozważmy dwa wzajemnie wykluczające się warunki (i) oraz (ii).

(i) $q \not\subset m^\perp$

Zauważmy, że $m \cap p^\perp$ jest punktem rzutowym x_0, gdyż w przeciwnym razie mamy $m \subset p^\perp$, czyli $p \perp m$, a wtedy dla każdej prostej rzutowej l w pęku $\mathbf{p}(p, U)$ mamy $l = p + (l \cap m)$ i stąd $(l \cap m) \perp l$.

Z naszych założeń mamy po pierwsze $p \not\perp q$, a po drugie, $m \cap q^\perp$ jest punktem rzutowym, powiedzmy x_1, gdyż w przeciwnym razie $m \subset q^\perp$ czyli $q \subset m^\perp$ co wykluczyliśmy w rozważanym przypadku. Weźmy $y_1, y_2 \in m$ takie, że $y_1, y_2 \neq x_0, x_1$. Oznaczmy $l_i := \overline{p, y_i}$ dla $i = 1, 2$. Zauważmy, że $y_1, y_2 \not\perp p, q$. Zatem $l_1, l_2 \in \mathbf{p}_r(p, U)$. Z 2.7 prosta rzutowa $m_i := \overline{q, y_i}$ jest regularna, więc z 2.10 płaszczyzna rzutowa $m_i + p$ jest regularna dla $i = 1, 2$. Stąd $\triangle(l_0, l_1, l_2)$.

(ii) $q \subset m^\perp$

Ponieważ $q \neq \mathbf{b}$, więc $q^\perp \cap \mathbf{H}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathbf{H}$. Wszystkie nieregularne proste zawarte w $\mathbf{H}$ i przechodzące przez q leżą na $q^\perp \cap \mathbf{H}$. Hiperpłaszczyzny $\mathbf{H}$ nie da się przedstawić jako sumy trzech właściwych podprzestrzeni $q^\perp \cap \mathbf{H}$, $p^\perp \cap \mathbf{H}$ i $m^\perp \cap \mathbf{H}$. Zatem istnieje punkt $q' \subset \mathbf{H}$ taki, że $q' \not\subset q^\perp, p^\perp, m^\perp$. Weźmy prostą $k := \overline{q, q'}$. Zauważmy, że $k \subset \mathbf{H}$, k jest regularna i $p \not\perp k$. Rozważmy punkty rzutowe $z := k \cap p^\perp$ oraz $q'' \subset m$ taki, że $q'' \neq q, q', z$. Ponieważ $q'' \not\perp p$, więc na mocy 2.7 proste $l' = \overline{p, q'}$ i $l'' = \overline{p, q''}$ są regularne. Oznaczmy $B := k + p$. Zauważmy, że $B \in \mathcal{R}_3$ i

$$l_0, l', l'' \in \mathbf{p}_r(p, B).$$

Ponadto $q'' \not\subset m^\perp$, gdyż w przeciwnym razie $q' \subset k \subset m^\perp$, gdzie $q' = l'^\infty$, $q'' = l''^\infty$.

Teraz niech l_0 będzie dowolną prostą rzutową. Gdy l_0 spełnia (i) to bezpośrdnio z 4.2 mamy $p \subset l_0$. Gdy natomiast l_0 spełnia (ii), to mamy $p \subset l', l''$, co z 4.1 daje $p \in l_0$. □

Lemat 4.11. *Zakładamy, że $F \neq \mathbf{GF}(2)$. Niech $\mathcal{Q} = \mathbf{p}_r(p, U) \neq \emptyset$, gdzie p jest punktem niewłaściwym i $p \subset U \in \mathcal{R}_3$. Niech l_0 będzie taką regularną prostą, że $l_0 \notin \mathcal{Q}$. Oznaczmy $m := U^\infty$. Wówczas $p \subset l_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją różne proste $l_1, l_2 \in \mathcal{Q}$ takie, że $\triangle(l_0, l_1, l_2)$.*

DOWÓD. Prosta m jest regularna z założeń i 2.10.

$\Rightarrow$: Pęk $\mathbf{p}(q, U)$ zawiera dokładnie jedną nieregularną prostą k_0 i $p \neq \mathbf{b}$. Do rozpatrzenia są dwa przypadki:

(1°) $l_0 \subset \mathbf{H}$

W tym przypadku wystarczy wziąć dwie proste afiniczne $l_1, l_2 \in \mathcal{Q}$ i wtedy $\triangle(l_0, l_1, l_2)$.

(2°) $l_0 \not\subset \mathbf{H}$

Niech $Y := U + l_0$ i $B := Y \cap \mathbf{H}$. Zauważmy, że $Y \in \mathrm{Sub}_4(V)$ i $B \in \mathrm{Sub}_3(V)$. Zauważmy, że na B leży regularna prosta m, więc z 4.5 $\mathrm{Rad}(B) =: p'$ jest punktem i $p \not\subset m$. Rozważmy proste $k_1 := \overline{p, p'}$ oraz $k_2 := (k_0 + l_0) \cap B$. Punkt p leży na płaszczyźnie B, więc możemy wziąć dwie proste m_i, m_2 tak aby

$$p \subset m_1, m_2 \subset B \qquad \text{oraz} \qquad m_1, m_2 \neq m, k_1, k_2.$$

Niech $l_i := (l_0 + m_1) \cap U$ dla $i = 1, 2$. Prosta m_i jest regularna zatem płaszczyzna $l_0 + m_i$ też jest regularna z 2.10 bo $(l_0 + m_i)^\infty = m_i$, gdzie $i = 1, 2$. Przypuśćmy, że prosta l_i jest nieregularna. Wtedy $l_i \neq k_0$ i $p \perp l_i$, co jest niemożliwe. Zauważmy, że $l_1, l_2 \in \mathcal{Q}$ i $\triangle(l_0, l_1, l_2)$.

$\Leftarrow$: Wynika z 4.2. □

4.2 Wiązki prostych regularnych

Dla regularnego pęku $\mathcal{Q} = \mathbf{p}_r(p, U) \neq \emptyset$ wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$S_0(\mathcal{Q}) = \Big\{ l \in \mathcal{R}_2 \colon (\exists\ l_1, l_2 \in \mathcal{Q})\ [\ \triangle(l, l_1, l_2)\ ] \Big\}, \tag{4.4}$$

$$S_1(\mathcal{Q}) = \Big\{ l \in \mathcal{R}_2 \colon (\exists\ l', l'' \in S_0(\mathcal{Q}))\ [\ l' \neq l''\ \wedge\ \mathbf{L}_{\mathcal{R}}(l, l', l'')\ ] \Big\}, \tag{4.5}$$

$$S(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q} \cup S_0(\mathcal{Q}) \cup S_1(\mathcal{Q}). \tag{4.6}$$

Dla dowolnego rzutowego punktu p regularną wiązkę prostych przez p oznaczamy:

$$S_r(p) = \{ l \in \mathcal{R}_2 \colon p \in l \}.$$

Dla prostych $l_1, l_2 \in \mathcal{R}_2$ będziemy pisać

$$l_1 \sim l_2 \text{ wtedy i tyko wtedy, gdy istnieje takie } U \in \mathcal{R}_3,\ \text{że } l_1, l_2 \subset U,$$
$$l_1 \not\sim l_2,\ \text{gdy nie zachodzi } l_1 \sim l_2.$$

Relacja $\sim$ jest relacją sąsiedniości (adjacencji) w $\mathbf{G}_2(V)$. Napiszmy teraz 2.9 nieco inaczej:

$$S_r(\mathbf{b}) = \emptyset,\ \text{gdy } \mathbf{b} \not\subset \mathbf{H}, \qquad S_r(\mathbf{b}) \neq \emptyset,\ \text{gdy } \mathbf{b} \subset \mathbf{H}. \tag{4.7}$$

Zbadamy teraz jak się ma $S(\mathcal{Q})$ do $S_r(p)$ w zależności od wyboru wierzchołka p pęku $\mathcal{Q}$ oraz położenia punktu $\mathbf{b}$.

Analiza 4.12. Mamy następujące możliwości:

(i) $p \not\subset \mathbf{H}$, $p \neq \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \not\subset \mathbf{H}$ — $S(\mathcal{Q}) = S_r(p)$ z 4.10 i (4.7),

(ii) $p \not\subset \mathbf{H}$, $p \neq \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \subset \mathbf{H}$ — $S(\mathcal{Q}) = S_r(p) \setminus \{\overline{p, \mathbf{b}}\}$ z 4.10, (4.7) i 2.9,

(iii) $p \not\subset \mathbf{H}$, $p = \mathbf{b}$ — $S(\mathcal{Q}) = S_r(p) = \emptyset$ z (4.7) i 2.9,

(iv) $p \subset \mathbf{H}$, $p \neq \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \not\subset \mathbf{H}$ — $S(\mathcal{Q}) = S_r(p)$ z 4.11 i (4.7),

(v) $p \subset \mathbf{H}$, $p \neq \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \subset \mathbf{H}$ — $S(\mathcal{Q}) = S_r(p)$ z 4.11, (4.7) i 2.9 (prosta $\overline{p, \mathbf{b}}$ jest izotropowa),

(vi) $p \subset \mathbf{H}$, $p = \mathbf{b}$ — pęk $\mathcal{Q}$ nie istnieje w tym wypadku, gdyż płaszczyzna U nie jest regularna z 4.8.

Z powyższej analizy wynika, że każdy punkt rzutowy poza punktem b może być zdefiniowany w $\mathbf{G}_2(\mathcal{R})$ jako wierzchołek wiązki prostych regularnych.

Lemat 4.13. *Niech l_1, l_2 będące różnymi prostymi regularnymi przechodzącymi przez punkt p. Wówczas $l_1 \not\sim l_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z następujących warunków:*

(i) $p \not\subset \mathsf{H}$ *oraz* $l_1^\infty \perp l_2^\infty$,

(ii) $p \subset \mathsf{H}$ *oraz*

  (a) *albo* $l_1, l_2 \subset \mathsf{H}$,

  (b) *albo* $l_1, l_2 \not\subset \mathsf{H}$ *i* $p \perp (l_1 + l_2)^\infty$.

Dowód. Oznaczmy $U := l_1 + l_2$. Ponieważ proste l_1, l_2 przecinają się, więc U jest płaszczyzną rzutową. Zauważmy, że

$l_1 \not\sim l_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy płaszczyzna U jest nieregularna.

Mamy dwa wzajemnie wykluczające się przypadki.

(1°) $p \not\subset \mathsf{H}$

Wówczas U jest płaszczyzną afiniczną. Z 2.10 płaszczyzna U jest nieregularna wtedy i tylko wtedy, gdy prosta $U^\infty = \overline{l_1^\infty, l_2^\infty} = l_1^\infty + l_2^\infty$ jest nieregularna, co z kolei jest równoważne z tym, że $l_1^\infty \perp l_2^\infty$.

(2°) $p \subset \mathsf{H}$

Mamy tutaj trzy możliwości.

- Jeśli $l_1, l_2 \subset \mathsf{H}$ wtedy $U \subseteq \mathsf{H}$, a więc z 4.5 U jest nieregularna.
- Jeśli $l_1 \subset \mathsf{H}$ i $l_2 \not\subset \mathsf{H}$ (albo na odwrót) wtedy $U^\infty = l_1$, a zatem płaszczyzna U jest regularna na mocy 2.10.
- Jeśli $l_1, l_2 \not\subset \mathsf{H}$ wtedy płaszczyzna U jest nieregularna wtedy i tylko wtedy, gdy $U^\infty \perp U^\infty$, co jest równoważne z $p \perp U^\infty$.

□

Lemat 4.14. *Zakładamy, że* $\dim(V) = 4$ *to znaczy, że* $\mathbf{P}(V)$ *jest trójwymiarową przestrzenią rzutową. Wtedy* H *jest płaszczyzną i* $\mathsf{b} \subset \mathsf{H}$. *Weźmy punkt* $p \not\subset \mathsf{H}$, *pęk* $\mathcal{Q} = \mathbf{p}_r(p, U) \neq \emptyset$, *gdzie* $U \in \mathcal{R}_3$ *oraz regularną prostą* l *z* $S(\mathcal{Q})$. *Dla dowolnych* $l_1, l_2 \in S(\mathcal{Q})$ *o ile* $l \not\sim l_1, l_2$, *mamy* $l_1 \not\sim l_2$.

Dowód. Oznaczmy $q := l^\infty$. Niech $l_1, l_2 \in S(\mathcal{Q})$ takie, że $l \not\sim l_1, l_2$ i niech $q_i := l_i^\infty$ dla $i = 1, 2$. Z lematu 4.13 mamy $q \perp q_1, q_2$. Z analizy 4.12(ii) natychmiast wynika, że $q \neq \mathsf{b}$. Zauważmy, że $k := q^\perp \cap \mathsf{H}$ jest prostą na H oraz $q_1, q_2 \subset k$. Stąd prosta k jest izotropowa, a więc musi być $q_1 \perp q_2$. Korzystając ponownie z lematu 4.13 otrzymujemy żądaną tezę. □

Lemat 4.15. *Zakładamy, że* $\dim(V) > 4$. *Niech* $\mathcal{Q} = \mathbf{p}_r(p, U) \neq \emptyset$, *gdzie* $U \in \mathcal{R}_3$. *Następujące warunki są równoważne:*

(1) $p \subset \mathbf{H}$,

(2) *dla wszystkich* $l, l_1, l_2 \in S(\mathcal{Q})$ *jeśli* $l \not\sim l_1, l_2$, *to* $l_1 \not\sim l_2$.

DOWÓD. (1) $\Longrightarrow$ (2): Zakładamy, że $p \subset \mathbf{H}$. Niech $l, l_1, l_2 \in S(\mathcal{Q})$. Załóżmy, że $l \not\sim l_1, l_2$. Mamy dwie możliwości:

(1°) $l \subset \mathbf{H}$

Z 4.13 aplikowanego najpierw dla l i l_1, potem dla l i l_2 otrzymujemy $l_1, l_2 \subset \mathbf{H}$. Ponieważ na $\mathbf{H}$ nie ma regularnych płaszczyzn rzutowych zgodnie z 4.5, więc $l_1 \not\sim l_2$.

(2°) $l \not\subset \mathbf{H}$

Z 4.13 mamy $l_1, l_2 \not\subset \mathbf{H}$. Oznaczmy $U_i := l + l_i$ oraz $m_i := U_i^\infty$. Z 2.10 proste m_i są nieregularne. Z 4.13 mamy

$$p \perp (l + l_1)^\infty = U_i^\infty = m_i.$$

Tak więc $p \perp m_1 + m_2$.

Jeśli $m_1 = m_2$, to wtedy l, l_1, l_2 współpłaszczyznowe, a więc $U_1 = U_2$ i dalej $(l_1 + l_2)^\infty = U_1^\infty = m_1$. Stąd, razem z 2.10 stwierdzamy, że $l_1 \not\sim l_2$.

Jeśli $m_1 \neq m_2$, to możemy wziąć prostą

$$m_0 := (l_1 + l_2) \cap (m_1 + m_2).$$

Zauważmy, że $m_0 = (l_1 + l_2)^\infty$. Ponadto $p \subset m_0$ oraz $p \perp m_0$. Także punkt p jest w radykale prostej m_0, a więc jest ona nieregularna. To oznacza, że płaszczyzna $l_1 + l_2$ nie jest regularna na mocy 2.10, a więc $l_1 \not\sim l_2$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Przypuśćmy, że $p \not\subset \mathbf{H}$. Oznaczmy $q := l^\infty$. Weźmy taki $x_1 \subset q^\perp \cap \mathbf{H}$, że $x_1 \not\subset p^\perp$ oraz taki $x_2 \subset q^\perp \cap \mathbf{H}$, że $x_2 \not\subset p^\perp, x_1^\perp$. Zauważmy, że nie może być $x_i = \mathbf{b}$, gdyż mielibyśmy wtedy $x_i \perp x_j$ dla $\{i, j\} = \{1, 2\}$, co wykluczamy. Weźmy proste $l_i := \overline{p, x_i} = p + x_i$ dla $i = 1, 2$. Zauważmy, że $l_1, l_2 \in S(\mathcal{Q})$ oraz $l \not\sim l_1, l_2$ i $l_1 \sim l_2$. Sprzeczność z założeniami, więc musi być $p \subset \mathbf{H}$. □

Fakt 4.3 z podstawionym zbiorem $\mathcal{R}_3$ zamiast $\mathrm{Sub}_3(V)$ mówi jak w języku $\mathbf{G}_2(V)$ definiuje się relację $\mathbf{L}_\mathcal{R}$ współpękowości prostych regularnych. W 4.7 natomiast scharakteryzowane zostały takie właśnie pęki prostych regularnych. Wierzchołek takiego pęku może być dowolnym punktem, a podstawa płaszczyzną regularną. Pozwala to w (4.4), (4.5), (4.6) określić wiązkę wszystkich prostych regularnych przez dowolny punkt. W (4.4) jest wprawdzie użyta dodatkowa relacja $\triangle$ bycia trójkątem, ale jest to tylko skrót łatwo wyrażalny w terminach grassmannianu $\mathbf{G}_2(V)$. W wyniku analizy przeprowadzonej w 4.12 możemy stwierdzić, że każdy punkt poza punktem $\mathbf{b}$, gdy nie leży on na $\mathbf{H}$, daję się wyrazić jako wierzchołek wiązki prostych regularnych. Lematy 4.14 oraz 4.15 pozwalają rozróżniać punkty regularne od punktów nieregularnych (niewłaściwych, leżących na H) przy pomocy naturalnej relacji adjacencji $\sim$ w $\mathbf{G}_2(V)$.

Podsumujmy to w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 4.16. *Struktura* $\mathfrak{B}$ *jest definiowalna w terminach* $\mathbf{G}_2(V)$.

Oto kres mojej drogi.

Willian Szekspir (*Makbet*)

Bibliografia

[1] Cameron P., *Projective and Polar Spaces*, `http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/pps/`.

[2] Cohen A. M.,*Point- Line Spaces Related to Buildings*, Handbook Of Incidence Geometry, 1995.

[3] Hirschfeld J. W. W. P., *Projective Geometries over Finite Fields*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[4] Jefimow N. W., Rozendorn E. R., *Algebra liniowa wraz z geometrią wielowymiarową*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1974.

[5] Komorowski J., *Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1978.

[6] Lenz H. , *Matematyka elementarna z wyższego stanowiska*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe,1968.

[7] Prażmowski K., Żynel M., *Grassmanians defined for orthogonal geometries over Fano space*, 2009.

[8] Żynel M., *Rzutowania w kracie podprzestrzeni przestrzeni wektorowej*, praca doktorska, 2003.