

UNIwersytet w Białymstoku
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Agnieszka Konstantynowicz

ZANURZENIA GRASSMANNIANÓW
W GRASSMANNIANIE
PODPRZESTRZENI PRZESTRZENI
RZUTOWEJ

*Praca magisterska napisana
pod kierunkiem
dr. hab. Krzysztofa Prażmowskiego, prof. UwB*

Białystok 2011

Składam serdeczne podziękowania
dr. Mariuszowi Żynelowi
za nieoceniony wkład w powstawanie tej pracy.

Agnieszka Konstantynowicz

Spis treści

Wstęp	1
1 Definicje wstępne	3
1.1 Geometria	3
1.1.1 Czym są podstruktury?	4
1.1.2 Pojęcie kolineacji i zanurzenia	6
1.2 Teoria krat	9
2 Grassmanniany rzutowe	11
2.1 Podstruktury odcinkowe	12
2.2 Obcięcia	13
3 Kliki	14
3.1 Postać trójkąta	14
3.2 Gwiazdy	15
3.3 Układy	17
3.4 Kliki maksymalne	18
3.5 Przekroje klik	19
4 Zanurzenia	21
4.1 Kolineacje	21
4.2 Obraz przy zanurzeniu	22
Bibliografia	28

Wstęp

„W większości dyscyplin naukowych kolejne pokolenie niszczy to, czego dokonało poprzednie i to co jeden człowiek odkrył, drugi obala. Tylko w matematyce każde pokolenie dodaje nowy element do dawnej konstrukcji. ”

Hermann Hankel

Aby przestrzeń była przestrzenią rzutową, każde dwie jej proste leżące na jednej płaszczyźnie muszą posiadać punkt wspólny. Będąc więc w tym świecie zatrzymuję się nad ciekawą strukturą incydencyjną na rodzinie podprzestrzeni ustalonego wymiaru, zwanej Grassmannianem i badam kolineacje oraz zanurzenia pomiędzy takimi strukturami.

Zanurzenie to bardzo istotne pojęcie w mojej pracy. Jego definicja powinna być tak dobrana, aby po pierwsze: wyjściowa przestrzeń i jej obraz przy zanurzeniu były izomorficzne, po drugie: obraz przy zanurzeniu powinien być podstrukturą domkniętą w przestrzeni, w jaką zanurzamy, no i po trzecie: obrazem pęku musi być pęk. Ostatnie założenie jest nietypowe. Daje się ono wyrazić w języku częściowych przestrzeni prostych, ale zawęża znacznie klasę rozważanych zanurzeń. Nie udało się niestety uzyskać naszego wyniku bez tego dodatkowego założenia.

W pierwszym rozdziale wprowadzam pojęcia podstawowe, bez których dalsze rozważania byłyby niezwykle trudne. Część pojęć jest typowa dla geometrii, a część dla teorii krat. W pracy wykorzystuję narzędzia z obu dziedzin.

W rozdziale drugim omawiam postać i własności Grassmannianu rzutowego $\mathbf{G}_k(V)$, sprawdzam, że podstruktura odcinkowa jest podstrukturą domkniętą w $\mathbf{G}_k(V)$ (por. 2.4), jak też korzystając z wyników pracy [4], pokazuję izomorfizm pomiędzy podstrukturą odcinkową w $\mathbf{G}_k(V)$ a Grassmannianem rzutowym (por. 2.9).

Rozdział trzeci to udana próba pokazania postaci klik maksymalnych w Grassmannianie rzutowym. Ponieważ istotną rolę pełnią tutaj trójkąty, więc zaczynam od określenia ich postaci (por. 3.1). Okazuje się, że są dwa typy klik: gwiazda i zbiór punktów na prostej (układ) (por. 3.12). W podrozdziale dotyczącym gwiazd sprawdzam między innymi jakie parametry powinien mieć nasz Grassmannian, aby można było w nim znaleźć więcej niż jedną gwiazdę i w każdej z nich mieścił się trójkąt. Jest to o tyle ważne, że trójkąty rozpinają

gwiazdy jednoznacznie, a gwiazdy dalej są podstawowym narzędziem do badania kolineacji i zanurzeń. Dostyc ważną rolę odgrywają „kawałki” prostych Grassmannianu zwane pękami. Są to zbiory punktów na prostej, współliniowych z danym punktem poza tą prostą („pełny trójkąt”, „lokalna przestrzeń gamma”). W tym samym rozdziale ujęłam również postać przekrojów klik, zauważając jednocześnie ciekawostkę, że maksymalne kliki różnych typów w przekroju, o ile jest niepusty, dają pęk (por. 3.15).

Ostatni rozdział to niejako przejście do meritum, czyli zanurzeń. Po drodze jednak zauważam, że kolineacje Grassmannianów rzutowych zachowują typy maksymalnych klik (por. 4.3) oraz, że takie kolineacje wyznaczone są półliniowymi bijekcjami (por. 4.4) podobnie jak kolineacje przestrzeni rzutowych. Na koniec pokazuję, że obrazem zanurzenia jednego Grassmannianu rzutowego w drugi jest nic innego jak podstruktura Grassmanna, na podstawie wcześniejszych obserwacji będąca podstrukturą odcinkową (por. 4.9).

Rozdział 1

Definicje wstępne

Aby móc wdrożyć się w omawiany temat zanurzeń Grassmannianów musimy przedrzeć się przez szereg definicji, twierdzeń czy lematów. Zanim to jednak uczynimy, przypomnijmy sobie niektóre pojęcia z geometrii.

1.1 Geometria

Podstawą wyjścia do Grassmannianu jest częściowa przestrzeń prostych.

Definicja 1.1. Niech S i \mathcal{L} będą niepustymi zbiorami. Elementy S nazywamy punktami, natomiast elementy \mathcal{L} nazywamy prostymi. Strukturę $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, | \rangle$, gdzie $| \subseteq S \times \mathcal{L}$, nazywamy *częściową przestrzenią prostych* wtedy i tylko wtedy, gdy:

- (i) istnieje $a \in S$ oraz $k \in \mathcal{L}$ takie, że $a \dashv k$,
- (ii) jeśli $a, b \in S$, $k, l \in \mathcal{L}$ i $a, b \mid l, k$, to $a = b$ lub $k = l$,
- (iii) jeśli $k \in \mathcal{L}$, to istnieją $a, b \in S$ takie, że $a \neq b$ i $a, b \mid k$.

Mówimy, że dwa punkty są współliniowe, gdy leżą na jednej prostej (incydują z jedną prostą). Dodatkowo dla punktów $a, b \in S$ piszemy $a \sim b$, gdy a i b są współliniowe. Dualnie dla prostych $k, l \in \mathcal{L}$ piszemy $k \sim l$ gdy te proste są współpękowe, czyli mają jeden punkt wspólny.

Definicja 1.2. Mówimy, że częściowa przestrzeń prostych \mathfrak{A} jest *przestrzenią gamma*, gdy dla $a, b, c, x \in S$ i $k \in \mathcal{L}$, jeśli $a, b, c \mid k$, $a \neq b$ i $x \sim a, b$ to $x \sim c$.

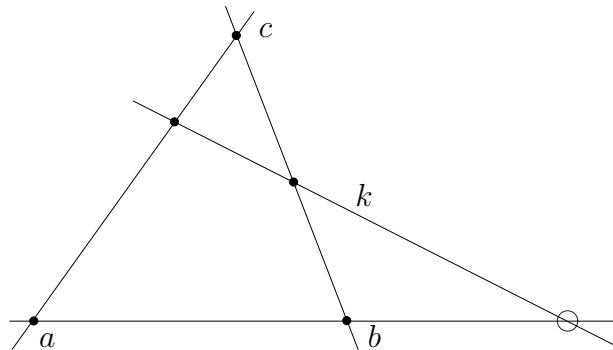
Trywialnie każda przestrzeń prostych jest przestrzenią gamma, a jednym z ciekawszych niebanalnych przykładów jest przestrzeń pęków zarówno rzutowa jak afiniczna (por. [4], [2]). Przykłady częściowej przestrzeni prostych, która nie jest przestrzenią gamma przytoczę później.

Definicja 1.3. Zbiór punktów $\mathcal{K} \subseteq S$ w częściowej przestrzeni prostych \mathfrak{A} nazywamy *kliką*, gdy każde dwa punkty w \mathcal{K} są współliniowe.

Klika X jest *maksymalna*, gdy nie istnieje klika większa od niej, to znaczy, gdy dla dowolnej kliki Y takiej, że $X \subseteq Y$ mamy $X = Y$. Jeżeli X jest kliką maksymalną oraz a jest punktem takim, że $a \notin X$, to zbiór $X \cup \{a\}$ nie jest kliką.

Strukturę $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ nazywamy *przestrzenią prostych*, gdy jest ona częściową przestrzenią prostych oraz każde dwa punkty z tej przestrzeni są współliniowe.

Trójkątem w częściowej przestrzeni prostych nazywamy układ trzech parami różnych punktów zwanych *wierzchołkami* oraz trzech parami różnych prostych zwanych *bokami* takich, że boki przecinają się parami w wierzchołkach (dualnie wierzchołki parami połączone są bokami).



Rysunek 1.1: Rzutowy warunek Veblena.

Rzutowy warunek Veblena mówi tyle, że jeśli pewna prosta przecina dwa boki trójkąta w dwóch różnych punktach to przecina ona również trzeci bok tego trójkąta (rys. 1.1).

Definicja 1.4. Strukturę $\mathfrak{P} = \langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ nazywamy *przestrzenią rzutową* gdy:

- (1) \mathfrak{P} jest przestrzenią prostych,
- (2) na każdej prostej leżą przynajmniej trzy różne punkty,
- (3) \mathfrak{P} spełnia rzutowy warunek Veblena.

1.1.1 Czym są podstruktury?

Ponieważ w Grassmannianie proste nie są zbiorami punktów i musimy używać explicite relacji incydencji, wprowadzamy pojęcie podstruktury domkniętej, które jest pojęciem szerszym niż pojęcie podprzestrzeni w innych kontekstach.

Definicja 1.5. Niech $\langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ będzie częściową przestrzenią prostych z relacją incydencji. Niech $S' \subseteq S$ i $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$. Wtedy $\langle S', \mathcal{L}', |' \rangle$ gdzie $|' = | \cap S' \times \mathcal{L}'$ jest *podstrukturą domkniętą* struktury $\langle S, \mathcal{L}, | \rangle$, gdy spełnia następujące warunki:

- (i) dla każdych dwóch punktów $a_1, a_2 \in S'$ i dla każdej prostej $k \in \mathcal{L}$, jeśli $a_1 \mid k$ i $a_2 \mid k$ oraz $a_1 \neq a_2$, to $k \in \mathcal{L}'$
- (ii) dla każdych dwóch prostych $k_1, k_2 \in \mathcal{L}'$ i dla każdego punktu $a \in S$ jeśli $a \mid k_1$ i $a \mid k_2$ oraz $k_1 \neq k_2$, to $a \in S'$.

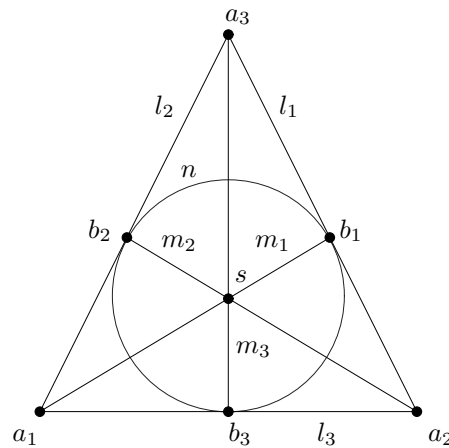
Jeśli mówimy o podstrukturze domkniętej w zadanej strukturze, to możemy opuścić relację incydencji \mid , gdyż jest ona jednoznacznie zdeterminowana przez \mid , S' oraz \mathcal{L}' .

Definicja 1.6. Podstruktura domknięta $\langle S, \mathcal{L}, \mid \rangle$ częściowej przestrzeni prostych jest *mocna* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych dwóch jej punktów istnieje prosta, z którą te punkty incydują.

Do zilustrowania pojęcia podstruktury domkniętej rozważmy płaszczyznę rzutową Fano. Niech

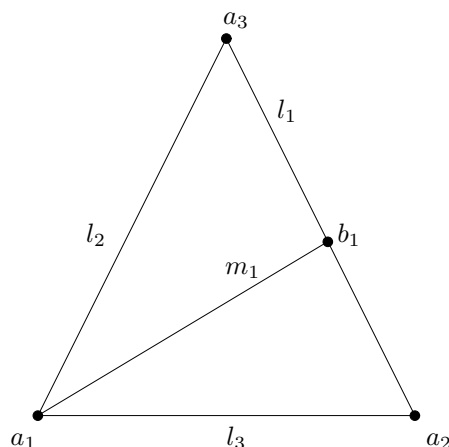
$$S = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, s\}, \mathcal{L} = \{l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n\},$$

i relacja incydencji jak na rysunku 1.2.



Rysunek 1.2: Rzutowa płaszczyzna Fano.

Wybermy jako zbiór punktów $S' = \{a_1, a_2, a_3, b_1\}$ oraz zbiór prostych $\mathcal{L}' = \{l_1, l_2, l_3, m_1\}$, tak jak na rysunku 1.3. Sprawdzając warunki definicji 1.5 widzimy, że po pierwsze każda para punktów jest połączona prostą należącą do tej struktury i po drugie każdy punkt będący przecięciem dwóch prostych należy do tejże struktury. Zatem przekonujemy się, że tak zadana struktura tworzy podstrukturę domkniętą płaszczyzny Fano.



Rysunek 1.3: Podstruktura domknięta płaszczyzny Fano.

Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ będzie częściową przestrzenią prostych i niech $S' \subseteq S$, $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$. Wówczas obcięcie przestrzeni \mathfrak{A} do $\langle S', \mathcal{L}' \rangle$ należy rozumieć w następujący sposób:

$$\mathfrak{A}|\langle S', \mathcal{L}' \rangle := \langle S', \mathcal{L}', | \cap S' \times \mathcal{L}' \rangle.$$

1.1.2 Pojęcie kolineacji i zanurzenia

Zwróćmy teraz uwagę na definicję jednego z podstawowych przekształceń w geometrii, czyli kolineacji. Kolineacja jest to przekształcenie przestrzeni lub płaszczyzny takie, że proste przechodzą przy tym przekształceniu na proste.

Definicja 1.7. Weźmy dwie częściowe przestrzenie prostych $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ i $\mathfrak{A}' = \langle S', \mathcal{L}', |' \rangle$. Odwzorowanie $F = (f, g)$, gdzie $f: S \rightarrow S'$, $g: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$, jest *kolineacją* z \mathfrak{A} na \mathfrak{A}' , gdy f, g są bijekcjami oraz dla $a \in S$ i $k \in \mathcal{L}$ spełniony jest warunek:

$$a | k \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f(a) | g(k). \quad (1.1)$$

Mówimy, że przestrzeń \mathfrak{A} jest *izomorficzna* z \mathfrak{A}' , co zapisujemy $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$, gdy istnieje kolineacja z \mathfrak{A} na \mathfrak{A}' .

Wprost z definicji możemy zauważyć następujące

Stwierdzenie 1.8. Niech $F = (f, g)$ będzie kolineacją jak w 1.7. Wówczas dla $a, b \in S$ i $k, l \in \mathcal{L}$ zachodzi

$$(i) \quad a \sim b \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f(a) \sim f(b),$$

$$(ii) \quad k \sim l \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad g(k) \sim g(l).$$

DOWÓD. (i) \Rightarrow : i (ii) \Rightarrow : wynikają wprost z (1.1).

(i) \Leftarrow : Załóżmy, że $f(a) \sim f(b)$. To oznacza, że istnieje prosta $k' \in \mathcal{L}'$ taka, że $f(a), f(b) |' k'$. Weźmy $k := g^{-1}(k')$. Wtedy $g(k) = k'$, a więc mamy $f(a), f(b) |' g(k)$. Z (1.1) dostajemy $a \sim b$.

(ii) \Leftarrow : Rozumowanie jest dualne do powyższego w tym sensie, że zamiast punktów rozważamy proste i na odwrót. \square

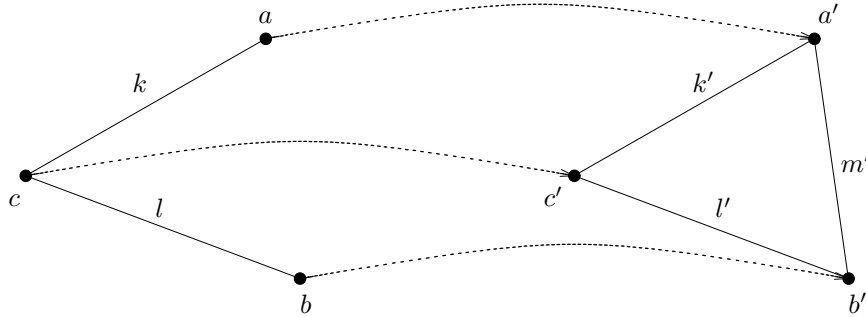
Lemat 1.9. *Niech $F = (f, g)$ będzie kolineacją jak w 1.7. Jeśli \mathcal{K} jest kliką w \mathfrak{A} , to $f(\mathcal{K})$ jest kliką w \mathfrak{A}' .*

DOWÓD. Niech $a', b' \in f(\mathcal{K})$. Zauważmy, że istnieją $a, b \in \mathcal{K}$ takie, że $f(a) = a'$ i $f(b) = b'$. Ponieważ a, b są elementami kliky, więc $a \sim b$ i zgodnie z (1.8)(i) uzyskujemy $a' \sim b'$. \square

Lemat 1.10. *Niech $F = (f, g)$ będzie kolineacją jak w 1.7. Jeśli \mathcal{K} jest maksymalną kliką w \mathfrak{A} to $f(\mathcal{K})$ jest maksymalną kliką w \mathfrak{A}' .*

DOWÓD. Załóżmy, że $f(\mathcal{K}) \cup \{a'\}$ jest kliką dla $a' \notin f(\mathcal{K})$. Zauważmy, że przeciwobrazem $f(\mathcal{K}) \cup \{a'\}$ przy f^{-1} jest $\mathcal{K} \cup \{a\}$, gdzie $a \notin \mathcal{K}$. Przeciwobraz ten jest kliką w \mathfrak{A} bo f jest bijekcją zachowującą współliniowość. Otrzymujemy sprzeczność z tym że \mathcal{K} jest maksymalna. \square

Bardzo istotne w naszej pracy jest pojęcie zanurzenia. Jego definicja powinna być tak dobrana, aby po pierwsze: wyjściowa przestrzeń i jej obraz przy zanurzeniu były izomorficzne, po drugie: obraz przy zanurzeniu musi być podstrukturą domkniętą w przestrzeni.



Rysunek 1.4: Zanurzenie niepełnego trójkąta w trójkąt.

Rozważmy sytuację jak na rys. 1.4. Mamy $S = \{a, b, c\}$, $\mathcal{L} = \{k, l\}$ oraz $S' = \{a', b', c'\}$, $\mathcal{L}' = \{k', l', m'\}$. Odwzorowanie $F = (f, g)$ działa tak: $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$, $g(k) = k'$, $g(l) = l'$. Widzimy, że

$$\text{Im}(F) := \langle f(S), g(\mathcal{L}) \rangle = \langle S', \{k', l'\} \rangle.$$

Takie zanurzenie wprowadzie spełnia pierwszy z postawionych warunków, ale nie spełnia drugiego.

Nasze zanurzenia muszą spełniać jeszcze jeden dodatkowy warunek: obrazem pęku musi być pęk. Możemy ten warunek wyrazić w elementarnym języku

dowolnej częściowej przestrzeni prostych, w której mamy przynajmniej dwie rozróżnialne rodziny maksymalnych klik. Mianowicie $p\ell k$ możemy zdefiniować jako część wspólną dwóch klik z różnych rodzin o ile ten przekrój jest przynajmniej 2-elementowy. Ten trzeci warunek jest wyraźnie niestandardowy i nie dokładamy go w poniższej definicji.

Definicja 1.11. Dla częściowych przestrzeni prostych $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ oraz $\mathfrak{A}' = \langle S', \mathcal{L}', | \rangle$ odwzorowanie $F = (f, g)$, gdzie $f: S \rightarrow S'$ i $g: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$, jest *zanurzeniem* \mathfrak{A} w \mathfrak{A}' , gdy dla $a, b \in S$ i $k, l \in \mathcal{L}$ spełnione są warunki:

- (i) $a | k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) | g(k)$,
- (ii) $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \sim f(b)$,
- (iii) $k \sim l$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(k) \sim g(l)$.

Odwzorowanie F z rys. 1.4 nie spełnia warunku (ii) w powyższej definicji. Zauważmy, że przy powyższej definicji zawsze

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}' | \text{Im}(F), \quad (1.2)$$

gdzie

$$\text{Im}(F) = \langle \text{Im}(f), \text{Im}(g) \rangle = \langle f(S), g(\mathcal{L}) \rangle.$$

Lemat 1.12. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ i $\mathfrak{A}' = \langle S', \mathcal{L}', | \rangle$ będą częściowymi przestrzeniami prostych. Jeśli F jest zanurzeniem \mathfrak{A} w \mathfrak{A}' , to $\text{Im}(F)$ jest podstrukturą domkniętą w \mathfrak{A}' .

DOWÓD. Aby $\text{Im}(F)$ był podstrukturą domkniętą \mathfrak{A}' musi spełniać warunki definicji 1.5.

Ad. (i): Weźmy różne $f(a_1), f(a_2) \in f(S)$ i $l' \in \mathcal{L}'$ takie, że $f(a_1) | l'$ i $f(a_2) | l'$.

Z warunku 1.11(ii) mamy $a_1 \sim a_2$. Zatem istnieje prosta $l \in \mathcal{L}$ taka, że $a_1, a_2 | l$. Z warunku 1.11(i) mamy $f(a_1), f(a_2) |' g(l)$, zatem $g(l) = l'$ bo \mathfrak{A}' jest częściową przestrzenią prostych, więc $l' \in g(\mathcal{L})$.

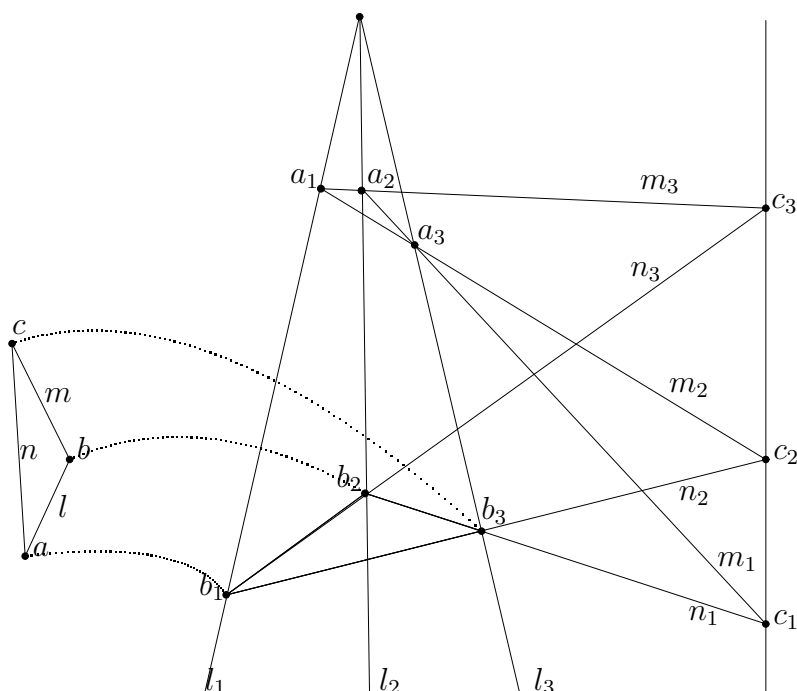
Ad.(ii): Weźmy różne $g(l_1), g(l_2) \in g(\mathcal{L})$ i $a' \in S'$ takie, że $a' | g(l_1)$ i $a' | g(l_2)$.

Z warunku 1.11(iii) mamy $l_1 \sim l_2$. Zatem istnieje punkt $a \in S$ taki, że $a | l_1, l_2$. Z warunku 1.11(i) mamy $f(a) |' g(l_1), g(l_2)$, zatem $f(a) = a'$ bo \mathfrak{A}' jest częściową przestrzenią prostych, więc $a' \in f(S)$.

□

Aby zwizualizować działanie zanurzeń posłużę się dobrze znaną w geometrii, konfiguracją Desargues'a (rys. 1.5).

Można mianowicie zanurzyć w niej trójkąt $\{a, b, c\}$, w następujący sposób. Niech $S = \{a, b, c\}$, $\mathcal{L} = \{l, m, n\}$, gdzie $a, b | l$; $b, c | m$; $c, a | n$. W ten sposób mamy częściową przestrzeń prostych $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, | \rangle$. Drugą częściową



Rysunek 1.5: Zanurzenie trójkąta w Konfigurację Desarguesa.

przestrzeń prostych \mathfrak{A}' odpowiadającą konfiguracji Desarguesa bierzemy tak $S' = \{a_i, b_i, c_i\}$, $\mathcal{L}' = \{l_i, m_i, n_i\}$, gdzie $i = 1, 2, 3$ oraz $a_i, b_i \mid' l_i$; $a_i, a_j, c_k \mid' m_k$; $b_i, b_j, c_k \mid' n_k$ dla $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Określamy odwzorowanie f następująco:

$$f(a) = b_1, \quad f(b) = b_2, \quad f(c) = b_3,$$

oraz odwzorowanie g :

$$g(l) = n_3, \quad g(m) = n_1, \quad g(n) = n_2.$$

W ten sposób określone odwzorowanie $F = (f, g)$ jest zanurzeniem trójkąta \mathfrak{A} w konfigurację Desarguesa \mathfrak{A}' .

1.2 Teoria krat

Do niektórych rozważanych w tej pracy zagadnień będą potrzebowała pojęć z teorii krat. Zdefiniujemy więc je zaczynając od posetu.

Struktura $\langle P, \leq \rangle$, w której relacja \leq jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia nazywa się *zbiorem częściowo uporządkowanym* lub krócej *posetem*.

Dla pary elementów a, b w posecie P przez $a \wedge b = \inf \{a, b\}$ oznaczamy kres dolny elementów a, b , a przez $a \vee b = \sup \{a, b\}$ ich kres górny.

Definicja 1.13. Poset $\langle L, \leq \rangle$ jest *kratą* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego, niepustego, skończonego podzbioru $H \subseteq L$ istnieją kresy $\sup(H)$ oraz $\inf(H)$.

Niech L będzie kratą i niech $a, b \in L$. Mówimy, że a *poprzedza* b i piszemy $a \prec b$, gdy $a < b$ i nie istnieje taki element $c \in L$, że $a < c < b$.

Gdy $a \prec b$, element a nazywa się *bezpośrednim poprzednikiem* b , a element b nazywa się *bezpośrednim następnikiem* a .

Definicja 1.14. Różne elementy a, b w kracie L są *sąsiednie*, co zapisujemy $a \approx b$, gdy posiadają wspólny poprzednik i następnik. Wtedy $a \wedge b$ jest tym wspólnym poprzednikiem, a $a \vee b$ wspólnym następnikiem. Dla sąsiednich a, b definiujemy *pęk* przez a, b jako zbiór

$$\overline{ab} := \{x \in L : a \wedge b \prec x \prec a \vee b\}. \quad (1.3)$$

Fakt 1.15. W kracie modularnej istnienie poprzednika i następnika dla pary różnych elementów jest równoważne.

Definicja 1.16. Niech $a, b \in L$. Zbiór postaci

$$[a, b] := \{x \in L : a \leq x \leq b\}$$

nazywamy *odcinkiem* kraty L .

Zauważmy, że dla sąsiednich i różnych $a, b \in L$ mamy

$$\overline{ab} = [a \wedge b, a \vee b] \setminus \{a \wedge b, a \vee b\}.$$

O kracie, która jest izomorficzna z kratą podprzestrzeni pewnej przestrzeni rzutowej mówimy, że jest *rzutowa*.

Fakt 1.17 (Żynel M. [5, 1.9]). *Trzy parami sąsiednie elementy kraty modularnej mają albo wspólny poprzednik albo następnik.*

Definicja 1.18. Niech L będzie kratą. *Ideałem głównym* nazywamy każdy ideał kraty L postaci

$$(a) = \{x \in L : x \leq a\},$$

Dualnie, *filtrem głównym* nazywamy każdy filtr kraty L postaci

$$[a) = \{x \in L : a \leq x\}.$$

Rozdział 2

Grassmanniany rzutowe

Niech \mathfrak{P} będzie przestrzenią rzutową i niech k będzie liczbą naturalną taką, że

$$0 \leq k < \dim(\mathfrak{P}).$$

Zbiór wszystkich podprzestrzeni \mathfrak{P} oznaczmy przez $\text{Sub}(\mathfrak{P})$ natomiast zbiór k -wymiarowych podprzestrzeni \mathfrak{P} to $\text{Sub}_k(\mathfrak{P})$. *Grassmannian rzutowy* to geometria

$$\mathbf{G}_k(\mathfrak{P}) = \langle \text{Sub}_k(\mathfrak{P}), \text{Sub}_{k+1}(\mathfrak{P}), \subset \rangle,$$

w której punktami są k -wymiarowe podprzestrzenie \mathfrak{P} , a prostymi $(k+1)$ -wymiarowe podprzestrzenie \mathfrak{P} . Zauważmy, że proste w tym Grassmannianie nie są zbiorami punktów.

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że wymiar przestrzeni \mathfrak{P} jest co najmniej 3 więc jest ona desarguesowska. W tej sytuacji możemy skorzystać z twierdzenia o reprezentacji dla przestrzeni rzutowej, które mówi, że o ile przestrzeń rzutowa \mathfrak{P} jest desarguesowska, to istnieje przestrzeń wektorowa V taka, że

$$\mathfrak{P} \cong \mathbf{P}(V) := \langle \text{Sub}_1(V), \text{Sub}_2(V), \subset \rangle,$$

gdzie $\text{Sub}_k(V)$ to zbiór wszystkich k -wymiarowych podprzestrzeni V .

Przy powyższej reprezentacji mamy

$$\mathbf{G}_k(\mathfrak{P}) \cong \mathbf{G}_{k+1}(V) = \langle \text{Sub}_{k+1}(V), \text{Sub}_{k+2}(V), \subset \rangle,$$

w szczególnym przypadku mamy

$$\mathbf{G}_0(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P} \cong \mathbf{G}_1(V) = \mathbf{P}(V).$$

Dalej dla wygody używamy reprezentacji analitycznej, tak więc V jest przestrzenią wektorową, k taką liczbą naturalną, że

$$0 < k < n := \dim(V)$$

i badamy Grassmannian rzutowy

$$\mathbf{G}_k(V) = \langle \text{Sub}_k(V), \text{Sub}_{k+1}(V), \subset \rangle.$$

Fakt 2.1. Niech U_1, U_2 będą różnymi punktami $\mathbf{G}_k(V)$. Następujące warunki są równoważne:

- (i) U_1, U_2 są współliniowe w $\mathbf{G}_k(V)$ (symbolicznie $U_1 \sim U_2$),
- (ii) U_1, U_2 są sąsiednie w kracie $L(V)$ (symbolicznie $U_1 \approx U_2$),
- (iii) $\dim(U_1 \cap U_2) = k - 1$,
- (iv) $\dim(U_1 + U_2) = k + 1$.

Powyższy fakt mówi, że współliniowość punktów w $\mathbf{G}_k(V)$ jest równoważna sąsiedniości w kracie $L(V) = \langle \text{Sub}(V), \subseteq \rangle$.

Fakt 2.2. (i) Jeśli punkt U leży w przekroju dwóch różnych prostych B_1 i B_2 w $\mathbf{G}_k(V)$ to $U = B_1 \cap B_2$.

(ii) Jeśli prosta B przechodzi przez dwa różne punkty U_1, U_2 w $\mathbf{G}_k(V)$ to $B = U_1 + U_2$.

Zauważmy, że z 2.2(ii) wynika, że $\mathbf{G}_k(V)$ jest częściową przestrzenią prostych.

2.1 Podstruktury odcinkowe

Definicja 2.3. Niech Z i Y będą podprzestrzeniami V . Odcinek $[Z, Y]$ został zdefiniowany w 1.16. Zbiór

$$[Z, Y]_k := [Z, Y] \cap \text{Sub}_k(V)$$

nazywamy k -odcinkiem.

Stwierdzenie 2.4. Jeśli Z, Y są takimi podprzestrzeniami V , że $\dim(Z) < k$ oraz $k + 1 < \dim(Y)$, to $\langle [Z, Y]_k, [Z, Y]_{k+1} \rangle$ jest podstrukturą domkniętą w $\mathbf{G}_k(V)$.

DOWÓD. Aby pokazać, że $\langle [Z, Y]_k, [Z, Y]_{k+1} \rangle$ jest podstrukturą domkniętą w $\mathbf{G}_k(V)$, musimy sprawdzić dwa warunki z definicji 1.5.

(i) Weźmy różne $U_1, U_2 \in [Z, Y]_k$ i $B \in \text{Sub}_{k+1}(V)$ takie, że $U_1, U_2 \subset B$. Czy $B \in [Z, Y]_{k+1}$? Z 2.3 pytanie sprowadza się do tego, czy $B \in [Z, Y]$.

Zauważmy, że z 2.2(i), mamy $B = U_1 + U_2$. Z własności kresu górnego $+$ w kracie $L(V)$ mamy

$$Z \subseteq U_1 + U_2 \subseteq Y,$$

co oznacza, że $B \in [Z, Y]$.

(ii) W drugim przypadku bierzemy różne $B_1, B_2 \in [Z, Y]_{k+1}$ i $U \in \text{Sub}_k(V)$ takie, że $U \subset B_1, B_2$. Czy $U \in [Z, Y]_k$? Z 2.2(ii) mamy $U = B_1 \cap B_2$. Z własności kresu dolnego \cap w kracie $L(V)$ mamy

$$Z \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq Y,$$

co razem z informacją o wymiarze oznacza, że $U \in [Z, Y]_k$. \square

Definicja 2.5. Jeśli Z, Y są takie jak w 2.4, to podstrukturę $\langle [Z, Y]_k, [Z, Y]_{k+1} \rangle$ w $\mathbf{G}_k(V)$ wyznaczoną przez odcinek $[Z, Y]$ nazywamy *podstrukturą odcinkową*.

2.2 Obciążenia

Podstruktury odcinkowe są strukturami o dość intuicyjnych własnościach. W wielu operacjach na odcinkach można się posiłkować teorią krat, co jeszcze bardziej upraszcza myślenie o nich. Często wygodniej będzie operować właśnie podstrukturami odcinkowymi tym bardziej, że istnieje izomorfizm pomiędzy nimi a Grassmannianami rzutowymi. Żeby jednak móc go pokazać musimy przejść przez trzy lematy.

Lemat 2.6 (Sadowski P. [4, Lemat 2.2]). *Jeśli Z, Y, W są podprzestrzeniami w V takimi, że $Z \oplus W = Y$ wtedy odwzorowanie*

$$[Z, Y] \ni U \longmapsto U \cap W \in \text{Sub}(W)$$

jest izomorfizmem odcinka $[Z, Y]$ na $L(W)$.

Lemat 2.7 (Sadowski P. [4, Lemat 2.3]). *Jeśli $Z \oplus W = Y$ oraz $U \in [Z, Y]$, to $(U \cap W)/Z = U/Z$.*

Lemat 2.8 (Sadowski P. [4, Lemat 2.4]). *Jeśli $Z, Y \in \text{Sub}(V)$ i $Z \subseteq Y$, to wtedy odwzorowanie*

$$[Z, Y] \ni U \longmapsto U/Z \in \text{Sub}(Y/Z)$$

jest izomorfizmem $[Z, Y]$ na $L(Y/Z)$.

Stwierdzenie 2.9. *Podstruktura odcinkowa w Grassmannianie rzutowym, z dokładnością do izomorfizmu, jest Grassmannianem rzutowym, tzn. dla $Z, Y \in \text{Sub}(V)$ takich, że $\dim(Z) < k$ i $k + 1 < \dim(Y)$ mamy*

$$\langle [Z, Y]_k, [Z, Y]_{k+1} \rangle \cong \mathbf{G}_{k-\dim(Z)}(Y/Z).$$

DOWÓD. Mamy pokazać

$$\langle [Z, Y]_k, [Z, Y]_{k+1} \rangle \cong \langle \text{Sub}_{k-\dim(Z)}(Y/Z), \text{Sub}_{k-\dim(Z)+1}(Y/Z) \rangle.$$

Z lematu 2.8 wiemy, że istnieje izomorfizm f działający z odcinka $[Z, Y]$ na kratę rzutową $L(Y/Z)$. Weźmy zatem element U z odcinka $[Z, Y]$.

$$\dim(f(U)) = \dim(U/Z) = \dim(U) - \dim(Z) = k - \dim(Z).$$

Tak więc

$$f([Z, Y]_k) = \text{Sub}_{k-\dim Z}(Y/Z)$$

i analogicznie

$$f([Z, Y]_{k+1}) = \text{Sub}_{k+1-\dim Z}(Y/Z).$$

Odwzorowanie f jest izomorfizmem krat, czyli zachowuje porządek \subseteq . Zatem f zachowuje incydencje. Tak więc f realizuje żądany izomorfizm pomiędzy naszą podstrukturą odcinkową i odpowiednim Grassmannianem rzutowym. \square

Rozdział 3

Kliki

3.1 Postać trójkąta

Rozważmy kratę podprzestrzeni przestrzeni wektorowej V czyli

$$L(V) = \langle \text{Sub}(V), \subseteq \rangle.$$

Twierdzenie 3.1. *Jeśli punkty U_1, U_2, U_3 są wierzchołkami trójkąta w $\mathbf{G}_k(V)$ to $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = k - 1$ oraz $\dim(U_1 + U_2 + U_3) = k + 2$.*

DOWÓD. Niech U_1, U_2, U_3 będą wierzchołkami trójkąta w $\mathbf{G}_k(V)$. Zatem z 2.1 są one parami różne oraz parami sąsiednie. Każda para wierzchołków ma wspólny następnik w postaci prostej przez nie przechodzącej, co zapiszemy:

$$U_2 + U_3 =: B_1, \quad U_1 + U_3 =: B_2, \quad U_1 + U_2 =: B_3,$$

oraz

$$\dim(B_1) = \dim(B_2) = \dim(B_3) = k + 1.$$

Zatem z 1.17 wierzchołki U_1, U_2, U_3 mają wspólny poprzednik lub następnik, czyli

$$\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = k - 1 \quad \text{lub} \quad \dim(U_1 + U_2 + U_3) = k + 1.$$

Zauważmy, że

$$U_1 + U_2 + U_3 = U_2 + U_3 + U_1 + U_3 = B_1 + B_2, \quad (3.1)$$

$$U_1 + U_2 + U_3 = U_1 + U_3 + U_1 + U_2 = B_2 + B_3, \quad (3.2)$$

$$U_1 + U_2 + U_3 = U_1 + U_2 + U_2 + U_3 = B_3 + B_1. \quad (3.3)$$

Gdyby $\dim(U_1 + U_2 + U_3) = k + 1$ to z uwagi na powyższe trzy równości, porównując wymiary, mielibyśmy

$$B_1 = B_2 = B_3,$$

co jest sprzeczne z definicją trójkąta. Zatem skoro U_1, U_2, U_3 nie posiadają wspólnego następnika to mają wspólny poprzednik.

Zauważmy, że punkt U_3 leży na bokach B_1 i B_2 , a więc $U_3 = B_1 \cap B_2$. Policzmy

$$\begin{aligned} \dim(B_1 + B_2) &= \dim(B_1) + \dim(B_2) - \dim(B_1 \cap B_2) = \\ &= k + 1 + k + 1 - \dim(U_3) = k + 2, \end{aligned}$$

co z (3.1) kończy dowód. \square

Wniosek 3.2. *Jeśli punkty U_1, U_2, U_3 są wierzchołkami trójkąta w $\mathbf{G}_k(V)$, to*

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 = U_1 \cap U_2 = U_2 \cap U_3 = U_3 \cap U_1.$$

DOWÓD. Weźmy U_1, U_2, U_3 będące wierzchołkami pewnego trójkąta w $\mathbf{G}_k(V)$. Z 3.1 mamy $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = k - 1$. Z kolei z 2.1 wynika, że:

$$\dim(U_1 \cap U_2) = k - 1, \quad \dim(U_1 \cap U_3) = k - 1, \quad \dim(U_2 \cap U_3) = k - 1.$$

Ale ponieważ $U_1 \cap U_2 \cap U_3 \subseteq U_1 \cap U_2, U_1 \cap U_3, U_3 \cap U_2$ i wymiary porównywanych podprzestrzeni są równe $k - 1$, więc otrzymujemy tezę. \square

3.2 Gwiazdy

Definicja 3.3. Niech $H \in \text{Sub}_{k-1}(V)$. Zbiór

$$[H]_k := [H] \cap \text{Sub}_k(V) = \{U \in \text{Sub}_k(V) : H \subset U\},$$

nazywamy *gwiazdą*.

Przyjrzyjmy się teraz skrajnym wartościom k dla gwiazd.

Gdy $k = 1$, to $\dim(H) = 0$, czyli $H = \Theta$. Mamy więc $[H]_1 = \text{Sub}_1(V)$. Zauważmy, że istnieje tylko jedna taka gwiazda. Aby gwiazd było więcej niż jedna, dalej zakładam, że $k > 1$.

Gdyby $k = \dim(V) - 1 = n - 1$ i gwiazda $[H]_k$ zawierała trójkąt o wierzchołkach U_1, U_2, U_3 , to z 3.1 mielibyśmy

$$\dim(U_1 + U_2 + U_3) = k + 2 = n - 1 + 2 = n + 1,$$

co nie jest możliwe bo musi być $U_1 + U_2 + U_3 \subseteq V$. Zatem aby w każdej gwiazdzie istniał trójkąt zakładamy, że $k < n - 1$. Podsumowując, dalej przyjmujemy, że

$$1 < k < n - 1. \tag{3.4}$$

Z twierdzenia 3.1 wynika, że trójkąt o wierzchołkach U_1, U_2, U_3 wyznacza jednoznacznie gwiazdę $[U_1 \cap U_2 \cap U_3]_k$.

Lemat 3.4. *Jeśli U jest punktem współliniowym z wierzchołkami trójkąta U_1, U_2, U_3 , to U leży w gwiazdzie $[U_1 \cap U_2 \cap U_3]_k$ wyznaczonej przez ten trójkąt.*

DOWÓD. Niech $H := U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Z 3.1 mamy $\dim(H) = k - 1$.

Jeśli U jest jednym z wierzchołków U_1, U_2, U_3 naszego trójkąta, to leży on w gwiazdzie $[H]_k$. Załóżmy zatem, że $U \neq U_i$ dla $i = 1, 2, 3$. Wtedy U nie leży na dwóch bokach naszego trójkąta jednocześnie. Ponieważ $U \sim U_i$ dla wszystkich $i = 1, 2, 3$, więc zawsze istnieją takie $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, że U, U_i, U_j tworzą trójkąt. Z 3.1 mamy, że $\dim(U \cap U_i \cap U_j) = k - 1$. Natomiast z 3.2 mamy $U \cap U_i \cap U_j = U_i \cap U_j$. Z drugiej strony, na mocy 3.2, $U_i \cap U_j = H$ bo U_i, U_j są wierzchołkami trójkąta U_1, U_2, U_3 . Oznacza to, że $H = U \cap U_i \cap U_j \subset U$, co daje $U \in [H]_k$. \square

Stwierdzenie 3.5. *Jeśli $H \in \text{Sub}_{k-1}(V)$, to $[H]_k$ jest maksymalną kliką w $\mathbf{G}_k(V)$.*

DOWÓD. Weźmy różne $U, W \in [H]_k$. Z definicji $[H]$ wiemy, że $H \subseteq U$ i $H \subseteq W$ więc $H \subseteq U \cap W$. Z porównania wymiarów mamy więc, że $H = U \cap W$, zatem $U \approx W$. Z 2.1 widzimy, że dowolne dwa elementy z $[H]_k$ są współliniowe, więc jest to klika.

Załóżmy teraz, że $[H]_k \cup \{U\}$ jest kliką dla $U \notin [H]_k$. Weźmy punkty $U_1, U_2, U_3 \in [H]_k$ tworzące trójkąt. Nasze globalne założenia w (3.4) pozwalają na to. Zauważmy, że U jest współliniowy z każdym z wierzchołków U_1, U_2, U_3 . Zatem z 3.4 mamy sprzeczność z założeniem, że $U \notin [H]_k$. Zatem $[H]_k$ jest maksymalną kliką w $\mathbf{G}_k(V)$. \square

Twierdzenie 3.6. *Niech $H \in \text{Sub}_{k-1}(V)$ wówczas*

$$\langle [H]_k, [H]_{k+1} \rangle$$

z dokładnością do izomorfizmu jest przestrzenią rzutową wymiaru $n - k$.

DOWÓD. W 2.9 bierzemy $Z = H$, $Y = V$ i w ten sposób dostajemy

$$\langle [H, V]_k, [H, V]_{k+1} \rangle \cong \mathbf{G}_{k-(k-1)}(H/V) = \langle \text{Sub}_1(V/H), \text{Sub}_2(V/H) \rangle.$$

Z prawej strony jest przestrzeń rzutowa wymiaru

$$\dim(V) - \dim(H) - 1 = n - (k - 1) - 1 = n - k,$$

co kończy dowód. \square

Powyższe twierdzenie mówi, że gwiazdy wyznaczają przestrzenie rzutowe.

3.3 Układy

Definicja 3.7. Niech $B \in \text{Sub}_{k+1}(V)$. Zbiór

$$(B]_k := (B] \cap \text{Sub}_k(V) = \{U \in \text{Sub}_k(V) : U \subset B\},$$

nazywamy *układem*.

W zasadzie powyższa definicja jest nadmiarowa, gdyż układ to zbiór wszystkich punktów na prostej. Wprowadzamy ją dla zachowania „symetrii”, zgodnie z ogólną teorią przestrzeni pęków i Grassmannianów ponieważ gwiazdy i układy pełnią tam bardzo ważną rolę.

Wprowadzimy teraz pojęcie typowe dla przestrzeni pęków. W definicji tej używany jest język przestrzeni wektorowej V , a więc definiowane pojęcie jest „zewnątrzne” z punktu widzenia naszego Grassmannianu.

Definicja 3.8. Niech $H \in \text{Sub}_{k-1}(V)$, $B \in \text{Sub}_{k+1}(V)$ oraz $H \subset B$. Wówczas zbiór

$$\mathbf{p}(H, B) := [H, B]_k$$

nazywamy *k-pękiem o wierzchołku H i podstawie B* . Rodzinę wszystkich k -pęków w V oznaczamy przez $\mathcal{P}_k(V)$.

Zwróćmy uwagę, że powyższa definicja w zasadzie pokrywa się z 1.14, gdy zauważymy, że $H = U_1 \cap U_2$ i $B = U_1 + U_2$ dla pewnych różnych punktów U_1, U_2 z $\mathbf{p}(H, B)$. Ponadto prawdziwa jest inkluzja

$$\mathbf{p}(H, B) \subset (B]_k,$$

co oznacza, że k -pęk to fragment prostej.

Dla wygody i skrócenia notacji, przyjmijmy teraz oznaczenie na zbiór punktów współliniowych z ustalonym punktem U :

$$U^\sim := \{W \in \text{Sub}_k(V) : W \sim U\}.$$

Lemat 3.9. Niech $B \in \text{Sub}_{k+1}(V)$ i $U \in \text{Sub}_k(V)$. Jeśli punkt U nie leży na prostej B i mamy dwa różne punkty U_1, U_2 na prostej B współliniowe z U , to

$$U^\sim \cap (B]_k = \mathbf{p}(U_1 \cap U_2, B).$$

Dowód. Niech $H := U_1 \cap U_2$. Z 2.1 mamy $\dim(H) = k - 1$. Z założenia U_1, U_2, U tworzą trójkąt, więc z 3.2

$$H = U_1 \cap U_2 = U \cap U_1. \quad (3.5)$$

„ \subseteq ” Weźmy $W \in U^\sim \cap (B]_k$. Zatem

$$W \subset B. \quad (3.6)$$

Zauważmy, że W, U, U_1 tworzą trójkąt. A więc z 3.1 mamy, że

$$\dim(W \cap U \cap U_1) = k - 1. \quad (3.7)$$

Zauważmy teraz, że z (3.7) i (3.5) mamy $H = W \cap U \cap U_1$. Stąd $H \subset W$. To razem z (3.6) daje

$$W \in \mathbf{p}(H, B).$$

„ \supseteq ” Weźmy teraz $W \in \mathbf{p}(H, B)$. Zatem $H \subseteq W \subseteq B$. Z drugiej inkluzji wynika, że $W \in (B)_k$. Trzeba pokazać, że $W \sim U$. Mamy, że $W \in [H]_k$ bo $\mathbf{p}(H, B) \subseteq [H]_k$. Z (3.5) mamy $U \in [H]_k$. Zatem W i U są współliniowe jako elementy kliky $[H]_k$. \square

Powyższy lemat ma wiele ciekawych konsekwencji. Po pierwsze, mówi on niemal wprost, że nasz Grassmannian $\mathbf{G}_k(V)$ nie jest przestrzenią gamma. Równość występującą w nim można uznać za geometryczną definicję pęku, wyrażalną w języku wewnętrznym naszego Grassmannianu. Wynika z niego też, że proste tego Grassmannianu są maksymalnymi klikami.

Stwierdzenie 3.10. *Jeśli $B \in \text{Sub}_{k+1}(V)$, to $(B)_k$ jest maksymalną kliką w $\mathbf{G}_k(V)$.*

DOWÓD. Jak to już zostało powiedziane zbiór $(B)_k$ jest zbiorem wszystkich punktów na prostej B z $\mathbf{G}_k(V)$, zatem jest to klika. Aby pokazać, że jest to klika maksymalna przypuścimy nie wprost, że istnieje punkt U poza prostą B taki, że $(B)_k \cup \{U\}$ jest kliką. Weźmy dwa różne punkty U_1, U_2 z prostej B . Zauważmy, że punkty U, U_1, U_2 spełniają założenia 3.9. Przy $1 < k$, ale tak właśnie zakładamy w (3.4), mamy

$$\mathbf{p}(U_1 \cap U_2, B) \neq (B)_k,$$

co oznacza, że punkt U jest współliniowy tylko z pewnym właściwym podzbiorem zbioru punktów na prostej B , a mianowicie z pękiem $\mathbf{p}(U_1 \cap U_2, B)$. Tak więc zbiór $(B)_k \cup \{U\}$ nie może być kliką i dowód jest zakończony. \square

3.4 Kliki maksymalne

Stwierdzenie 3.11. *Jeśli \mathcal{K} jest kliką w $\mathbf{G}_k(V)$ to istnieje $H \in \text{Sub}_{k-1}(V)$ takie, że $\mathcal{K} \subseteq [H]_k$, lub istnieje $B \in \text{Sub}_{k+1}(V)$ takie, że $\mathcal{K} \subseteq (B)_k$.*

DOWÓD. Jeśli wszystkie punkty \mathcal{K} leżą na jednej prostej to $\mathcal{K} \subseteq (B)_k$ dla pewnego $B \in \text{Sub}_{k+1}(V)$. Załóżmy więc, że w \mathcal{K} istnieją trzy punkty U_1, U_2, U_3 tworzące trójkąt. Z 3.1 mamy

$$H := U_1 \cap U_2 \cap U_3, \quad \text{takie, że } H \in \text{Sub}_{k-1}(V). \quad (3.8)$$

Weźmy dowolny $U \in \mathcal{K}$. Pokażemy, że $H \subset U$. Zauważmy, że zawsze istnieją takie $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$, że U, U_i, U_j tworzą trójkąt. Z 3.2 otrzymujemy, że $H = U_i \cap U_j \subset U$ i nasz dowód jest zakończony. \square

Podsumujemy wyniki 3.5, 3.10 oraz 3.11 w następującym twierdzeniu charakteryzującym maksymalne kliki w $\mathbf{G}_k(V)$.

Twierdzenie 3.12. *\mathcal{K} jest maksymalną kliką w $\mathbf{G}_k(V)$ wtedy i tylko wtedy, gdy albo*

$$\mathcal{K} = [H]_k$$

dla pewnego $H \in \text{Sub}_{k-1}(V)$, albo gdy

$$\mathcal{K} = (B)_k$$

dla pewnego $B \in \text{Sub}_{k+1}(V)$.

Powyższe twierdzenie mówi, że w $\mathbf{G}_k(V)$ mamy dwie rodziny maksymalnych klik: gwiazdy i proste (układy).

Zanotujmy dwa fakty mówiące jak można rozpiąć maksymalną klikę.

Fakt 3.13. *Trzy parami różne i parami współliniowe punkty leżą na jednej prostej albo tworzą trójkąt. W obu przypadkach wyznaczają one jednoznacznie maksymalną klikę w $\mathbf{G}_k(V)$.*

Fakt 3.14. *Prostej z $\mathbf{G}_k(V)$, czyli układu, nie da się rozszerzyć do gwiazdy.*

3.5 Przekroje klik

W tym podrozdziale zbadamy jak przecinają się maksymalne kliki, różnych typów i tego samego typu.

Lemat 3.15. *Niech $\mathcal{S} = [H]_k$ będzie gwiazdą oraz $\mathcal{T} = (B)_k$ układem. Wówczas albo $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \emptyset$, albo $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \mathbf{p}(H, B)$.*

DOWÓD. Z teorii krat wiemy, że

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = [H + \Theta, V \cap B]_k = [H, B]_k$$

i tu mamy dwie możliwości. Albo $H \subseteq B$ albo nie. W pierwszym przypadku odcinek $[H, B]_k$ jest k -pękiem, zaś w drugim odcinek $[H, B]_k$ jest pusty. \square

W częściowej przestrzeni prostych, w której rozróżnialne są dwie rodziny klik, powiedzmy gwiazd i układów, można zdefiniować pęk jako niepuste przecięcie gwiazdy i układu. Jest to formalnie jeszcze inny sposób definicji k -pęku w naszym Grassmannianie.

Lemat 3.16. *Dla dowolnego k -pęku p w $\mathbf{G}_k(V)$ istnieje dokładnie jedna gwiazda \mathcal{S} i jeden układ \mathcal{T} takie, że $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = p$.*

DOWÓD. Rozważmy różne $U_1, U_2 \in p$ oraz $H := U_1 \cap U_2$ i $B := U_1 + U_2$. Z 3.8 $p = \mathbf{p}(H, B)$. Zatem gwiazda $[H]_k$ zawiera pęk p oraz układ $(B)_k$ zawiera ten pęk. Zatem z 3.15 mamy $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = p$. \square

Biorąc pod uwagę 3.15, poniższe twierdzenie mówi to samo co 3.9 tylko trochę inaczej.

Stwierdzenie 3.17. *Niech U_1, U_2, U_3 będą wierzchołkami trójkąta. Jeśli U leży na prostej $\overline{U_1U_2}$ i $U \sim U_3$, to*

$$U \in (U_1 + U_2]_k \cap [U_1 \cap U_2 \cap U_3]_k.$$

DOWÓD. Wniosek z 3.4. □

Lemat 3.18. *Niech $\mathcal{S}_i = [H_i]_k$ dla $H_i \in \text{Sub}_{k-1}(V)$. Wtedy*

$$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \begin{cases} \emptyset, & \text{gdy } \dim(H_1 + H_2) > k, \\ \{H_1 + H_2\}, & \text{gdy } \dim(H_1 + H_2) = k, \\ \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2, & \text{gdy } \dim(H_1 + H_2) = k - 1, \text{ tzn. } H_1 = H_2. \end{cases}$$

DOWÓD. Z teorii krat

$$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [H_1 + H_2, V \cap V]_k = [H_1 + H_2, V]_k.$$

Przyjrzyjmy się wymiarowi $H_1 + H_2$. Najmniejszy możliwy wynosi $k - 1$ tylko, gdy $H_1 = H_2$, a tym samym $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$. Gdy wymiar ten wynosi k , to $H_1 + H_2$ jest jedynym punktem w odcinku $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. W pozostałych przypadkach, czyli gdy rozważany wymiar jest większy od k , nasz odcinek $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ jest pusty bo nie znajdziemy w nim elementów k -wymiarowych. □

Dla kompletu podajemy jeszcze fakt dualny do 3.18, wyrażający w terminach układów znany skądinąd fakt, że $\mathbf{G}_k(V)$ jest częściową przestrzenią prostych.

Fakt 3.19. *Niech $\mathcal{T}_i = [B_i]_k$ dla $B_i \in \text{Sub}_{k+1}(V)$. Wtedy*

$$\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \begin{cases} \emptyset, & \text{gdy } \dim(B_1 \cap B_2) < k, \\ \{B_1 \cap B_2\}, & \text{gdy } \dim(B_1 \cap B_2) = k, \\ \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2, & \text{gdy } \dim(B_1 \cap B_2) = k + 1, \text{ tzn. } B_1 = B_2. \end{cases}$$

Rozdział 4

Zanurzenia

4.1 Kolineacje

Zacznijmy od przypomnienia kilku znanych pojęć i faktów z algebry i geometrii.

Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad niekoniecznie przemiennymi ciałami odpowiednio F_V, F_W .

Definicja 4.1. Niezerowe odwzorowanie $\varphi: V \rightarrow W$ jest *półliniowe*, jeśli istnieje taki izomorfizm $\mu: F_V \rightarrow F_W$, że

- (i) $\varphi(u + w) = \varphi(u) + \varphi(w)$,
- (ii) $\varphi(\lambda u) = \mu(\lambda)\varphi(u)$.

dla dowolnych wektorów $u, w \in V$ oraz $\lambda \in F_V$. Mówimy także, że φ jest μ -półliniowe.

Twierdzenie 4.2 (Podstawowe twierdzenie geometrii rzutowej). *Jeśli f jest kolineacją $\mathbf{P}(V)$ na $\mathbf{P}(W)$, to istnieje taka μ -półliniowa bijekcja $\varphi_\mu: V \rightarrow W$, że $f(U) = \varphi_\mu(U)$ dla $U \in \text{Sub}_1(V)$.*

Gdy f jest dane również σ -półliniową bijekcją $\psi_\sigma: V \rightarrow W$, to ψ_σ jest proporcjonalne do φ_μ , co oznacza, że istnieje taki skalar $\lambda \in F_V$, że

$$\psi_\sigma(U) = \varphi_\mu(\lambda u) \quad \text{oraz} \quad \sigma(\alpha) = \mu(\lambda\alpha\lambda^{-1})$$

dla każdego $u \in V$ i $\alpha \in F_V$.

Ustalmy liczby naturalne k, m tak, aby

$$1 < k < \dim(V) - 1 \quad \text{oraz} \quad 1 < m < \dim(W) - 1. \quad (4.1)$$

Dalej rozważamy Grassmanniany rzutowe $\mathbf{G}_k(V)$ i $\mathbf{G}_m(W)$.

Niech $F = (f, g)$ gdzie

$$\begin{aligned} f &: \text{Sub}_k(V) \rightarrow \text{Sub}_m(W), \\ g &: \text{Sub}_{k+1}(V) \rightarrow \text{Sub}_{m+1}(W) \end{aligned}$$

będzie kolineacją $\mathbf{G}_k(V)$ na $\mathbf{G}_m(W)$, w sensie definicji 1.7.

Lemat 4.3. *Jeśli S jest gwiazdką, a T układem w $\mathbf{G}_k(V)$, to $f(S)$ jest gwiazdką i $f(T)$ jest układem w $\mathbf{G}_m(W)$.*

DOWÓD. Z definicji kolineacji 1.7 obrazem prostej musi być prosta, czyli obrazem układu jest zawsze układ, natomiast z 1.10 oraz 3.12 obrazem gwiazdy musi być gwiazda. \square

4.2 Obraz przy zanurzeniu

Stwierdzenie 4.4. *Kolineacja $F = (f, g)$ indukuje kolineację $F' = (h, f)$ z $\mathbf{G}_{k-1}(V)$ na $\mathbf{G}_{m-1}(W)$ taką, że dla $U \in \text{Sub}_k(V)$ i $H_i \in \text{Sub}_{k-1}(V)$,*

$$\text{jeśli } U = H_1 + H_2 \text{ to } f(U) = h(H_1) + h(H_2). \quad (4.2)$$

DOWÓD. Ponieważ wierzchołek $H \in \text{Sub}_{k-1}(V)$ jednoznacznie wyznacza gwiazdkę $[H]_k$ to możemy te dwa obiekty ze sobą utożsamiać. Z 4.3 obrazem gwiazdy $[H]_k$ w $\mathbf{G}_k(V)$ jest pewna gwiazda $[H']_m$ w $\mathbf{G}_m(W)$. Dostajemy więc nową bijekcję

$$h: \text{Sub}_{k-1}(V) \rightarrow \text{Sub}_{m-1}(W),$$

taką, że

$$f([H]_k) = [h(H)]_m.$$

Sprawdzimy teraz warunek (1.1) z definicji 1.7 dla F' . W tym celu weźmy punkt H i prostą U w $\mathbf{G}_{k-1}(V)$, czyli $H \in \text{Sub}_{k-1}(V)$ oraz $U \in \text{Sub}_k(V)$. Załóżmy, że $H \subset U$. To oznacza, że U jako punkt $\mathbf{G}_k(V)$ jest w gwieździe $[H]_k$, czyli $U \in [H]_k$. Mamy zatem równoważny warunek $f(U) \in f([H]_k) = [h(H)]_m$. To z definicji gwiazdy jest z kolei równoważne temu, że $h(H) \subset f(U)$.

Załóżmy teraz, że $U = H_1 + H_2$ jak wyżej w warunku (4.2) naszego twierdzenia. To znaczy, że gwiazdy wyznaczone przez H_1, H_2 mają wspólny punkt U (por. 3.18), innymi słowy

$$[H_1]_k \cap [H_2]_k = \{U\}.$$

Ponieważ f i h to bijekcje więc z 3.18 mamy

$$\begin{aligned} \{f(U)\} &= f([H_1]_k) \cap f([H_2]_k) = \\ &= [h(H_1)]_m \cap [h(H_2)]_m = \{h(H_1) + h(H_2)\}, \end{aligned}$$

co kończy dowód. \square

Stwierdzenie 4.5. *Jeśli $\mathbf{G}_k(V) \cong \mathbf{G}_m(W)$, to $\dim(W) = \dim(V)$ i $m = k$.*

DOWÓD. Rozważmy gwiazdę S w $\mathbf{G}_k(V)$. Z 3.6 gwiazda S jest izomorficzna z przestrzenią rzutową wymiaru $\dim(V) - k$. Jej obraz $f(S)$ też jest gwiazdą w $\mathbf{G}_m(W)$ a odpowiadająca jej przestrzeń rzutowa ma wymiar $\dim(W) - m$. Musi być

$$\dim(V) - k = \dim(W) - m.$$

Teraz rozważmy prostą B w $\mathbf{G}_k(V)$. Niech X będzie zbiorem $k+1$ punktów z B , z których żadne 3 nie leżą w jednym k -pęku. Równoważnie, na mocy 3.9, dla żadnych 3 punktów $U_1, U_2, U_3 \in X$ nie istnieje punkt U spoza B , taki, że $U_i \sim U$, $i = 1, 2, 3$. Albo jeszcze inaczej, żadne 3 punkty z X nie leżą w jednej gwieździe. Algebraicznie ta konstrukcja wygląda tak. Bierzemy bazę $\{e_1, e_2, \dots, e_{k+1}\}$ podprzestrzeni B . Każde k wektorów z e_1, e_2, \dots, e_{k+1} rozpina k -podprzestrzeń będącą punktem na prostej B w $\mathbf{G}_k(V)$. Zbiór tych punktów to X . Tutaj widać, że $|X| = \binom{k+1}{k} = \binom{k+1}{1} = k+1$. Obrazem takiego „sympleksu” X przy kolineacji F jest analogiczny „sympleks” w $\mathbf{G}_m(W)$, a więc musi być $k \leq m$. Startując od „sympleksu” X' w $\mathbf{G}_m(W)$ podobnie pokażemy, że $m \leq k$. Ostatecznie mamy $k = m$ oraz $\dim(V) = \dim(W)$. \square

Twierdzenie 4.6. *Kolineacja $F = (f, g)$ indukuje odwzorowanie półliniowe $\varphi: V \rightarrow W$ takie, że $f(U) = \varphi(U)$ dla $U \in \text{Sub}_k(V)$ oraz $g(B) = \varphi(B)$ dla $B \in \text{Sub}_{k+1}(V)$.*

DOWÓD. Z 4.5 nasza kolineacja F działa z $\mathbf{G}_k(V)$ na $\mathbf{G}_k(W)$ przy czym $\dim(W) = \dim(V)$. Dzięki 4.4 mamy ciąg kolineacji

$$F_i = (f_i, g_i)$$

z $\mathbf{G}_{k-i}(V)$ na $\mathbf{G}_{k-i}(W)$ dla $i = 0, 1, \dots, k-1$. Zauważmy przy tym, że

$$F_0 = (f_0, g_0) = (f, g) = F$$

oraz

$$g_i = f_{i-1} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, k-1. \quad (4.3)$$

Ostatnia kolineacja w tym ciągu, dla $i = k-1$, to kolineacja między przestrzeniami rzutowymi bo jak wiemy $\mathbf{G}_1(V)$ i $\mathbf{G}_1(W)$ to przestrzenie rzutowe. Z 4.2 mamy zatem półliniową bijekcję $\varphi: V \rightarrow W$ taką, że

$$\begin{aligned} f_{k-1}(U) &= \varphi(U) \quad \text{dla} \quad U \in \text{Sub}_1(V), \\ g_{k-1}(U) &= \varphi(U) \quad \text{dla} \quad U \in \text{Sub}_2(V). \end{aligned}$$

Z (4.2) oraz (4.3) mamy

$$\begin{aligned} f_i &= g_{i+1}, \\ g_i(U) &= g_{i+1}(H_1) + g_{i+1}(H_2) = \varphi(H_1) + \varphi(H_2) = \varphi(U), \end{aligned}$$

dla $U \in \text{Sub}_{k-i}(V)$, $H_1, H_2 \in \text{Sub}_{k-i-1}(V)$ takich, że $U = H_1 + H_2$. Aplikując te równości kolejno dla $i = k - 2, k - 1, \dots, 0$ otrzymamy

$$\begin{aligned} f(U) &= f_0(U) = g_1(U) = \varphi(U), & \text{dla } U \in \text{Sub}_k(V), \\ g(U) &= g_0(U) = \varphi(U), & \text{dla } U \in \text{Sub}_{k+1}(V) \end{aligned}$$

i dowód jest zakończony. \square

Definicja 4.7. Podstrukturę $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ w $\mathbf{G}_k(V)$ nazywamy *podstrukturą Grassmanna*, gdy spełnia ona następujące warunki:

- (A1) dla każdych dwóch różnych punktów $U_1, U_2 \in S$ i punktu U_3 takiego, że U_1, U_2, U_3 tworzą trójkąt, każdy punkt prostej $\overline{U_1 U_2}$ współliniowy z U_3 należy do S ,
- (A2) podstruktura $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest spójna,
- (A3) jeśli \mathcal{S} jest gwiazdą i \mathcal{T} zbiorem wszystkich punktów na prostej takim, że $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, $|\mathcal{S} \cap \mathcal{S}| \geq 2$ i $|\mathcal{T} \cap \mathcal{S}| \geq 2$, to albo $S \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \emptyset$, albo $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \subseteq S$.

Warunek (A1) w powyższej definicji oznacza, że podstruktura $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest domknięta na pęki. Wynika to z 3.15 i 3.17.

Stwierdzenie 4.8. *Podstruktura odcinkowa w $\mathbf{G}_k(V)$ jest podstrukturą Grassmanna.*

DOWÓD. Niech $Z, Y \in \text{Sub}(V)$ takie, że $\dim(Z) < k$ oraz $k + 1 < \dim(Y)$. Pokażemy, że $\langle [Z, Y]_k, [Z, Y]_{k+1} \rangle$ jest podstrukturą Grassmanna. Sprawdzamy kolejne warunki definicji 4.7.

(A1) Weźmy $U_1, U_2 \in [Z, Y]_k$ oraz U_3 takie, że U_1, U_2, U_3 tworzą trójkąt. Niech $U \in \overline{U_1 U_2}$ i $U \sim U_3$. Pokażemy, że $U \in [Z, Y]_k$, czyli $Z \subseteq U \subseteq Y$.

Z 3.17

$$U \in (U_1 + U_2)_k \cap [U_1 \cap U_2 \cap U_3]_k,$$

co jest równoznaczne z tym, że

$$\begin{aligned} U \in [\Theta, U_1 + U_2]_k \cap [U_1 \cap U_2 \cap U_3, V]_k &= [U_1 \cap U_2 \cap U_3, U_1 + U_2]_k = \\ &= [U_1 \cap U_2, U_1 + U_2]_k. \end{aligned}$$

Z tego, że $Z \subseteq U_1, U_2$ mamy $Z \subseteq U_1 \cap U_2$. Mamy więc $Z \subseteq U$. Z drugiej strony z tego, że $U_1 + U_2 \subseteq Y$ mamy $U \subseteq Y$, co kończy dowód tego warunku.

(A2) Weźmy dwa dowolne punkty $U_1, U_2 \in [Z, Y]_k$. Wówczas mamy $Z \subseteq U_1, U_2 \subseteq Y$. Niech $U := U_1 \cap U_2$. Zatem

$$U_1 = U \oplus \langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle, \quad U_2 = U \oplus \langle b_1, b_2, \dots, b_r \rangle,$$

gdzie $k = r + \dim(U)$ oraz a_1, a_2, \dots, a_r są liniowo niezależne i żadna kombinacja a_1, a_2, \dots, a_r nie jest w U (są liniowo niezależne nad U) oraz b_1, b_2, \dots, b_r mają tę samą własność.

Weźmy

$$\begin{aligned} P_0 &:= U_1 = U \oplus \langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle, \\ P_1 &:= U \oplus \langle b_1, a_2, \dots, a_r \rangle, \\ P_2 &:= U \oplus \langle b_1, b_2, a_3, \dots, a_r \rangle, \\ &\vdots \\ P_{r-1} &:= U \oplus \langle b_1, \dots, b_{r-1}, a_r \rangle, \\ P_r &:= U_2 = U \oplus \langle b_1, b_2, \dots, b_r \rangle. \end{aligned}$$

Gdyby $P_{i-1} = P_i$ dla jakiegoś $i = 1, \dots, r$, to mielibyśmy

$$b_i = u + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{i-1} b_{i-1} + \alpha_i a_i + \dots + \alpha_r a_r$$

dla pewnych $u \in U$ i skalarów $\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \alpha_i, \dots, \alpha_r$. Wówczas

$$U_2 \ni x := b_i - \beta_1 b_1 - \dots - \beta_{i-1} b_{i-1} = u + \alpha_i a_i + \dots + \alpha_r a_r \in U_1,$$

co oznacza, że $x \in U_1 \cap U_2 = U$ i mamy sprzeczność z liniową niezależnością b_1, b_2, \dots, b_r nad U .

W takim razie $\dim(P_{i-1} \cap P_i) = k - 1$, a więc $P_{i-1} \sim P_i$ dla $i = 1, \dots, r$. Ponadto $Z \subseteq P_{i-1} \sim P_i \subseteq Y$ dla $i = 1, \dots, r$. Tak, więc istnieje wymagana łamana o wierzchołkach $U_1 = P_0, \dots, P_r = U_2$ zawarta w $[Z, Y]_k$.

(A3) Weźmy $\mathcal{S} = [H]_k$ i $\mathcal{T} = [B]_k$ gdzie $H \in \text{Sub}_{k-1}(V)$, $B \in \text{Sub}_{k+1}(V)$. Zakładamy, że

$$|\mathcal{S} \cap [Z, Y]_k| \geq 2, \quad (4.4)$$

$$|\mathcal{T} \cap [Z, Y]_k| \geq 2, \quad (4.5)$$

$$[Z, Y]_k \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset. \quad (4.6)$$

Z (4.6) mamy $H \subseteq B$.

Pokażemy, że $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \subseteq [Z, Y]_k$. Weźmy więc $U \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Mamy sprawdzić, że $Z \subseteq U \subseteq Y$. Z 3.15 mamy

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = [H, B]_k = \mathbf{p}(H, B),$$

więc $H \subset U \subset B$. Ponieważ

$$[H, V]_k \cap [Z, Y]_k = [H + Z, Y]_k,$$

więc z (4.4) mamy $Z \subseteq H$. Podobnie

$$[\Theta, B]_k \cap [Z, Y]_k = [Z, Y \cap B]_k,$$

więc z (4.5) mamy $B \subseteq Y$. W rezultacie $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = [H, B]_k \subseteq [Z, Y]_k$. \square

Lemat 4.9. *Jeśli $F = (f, g)$ jest zanurzeniem $\mathbf{G}_k(V)$ w $\mathbf{G}_m(W)$ zachowującym pęki, to $\text{Im}(F)$ jest podstrukturą Grassmanna w $\mathbf{G}_m(W)$.*

DOWÓD. Aby pokazać, że $\text{Im}(F)$ jest podstrukturą Grassmanna sprawdzimy warunki z definicji 4.7.

(A1) Wynika z dodatkowego założenia o naszym zanurzeniu F .

(A2) Niech $U'_1, U'_2 \in \text{Im}(f)$. W $\mathbf{G}_k(V)$ mamy punkty U_1, U_2 takie, że $f(U_1) = U'_1$, $f(U_2) = U'_2$. Grassmannian rzutowy jest spójny więc w $\mathbf{G}_k(V)$ istnieje ciąg punktów $U_1 = D_1, D_2, \dots, D_r = U_2$ taki, że $D_i \sim D_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, r-1$, łączący U_1 z U_2 . Jego obraz $f(D_1), f(D_2), \dots, f(D_r)$ łączy punkty U'_1, U'_2 z uwagi na 1.11(ii). Ponadto z 1.12 mamy równość $g(\overline{D_i D_{i+1}}) = \overline{f(D_i) f(D_{i+1})}$, a więc nasza łamana łącząca U'_1 z U'_2 leży w $\text{Im}(F)$.

(A3) Weźmy $\mathcal{S} = [H]_m$ i $\mathcal{T} = [B]_m$, gdzie $H \in \text{Sub}_{m-1}(W)$, $B \in \text{Sub}_{m+1}(W)$. Zakładamy, że

$$|\mathcal{S} \cap \text{Im}(f)| \geq 2, \quad (4.7)$$

$$|\mathcal{T} \cap \text{Im}(f)| \geq 2, \quad (4.8)$$

$$\text{Im}(f) \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset. \quad (4.9)$$

Z powyższych założeń mamy

$$U' \in \text{Im}(f) \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T}, \quad U'_s \in \mathcal{S} \cap \text{Im}(f), \quad U'_t \in \mathcal{T} \cap \text{Im}(f)$$

takie, że $U'_s \neq U' \neq U'_t$. Ponieważ są to punkty w obrazie F więc niech $U, U_s, U_t \in \text{Sub}_k(V)$ takie, że $f(U) = U'$, $f(U_s) = U'_s$, $f(U_t) = U'_t$. W $\mathbf{G}_k(V)$ punkty U, U_s wyznaczają gwiazdę $\mathcal{S}_0 := [U \cap U_s]_k$, natomiast punkty U, U_t wyznaczają prostą $B_0 := U + U_t$. Niech $\mathcal{T}_0 := [B_0]_k$.

Przy naszych założeniach (4.1) w \mathcal{S}_0 jest trójkąt, więc trójkąt musi być też w $f(\mathcal{S}_0)$. Zatem $f(\mathcal{S}_0)$ rozszerza się do gwiazdy w całej przestrzeni $\mathbf{G}_m(W)$. Ponieważ $U', U'_s \in f(\mathcal{S}_0)$, \mathcal{S} , więc z 3.18 musi być

$$f(\mathcal{S}_0) \subseteq \mathcal{S}.$$

Ponieważ z kolei $U', U'_t \in f(\mathcal{T}_0)$, \mathcal{T} , więc mamy

$$f(\mathcal{T}_0) \subseteq \mathcal{T}.$$

Z 3.15 przekrój $\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{T}_0$ jest pękiem bo $U \in \mathcal{S}_0 \cap \mathcal{T}_0$. Zauważmy, że

$$f(\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{T}_0) = f(\mathcal{S}_0) \cap f(\mathcal{T}_0) = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$$

bo przy F obrazem pęku jest pęk, a w ten sposób $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \subseteq \text{Im}(F)$. \square

Przytoczymy teraz twierdzenie charakteryzujące podstruktury odcinkowe w języku wewnętrznym $\mathbf{G}_k(V)$.

Twierdzenie 4.10 (Rybak R. [3]). *Podstruktura w Grassmannianie rzutowym $\mathbf{G}_k(V)$ jest podstrukturą odcinkową wtedy i tylko wtedy, gdy jest podstrukturą Grassmanna.*

Twierdzenie 4.11. *Jeśli $F = (f, g)$ jest zanurzeniem $\mathbf{G}_k(V)$ w $\mathbf{G}_m(W)$ zachowującym pęki, to istnieją $Z, Y \in \text{Sub}(W)$, takie że:*

$$\text{Im}(F) = \langle [Z, Y]_m, [Z, Y]_{m+1} \rangle.$$

DOWÓD. Z 4.10 $\text{Im}(F)$ jest podstrukturą Grassmanna. Więc z 4.8 istnieją zadane Z, Y . \square

Bibliografia

- [1] Chrabąszcz A., *Podprzestrzenie w Grassmannianach kombinatorycznych*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, Białystok, 2009.
- [2] Kudzin M., *Zanurzenia przestrzeni pęków w afinicznych przestrzeniach pęków*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, Białystok, 2011.
- [3] Rybak R., *Podprzestrzenie odcinkowe w kracie rzutowej i ich charakteryzacja*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, Białystok, 2011.
- [4] Sadowski P., *Pęki w przestrzeni rzutowej*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, Białystok, 2011.
- [5] Żynel M., *Rzutowania w kracie podprzestrzeni przestrzeni wektorowej*, praca doktorska, Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Warszawa, 2003.