Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Elżbieta Zieziula

Zanurzenia Grassmannianów w Grassmannianach podprzestrzeni przestrzeni afinicznej

Praca magisterska napisana
pod kierunkiem
dr. hab. Krzysztofa Prażmowskiego, prof. UwB

Białystok 2011

Dziękuję wszystkim tym,
którzy przyczynili się
do napisania niniejszej pracy,
w szczególności dr Mariuszowi Żynelowi
za cierpliwość i nie ocenioną pomoc
oraz za cenny wkład
prof Krzysztofowi Prażmowskiemu.

Elżbieta Zieziula

Spis treści

Wstęp

W geometrii bada się struktury podprzestrzeni. Wprowadzając odpowiednio relację incydencji na zbiorze podprzestrzeni ustalonego wymiaru w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$, możemy dostać przestrzeń pęków albo Grassmannian. W mojej pracy badam Grassmanniany afiniczne i ich zanurzenia.

W **rozdziale pierwszym** zajęłam się wprowadzeniem podstawowych definicji niezbędnych w pracy oraz omówieniem własności przestrzeni afinicznych. Pojawia się też tu ogólna postać Grassmannianu afinicznego czyli struktura postaci:

$$\mathbf{G}_k(\mathfrak{A}) = \langle \mathrm{Sub}_k(\mathfrak{A}), \mathrm{Sub}_{k+1}(\mathfrak{A}), \subset \rangle,$$

gdzie $\mathrm{Sub}_k(\mathfrak{A})$ to zbiór wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni $\mathfrak{A}$.

W kolejnym **drugim rozdziale** pracy, badam *podstruktury odcinkowe*. Na wstępie, wprowadzam nowe pojęcia odcinka właściwego oraz odcinka równoległych (niewłaściwego). Następnie sprawdzam czy podstruktura odcinkowa jest podstrukturą w Grassmannianie afinicznym oraz dowodzę tutaj twierdzenia, które mówią, że w zależności od wyboru wyjściowego odcinka, podstruktura odcinkowa z dokładnością do izomorfizmu jest albo Grassmannianem afinicznym (por. 2.9) albo Grassmannianen rzutowym (por. 2.10). Twierdzenia 2.9, 2.10 oraz 2.12 pokazują, że odcinki właściwe z niepustym wierzchołkiem odpowiadają Grassmannianom rzutowym, natomiast odcinki właściwe z pustym wierzchołkiem (ideały główne) odpowiadają Grassmannianom afinicznym. W przypadku odcinków równoległych (niewłaściwych) zawsze dostajemy Grassmannian afiniczny.

W **rozdziale trzecim** pokazuję jaka jest postać klik oraz maksymalnych klik. Istotną rolę pełnią tutaj trójkąty bo wyznaczają one maksymalne kliki. W Grassmannianie afinicznym mamy dwa typy trójkątów. Twierdzenie 3.14 daje postać analityczną maksymalnych klik. Mamy tutaj trzy typy klik maksymalnych: *gwiazda właściwa*, *układ* (łańcuch, zbiór wszystkich punktów na prostej) oraz *gwiazda niewłaściwa*. Ważne są przekroje tych maksymalnych klik. Jako niepuste przekroje maksymalnych klik otrzymujemy punkty albo *pęki*. Te ostatnie otrzymujemy w wyniku przecinania gwiazd z układami.

Czwarty rozdział poświęcony jest badaniu kolineacji i zanurzeń Grassmannianów afinicznych. Kolineacja to para bijekcji, jedna działa na zbiorze punktów, druga na zbiorze prostych tak, że zachowana jest relacja incydencji punktu z prostą. Zanurzenie natomiast jest tak zdefiniowane, aby obraz zanurzanej przestrzeni był podstrukturą domkniętą, izomorficzną z wyjściową przestrzenią. Dodajemy także mocne założenie, że zanurzenia zachowują pęki.

W twierdzeniu 4.1 dowodzę, że kolineacje między Grassmannianami afinicznymi zachowują typy maksymalnych klik. Twierdzenia 4.3 i 4.6 pokazują, że każda kolineacja wyznaczona jest przez złożenie translacji i półliniowej bijekcji. Ostatnie, najważniejsze twierdzenie 4.8 mówi, że obrazem Grassmannianu afinicznego przy zanurzeniu w inny Grassmannian afiniczny jest podstruktura odcinkowa. W dowodzie wykorzystuję pojęcie *podstruktury Grassmanna*. Idea wprowadzenia tego pojęcia była taka, aby w syntetyczny sposób scharakteryzować podprzestrzenie odcinkowe, które defniuje się odwołując do przestrzeni afinicznej nad jaką rozważany jest Grassmannian.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia

1.1 Przestrzeń afiniczna

Zaczynamy od zdefiniowania podstawowego dla naszych dalszych rozważań pojęcia.

Definicja 1.1. Niech S i $\mathcal{L}$ będą niepustymi zbiorami. Elementy S nazywamy punktami, natomiast elementy $\mathcal{L}$ nazywamy prostymi. Niech $a \in S, k \in \mathcal{L}$, mówimy że punkt a *incyduje* z prostą k i piszemy $a \mid k$. Strukturę $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ nazywamy *częściową przestrzenią prostych* wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) jeśli $a, b \in S$, $k, l \in \mathcal{L}$ i $a, b \mid l, k$ to $a = b$ lub $k = l$,

(ii) jeśli $k \in \mathcal{L}$ to istnieją $a, b \in S$ takie, że $a \neq b$ i $a, b \mid k$.

Niech $S = \{a, b, c\}$ i $\mathcal{L} = \{k, l, m\}$, gdzie $k = \{a, b\}$, $l = \{a, c\}$, $m = \{b, c\}$, czyli bierzemy strukturę z trzema punktami a, b, c i trzema prostymi k, l, m. Na każdej prostej są po dwa punkty. Proste k, l mają jeden punkt wspólny a, proste k, m punk wspólny c oraz proste l, m punkt wspólny b. Ta konkretna struktura $\langle S, \mathcal{L}, \in \rangle$ jest przykładem częściowej przestrzeni prostych.

Od teraz przez $\mathfrak{A}$ będziemy oznaczać częściową przestrzeń prostych o zbiorze punktów S, o zbiorze prostych $\mathcal{L}$ i relacji incydencji $|$. Mówimy, że dwa punkty są *współliniowe* (połączalne), gdy incydują z jedną prostą (leżą na jednej prostej). Dodatkowo dla punktów $a, b \in S$ piszemy $a \sim b$, gdy a i b są współliniowe, a prostą przez nie wyznaczoną oznaczamy $\overline{a, b}$. Dualnie, dwie proste są *współpękowe* (przecinają się), gdy jest wspólny punkt, z ktorym incydują (przez który przechodzą). Dla takich prostych $k, l \in \mathcal{L}$ piszemy wtedy $k \sim l$. Zbiór wszystkich punktów incydujących z prostą $k \in \mathcal{L}$ (*łańcuch*) oznaczamy przez k^*.

Definicja 1.2. Jeśli każde dwa punkty częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A}$ są współliniowe, wtedy $\mathfrak{A}$ nazywana jest *przestrzenią prostych.*

Definicja 1.3. Mówimy, że podzbiór $X \subseteq S$ jest *podprzestrzenią* częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A}$, gdy jest domknięty na prowadzenie prostych, to znaczy, gdy dla dowolnej prostej $k \in \mathcal{L}$ takiej, że $|k^* \cap X| \geqslant 2$ mamy $k^* \subseteq X$.

Definicja 1.4. Niech $S' \subseteq S$, $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$. Mówimy, że $\langle S', \mathcal{L}' \rangle$ jest *podstrukturą* struktury $\langle S, \mathcal{L}, | \rangle$, gdy spełnione są następujące warunki:

(i) $(\forall\ a, b \in S)\ (\forall\ k \in \mathcal{L})\ \Big[(a, b \mid k\ \wedge\ a \neq b) \implies k \in \mathcal{L}'\Big]$,

(ii) $(\forall\ k, l \in \mathcal{L}')\ (\forall\ a \in S)\ \Big[(a \mid k, l\ \wedge\ k \neq l) \implies a \in S'\Big]$.

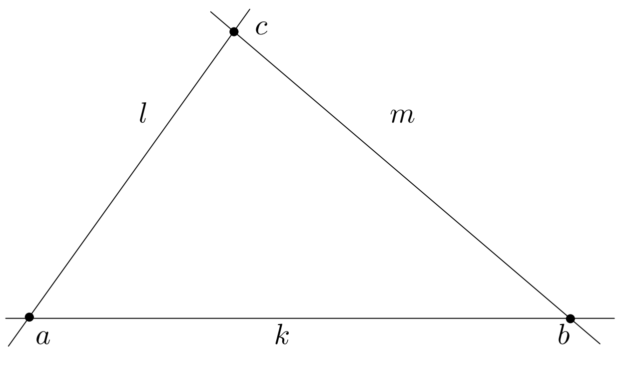
Niech $S' \subseteq S$, $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$. *Obcięcie* częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A}$ do $\langle S', \mathcal{L}' \rangle$ to:

$$\mathfrak{A} | \langle S', \mathcal{L}' \rangle := \langle S', \mathcal{L}', | \cap S' \times \mathcal{L}' \rangle.$$

Definicja 1.5. Mówimy, że podstruktura $\langle S', \mathcal{L}' \rangle$ częściowej przestrzeni prostych jest *spójna*, jeśli dla dowolnych różnych punktów $a, b \in S'$ istnieje łamana w tej podstrukturze łącząca a z b. Przez łamaną rozumiemy ciąg punktów takich, że dwa kolejne punkty w tym ciągu są połączalne prostą z $\mathcal{L}'$, formalnie: istnieją punkty $c_0, \ldots, c_r \in S'$ oraz proste $k_1, \ldots, k_r \in \mathcal{L}'$ takie, że $c_0 = a$, $c_r = b$ oraz $c_{i-1}, c_i \mid k_i$ dla $i = 1, \ldots, r$.

Definicja 1.6. Podstruktura częściowej przestrzeni prostych jest *mocna* wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa jej punkty są współliniowe.

Definicja 1.7. Niech punkty a, b, c będą parami różne, parami współliniowe ale niewspółliniowe, tzn. $a, b \mid k$ oraz $a, c \mid l$ oraz $b, c \mid m$, dla pewnych prostych k, l, m. Wtedy mówimy, że punkty a, b, c wraz z prostymi k, l, m tworzą *trójkąt* (rys. 1.1).

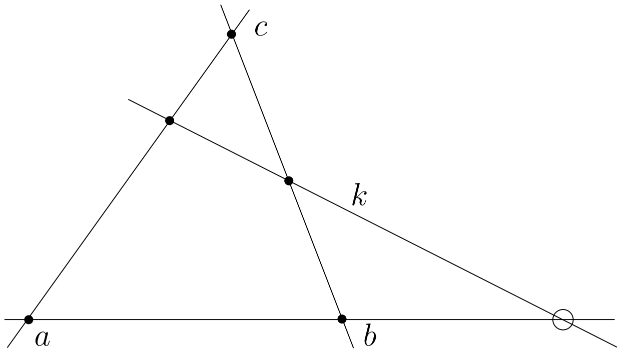


Rysunek 1.1: Trójkąt w częściowej przestrzeni prostych.

Definicja 1.8. Podzbiór zbioru punktów w częściowej przestrzeni prostych, w którym każde dwa punkty są współliniowe nazywamy *kliką*.

Klika jest *maksymalna*, gdy nie istnieje klika większa od niej, to znaczy, gdy dla dowolnej kliki Y takiej, że $X \subseteq Y$ mamy $X = Y$. Jeżeli X jest kliką maksymalną oraz a jest punktem takim, że $a \notin X$, to zbiór $X \cup \{a\}$ nie jest kliką.

Definicja 1.9. *Rzutowy warunek Veblena*:
Mówimy, że częściowa przestrzeń prostych $\mathfrak{A}$ spełnia *rzutowy warunek Veblena*, gdy prosta przecinająca dwa boki dowolnego trójkąta w $\mathfrak{A}$ w dwóch różnych punktach przecina również trzeci bok tego trójkąta (rys. 1.2).



Rysunek 1.2: Rzutowy warunek Veblena.

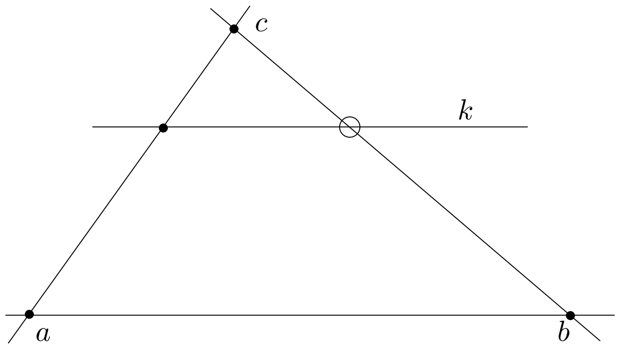
Definicja 1.10. Strukturę $\langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ nazywamy *przestrzenią rzutową*, gdy jest ona przestrzenią prostych, na każdej prostej leżą przynajmniej trzy punkty oraz spełnia rzutowy warunek Veblena.

Definicja 1.11. Niech $\langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ będzie częściową przestrzenią prostych i niech $\| \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ będzie binarną relacją na zbiorze prostych $\mathfrak{A}$. Relację $\|$ nazywamy relacją *równoległości*, gdy spełnione są następujące warunki:

(i) $\|$ jest relacją równoważności,

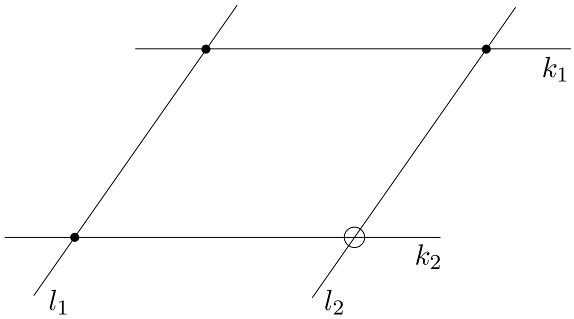
(ii) przez każdy punkt możemy przeprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej, tzn., dla każdego $a \in S$ i $k \in \mathcal{L}$ istnieje dokładnie jedna prosta $l \in \mathcal{L}$ taka, że $a \mid l$ i $l \parallel k$.

Definicja 1.12. *Afiniczny warunek Veblena*:
Niech $a, b, c \in S$ tworzą trójkąt w częściowej przestrzeni prostych z równoległością $\langle S, \mathcal{L}, |, \| \rangle$ tzn., a, b, c są niewspółliniowe, ale parami współliniowe. Jeśli prosta $k \in \mathcal{L}$ przecina bok $\overline{a, c}$ i $k \parallel \overline{a, b}$ to k przecina bok $\overline{b, c}$ (rys. 1.3).



Rysunek 1.3: Afiniczny warunek Veblena.

Definicja 1.13. *Warunek uzupełniania do równoległoboku*:
Niech $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathcal{L}$ w częściowej przestrzeni prostych z równoległością $\langle S, \mathcal{L}, |, \| \rangle$. Jeśli prosta k_1 przecina proste l_1 i l_2, prosta l_1 przecina proste k_1 i k_2 oraz $k_1 \parallel k_2$ i $l_1 \parallel l_2$, to k_2 przecina l_2 (rys. 1.4).



Rysunek 1.4: Warunek uzupełniania do równoległoboku.

Definicja 1.14. *Przestrzenią afiniczną* nazywamy strukturę $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, |, \| \rangle$, gdy

(i) $\langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ jest przestrzenią prostych,

(ii) $\| \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ jest relacją równoległości,

(iii) $\mathfrak{A}$ spełnia afiniczny warunek Veblena,

(iv) $\mathfrak{A}$ spełnia warunek uzupełniania do równoległoboku.

Definicja 1.15. W przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ rozważmy następujące warunki:

(i) punkty a, b, p są niewspółliniowe,

(ii) punkty a, b, r są niewspółliniowe,

(iii) $o \neq a, b, p, q, r, s$,

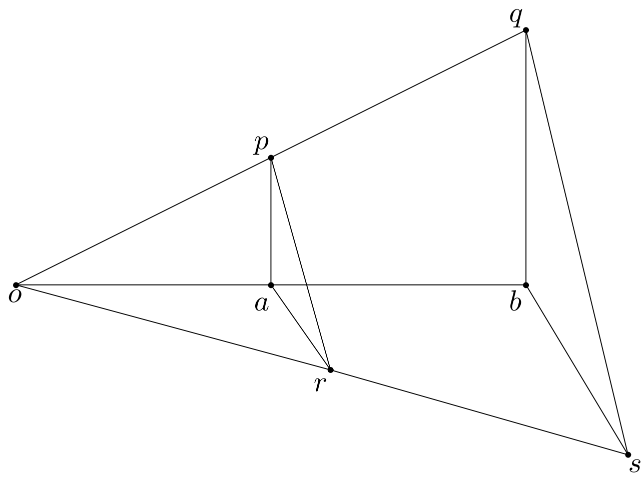
(iv) punkty o, a, b leżą na jednej prostej,

(v) punkty o, r, s leżą na jednej prostej,

(vi) punkty o, p, q leżą na jednej prostej,

(vii) $\overline{a, p} \parallel \overline{b, q}$ oraz $\overline{p, r} \parallel \overline{q, s}$.

Mówimy, że $\mathfrak{A}$ spełnia *duży aksjomat Desarguesa*, gdy warunki (i) – (vii) pociągają za sobą $\overline{p, r} \parallel \overline{q, s}$ (rys. 1.5).



Rysunek 1.5: Konfiguracja Desarguesa.

Definicja 1.16. W przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ rozważmy następujące warunki:

(i) punkty a, b, p są niewspółliniowe,

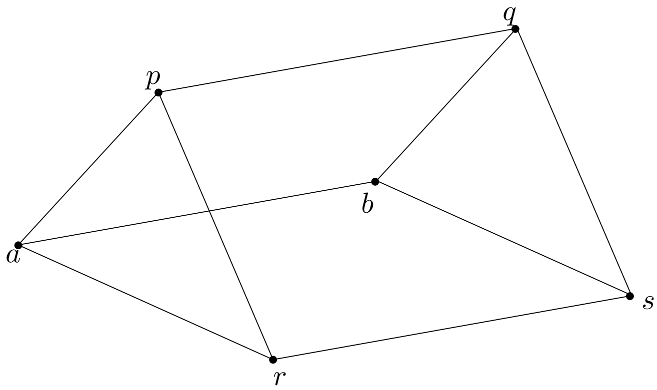
(ii) punkty a, b, r są niewspółliniowe,

(iii) $\overline{a, b} \parallel \overline{r, s} \parallel \overline{p, q}$,

(iv) $\overline{a, p} \parallel \overline{b, q}$,

(v) $\overline{a, r} \parallel \overline{b, s}$.

Mówimy, że $\mathfrak{A}$ spełnia *mały aksjomat Desarguesa*, gdy warunki (i) – (v) pociągają za sobą $\overline{p, r} \parallel \overline{q, s}$ (rys. 1.6).



Rysunek 1.6: Konfiguracja małego Desarguesa.

Przypomnijmy fakt znany w geometrii afinicznej.

Twierdzenie 1.17. *Jeśli przestrzeń afiniczna spełnia duży aksjomat Desarguesa* 1.15 *to spełnia również mały aksjomat Desarguesa* 1.16.

Definicja 1.18. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, |, \| \rangle$ będzie przestrzenią afiniczną. *Podprzestrzenią* przestrzeni $\mathfrak{A}$ nazywamy zbiór $X \subseteq S$ spełniający warunki:

(i) X jest podprzestrzenią częściowej przestrzeni prostych $\langle S, \mathcal{L}, | \rangle$,

(ii) X jest zamknięty ze względu na prowadzenie prostych równoległych, tzn. jeśli $k, l \in \mathcal{L}$, $k^* \subseteq X$, $k \parallel l$ oraz $l^* \cap X \neq \emptyset$ to $l^* \subseteq X$.

Niech $\mathfrak{A}$ będzie dowolną przestrzenią afiniczną zdefiniowaną jak w 1.14. Gdy proste w $\mathfrak{A}$ są co najmniej trzy punktowe, wówczas jeśli podzbiór zbioru punktów $\mathfrak{A}$ jest domknięty na prowadzenie prostych, to jest również domknięty na prowadzenie równoległych. Wynika to z afinicznego warunku Veblena.

Przez $\mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich podprzestrzeni $\mathfrak{A}$. Dla podprzestrzeni $U, W \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ piszemy $U \subseteq\parallel W$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej prostej k takiej, że $k^* \subseteq U$ istnieje taka prosta l, że $l^* \subseteq W$ i $k \parallel l$.

Dla prostej k i punktu a w $\mathfrak{A}$ przez $a * k$ oznaczamy prostą l taką, że $a \mid l \parallel k$. Analogicznie dla $Z, U \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ takich, że $Z \subseteq\parallel U$, przez $Z * U$ oznaczamy podprzestrzeń $U' \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ taką, że $Z \subset U' \parallel U$.

Dla dowolnych $Z, U \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ przez $Z \varovee U$ oznaczamy podprzestrzeń $W \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ rozpiętą przez (najmniejszą podprzestrzeń zawierającą) Z i taką podprzestrzeń U', że $U' \parallel U$ i $U' \cap Z \neq \emptyset$. Przy oznaczeniach kresów, które wprowadzimy w 1.28 można by napisać, że $W = Z \sqcup U'$. Dla prostych k, l skośnych $k \varovee l$ to płaszczyzna zawierająca k i prostą równoległą do l. Gdy natomiast $k \parallel l$ to $k \varovee l = k$. Dla dowolnego punktu a i podprzestrzeni U mamy $a \varovee U = a * U$. Natomiast dla $Z, U \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$, gdy $Z \subseteq\parallel U$ to $Z \varovee U = Z * U$.

Niech $U \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ będzie co najmniej prostą. Dla dowolnych punktów $a, b \in S$ określamy relację:

$$a \approx_U b :\iff \overline{a,b} \subseteq\parallel U.$$

Dalej zakładamy, że $\mathfrak{A}$ spełnia mały aksjomat Desarguesa.

Lemat 1.19. *Relacja $\approx_U$ jest relacją równoważności.*

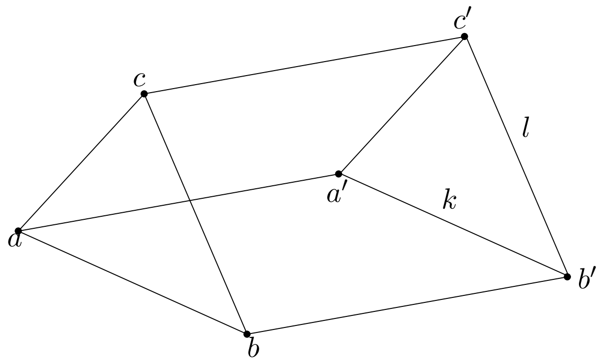
DOWÓD. Niech a, b, c będą punktami $\mathfrak{A}$. Sprawdzamy, czy relacja jest zwrotna. Ponieważ $\overline{a,a} = \{a\}$ i zawsze $\{a\} \subseteq\parallel U$, więc $a \approx_U a$, co oznacza, że nasza relacja jest zwrotna.

Sprawdzamy, czy relacja jest symetryczna. Załóżmy, że $a \approx_U b$. Wówczas $\overline{a,b} \subseteq\parallel U$. Ale $\overline{a,b} = \overline{b,a}$, co oznacza, że $b \approx_U a$.

Sprawdzamy, czy relacja jest przechodnia. Zakładamy, że $a \approx_U b$ i $b \approx_U c$. Wówczas $\overline{a,b} \subseteq\parallel U$ i $\overline{b,c} \subseteq\parallel U$, Gdy $a = b$ lub $b = c$ lub $c = a$, to z założeń mamy od razu $a \approx_U c$. Gdy punkty a, b, c są współliniowe, to wówczas

$$\overline{a,b} = \overline{b,c} = \overline{a,c}$$

i dostajemy $\overline{a,c} \subseteq\parallel U$, co daje $a \approx_U c$. Rozważmy teraz sytuację, w której a, b, c tworzą niezdegenerowany trójkąt (rys. 1.7).



Rysunek 1.7: Zastosowanie małego aksjomatu Desarguesa.

Z założenia, niech k będzie prostą w U taką, że $k \parallel \overline{a,b}$. Obierzmy na niej dowolny punkt b'. Ponieważ w U jest prosta równoległa do $\overline{b,c}$ i U jest podprzestrzenią, czyli jest domknięta na prowadzenie równoległych, więc prosta $l := b' * \overline{b,c}$ jest w U. Z warunku uzupełnienia do równoległoboku proste k oraz $a * \overline{b,b'}$ przecinają się w pewnym punkcie a'. Podobnie z tego samego warunku proste l oraz $c * \overline{b,b'}$ przecinają się w pewnym punkcie c'. W ten sposób z małego Desarguesa mamy $\overline{a,c} \parallel \overline{a',c'}$ przy czym $\overline{a',c'} \subset U$ bo $a', c' \in U$, a U jako podprzestrzeń $\mathfrak{A}$ jest domknięta na prowadzenie prostych. Pokazaliśmy w ten sposób, że $\overline{a,c} \subseteq\parallel U$, czyli $a \approx_U c$. $\square$

Gdy k jest prostą to z punktem a przy pomocy relacji $\approx_k$ utożsamiamy wszystkie punkty na prostej $a * k$, to znaczy $[a]_{\approx_k} = a * k$. Ogólnie, dla podprzestrzeni U klasa abstrakcji $[a]_{\approx_U} = a * U$ jest podprzestrzenią równoległą do U przechodzącą przez a.

Dla $X \subseteq S$ oznaczamy

$$X/U := X/{\approx_U} := \Big\{[a]_{\approx_U} : a \in X\Big\}. \tag{1.1}$$

Przy tym oznaczeniu, dla prostych k, l, gdy $k \parallel l$, to k/l możemy utożsamiać z dowolnym punktem prostej k; natomiast, gdy $k \nparallel l$ to k/l możemy utożsamiać z całą prostą k. Dla płaszczyzny U i prostej l, gdy $l \subseteq\parallel U$ to U/l możemy utożsamiać z dowolną prostą na U nierównoległą do l.

Relacja $\approx$ pozwala mówić o przestrzeni ilorazowej w przestrzeni afinicznej. Niech

$$\mathfrak{A}/U := \langle S', \mathcal{L}', \parallel' \rangle, \tag{1.2}$$

gdzie:

- $S' := S/U$,
- $\mathcal{L}' := \{l/U : l \in \mathcal{L}\}$,
- $\parallel' \subseteq \mathcal{L}' \times \mathcal{L}'$ jest taką relacją, że dla dowolnych $k, l \in \mathcal{L}$

$$k/U \parallel' l/U :\iff k \oplus U \parallel l \oplus U.$$

Później w modelu analitycznym (por. 2.7) wykażemy, że dla $Z, Y \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$, takich że $Z \subseteq\parallel Y$ mamy $[Z, Y]^* \cong \mathrm{L}(Y/Z)$, gdzie Y/Z ma strukturę przestrzeni afinicznej.

Fakt 1.20. *Niech $\mathfrak{P}$ będzie przestrzenią rzutową. Gdy H jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$, to dla dowolnego $U \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{P})$ mamy*

$$U \cap H = \begin{cases} U, & \textit{gdy } U \subseteq H, \\ \textit{hiperpłaszczyzna w } U, & \textit{gdy } U \nsubseteq H. \end{cases}$$

Gdy z przestrzeni rzutowej $\mathfrak{P}$ usuniemy hiperpłaszczyznę H to wraz z nią z każdej podprzestrzeni U w $\mathfrak{P}$ usuwamy $U \cap H$.

1.2 Zanurzenia

Definicja 1.21. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ i $\mathfrak{A}' = \langle S', \mathcal{L}', |' \rangle$ będą częściowymi przestrzeniami prostych. Odwzorowanie $F = (f, g)$ takie, gdzie $f\colon S \to S'$, $g\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ jest *kolineacją*, gdy f, g są bijekcjami oraz dla $a \in S$ i $k \in \mathcal{L}$ spełniony jest warunek:

$$a \mid k \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f(a) \mid' g(k). \tag{1.3}$$

Mówimy, że przestrzeń $\mathfrak{A}$ jest *izomorficzna* z $\mathfrak{A}'$ i piszemy $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$, gdy istnieje kolineacja z $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$.

Kolineacje zdefiniowane jak wyżej mają kilka ważnych własności. Zanotujemy je teraz.

Bezpośrednio z definicji wynika, że gdy $F = (f, g)$ jest kolineacją z $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$ to $F^{-1} := (f^{-1}, g^{-1})$ jest również kolineacją z $\mathfrak{A}'$ na $\mathfrak{A}$.

Stwierdzenie 1.22. *Niech $F = (f, g)$ będzie kolineacją przy oznaczeniach z* 1.21. *Wówczas dla $a, b \in S$ i $k, l \in \mathcal{L}$ zachodzi*

(i) *$a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \sim f(b)$,*

(ii) *$k \sim l$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(k) \sim g(l)$.*

Dowód. Implikacje „ $\Longrightarrow$ ” w obu warunkach wynikają wprost z (1.3). Natomiast w implikacjach w drugą stronę istotne jest, że funkcje g i f, odpowiednio w warunku (i) oraz (ii), są „na” plus zachowywanie incydencji (1.3). $\square$

Stwierdzenie 1.23. *Niech $F = (f, g)$ będzie kolineacją przy oznaczeniach z* 1.21.

(i) *Jeśli $\mathcal{K}$ jest kliką w $\mathfrak{A}$, to jej obraz $f(\mathcal{K})$ jest kliką w $\mathfrak{A}'$.*

(ii) *Jeśli $\mathcal{K}$ jest maksymalną kliką w $\mathfrak{A}$, to jej obraz $f(\mathcal{K})$ jest maksymalną kliką w $\mathfrak{A}'$.*

Dowód. (i) Niech $a_1', a_2' \in f(\mathcal{K})$. Zauważmy, że istnieją $a_1, a_2 \in \mathcal{K}$ takie, że $f(a_1) = a_1'$ i $f(a_2) = a_2'$. Ponieważ $a_1 \sim a_2$, więc zgodnie z 1.21(ii) uzyskujemy $a_1' \sim a_2'$.

(ii) Załóżmy, że $f(\mathcal{K}) \cup \{a'\}$ jest kliką dla punktu $a' \notin f(\mathcal{K})$. Zauważmy, że przeciwobrazem $f(\mathcal{K}) \cup \{a'\}$ przy f jest $\mathcal{K} \cup \{a\}$, gdzie $a \notin \mathcal{K}$. Przeciwobraz ten jest kliką w $\mathfrak{A}$ z uwagi na (i) zastosowane do F^{-1}. Otrzymujemy sprzeczność z tym, że $\mathcal{K}$ jest maksymalna. $\square$

Definicję zanurzenia dobieramy tak, aby obraz przy zanurzeniu $F = (f, g)$ częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A}$ w częściową przestrzeń prostych $\mathfrak{A}'$, czyli

$$\mathrm{Im}(F) = \Big\langle f(S), g(\mathcal{L}) \Big\rangle,$$

był podstrukturą w $\mathfrak{A}'$.

Definicja 1.24. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ i $\mathfrak{A}' = \langle S', \mathcal{L}', |' \rangle$ będą częściowymi przestrzeniami prostych. Odwzorowanie $F = (f, g)$ takie, gdzie $f \colon S \to S'$, $g \colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ jest *zanurzeniem*, f i g są różnowartościowe oraz dla $a, b \in S$ i $k, l \in \mathcal{L}$ spełnione są warunki:

(i) $a \mid k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \mid' g(k)$,

(ii) $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \sim f(b)$,

(iii) $k \sim l$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(k) \sim g(l)$.

Przy definicjach 1.21 oraz 1.24 otrzymujemy, że jeśli F jest zanurzeniem przy oznaczeniach z 1.24, to

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}' | \operatorname{Im}(F), \tag{1.4}$$

gdzie

$$\operatorname{Im}(F) = \Big\langle f(S), g(\mathcal{L}) \Big\rangle.$$

Udowodnimy teraz interesujący nas fakt dotyczący zanurzeń.

Stwierdzenie 1.25. *Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, | \rangle$ i $\mathfrak{A}' = \langle S', \mathcal{L}', |' \rangle$ będą częściowymi przestrzeniami prostych. Jeśli $F = (f, g)$ jest zanurzeniem $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{A}'$, to* $\operatorname{Im}(F) = \langle f(S), g(\mathcal{L}) \rangle$ *jest podstrukturą w $\mathfrak{A}'$.*

Dowód. Sprawdzamy dwa warunki z definicji 1.4.

(i) Weźmy $a', b' \in f(S)$ takie, że $a' \neq b'$. Zakładamy, że istnieje prosta $k' \in \mathcal{L}'$ taka, że $a', b' \,|'\, k'$. Sprawdzamy, czy $k' \in g(\mathcal{L})$.

Wiemy, że istnieją $a, b \in S$ takie, że $f(a) = a'$ oraz $f(b) = b'$. Ponieważ $a', b' \,|'\, k'$, więc $f(a) \sim f(b)$. F jest zanurzeniem więc z 1.22(i), wynika że $a \sim b$. Mamy zatem prostą $k \in \mathcal{L}$ taką, że $a, b \mid k$. Stąd oraz z 1.21(i) uzyskujemy $f(a), f(b) \mid g(k)$. Teraz z 1.1(i) wiemy, że $g(k) = k'$ bo $f(a), f(b) \mid k'$. Ostatecznie $k' \in g(\mathcal{L})$.

(ii) Weźmy $k', l' \in g(\mathcal{L})$ takie, że $k' \neq l'$. Zakładamy, że istnieje punkt $a' \in S'$ taki, że $a' \,|'\, k', l'$. Sprawdzamy, czy $a' \in f(S)$.

Wiemy, że istnieją $k, l \in \mathcal{L}$ takie, że $g(k) = k'$ oraz $g(l) = l'$. Ponieważ $a' \,|'\, k', l'$, więc $g(k) \sim f(l)$. F jest zanurzeniem więc z 1.22(ii), wynika że $k \sim l$. Mamy zatem punkt $a \in S$ taki, że $a \mid k, l$. Stąd oraz z 1.21(i) uzyskujemy $f(a) \mid g(k), g(l)$. Teraz z 1.1(i) wiemy, że $f(a) = a'$ bo $f(a) \mid k', l'$. Ostatecznie $a' \in f(S)$. □

1.3 Analityczna przestrzeń afiniczna

Przez V będziemy oznaczać przestrzeń wektorową. Piszemy $\operatorname{Sub}(U)$ jako zbiór wszystkich podprzestrzeni podprzestrzeni U z przestrzeni V, $\operatorname{Sub}_k(U)$ jako zbiór wszystkich k-podprzestrzeni z U. Zbiór wszystkich warstw V oznaczamy przez

$$\mathcal{H}(V) = V + \operatorname{Sub}(V) \cup \{\emptyset\} = \{u + S \colon u \in V, S \in \operatorname{Sub}(V)\} \cup \{\emptyset\}.$$

Ponieważ dla warstwy $U = u + S$ jej *przestrzeń kierunkowa* S jest wyznaczona jednoznacznie, możemy mówić o wymiarze warstwy; przyjmujemy

$$\dim(U) := \dim(S).$$

Zbiór wszystkich k-wymiarowych warstw to

$$\mathcal{H}_k(V) = V + \operatorname{Sub}_k(V) = \{u + S \colon u \in V, S \in \operatorname{Sub}_k(V)\}.$$

Dodatkowo przyjmujemy, że $\mathcal{H}_{-1}(V) = \{\emptyset\}$.

Definicja 1.26. Mówimy, że warstwa $a+S$ jest *równoległa* (*niesymetrycznie*) do warstwy $b+T$ i piszemy

$$a+S \subseteq\parallel b+T, \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad S \subseteq T.$$

Określona w ten sposób relacja $\subseteq\parallel$ nie jest symetryczna więc nie może być relacją równoważności.

Definicja 1.27. Mówimy, że warstwa $a+S$ jest *równoległa* (*symetrycznie*) do warstwy $b+T$ i piszemy

$$a+S \parallel b+T, \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad S = T.$$

Zauważmy, że dla $U, W \in \mathcal{H}(V)$ mamy

$$U \parallel W \iff U \subseteq\parallel W \text{ oraz } W \subseteq\parallel U.$$

Struktura

$$\mathfrak{A} := \mathbf{A}(V) := \langle V, \mathcal{H}_1(V), \parallel \rangle$$

jest przestrzenią afiniczną w sensie definicji 1.14. Nazywamy ją *analityczną przestrzenią afiniczną*.

Definicja 1.28. Dla $U, W \in \mathcal{H}(V)$ takich, że $U = u + S, W = w + T$, gdzie $u, w \in V$, $S, T \in \mathrm{Sub}(V)$ można określić ich *kres dolny* w następujący sposób:

$$U \sqcap W := U \cap W,$$

natomiast *kres górny* jest zdefiniowany w następujący sposób:

$$U \sqcup W := u + \langle S, T, u-w \rangle.$$

Twierdzenie 1.29 (o reprezentacji przestrzeni afinicznych)**.** *Niech $\mathfrak{A}$ będzie przestrzenią afiniczną. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *Przestrzeń $\mathfrak{A}$ jest desarguesowska.*

(2) *Istnieje przestrzeń wektorowa V taka, że $\mathfrak{A} \cong \mathbf{A}(V)$.*

1.4 Analityczna przestrzeń rzutowa

Struktura

$$\mathbf{P}(V) := \langle \mathrm{Sub}_1(V), \mathrm{Sub}_2(V) \rangle \tag{1.5}$$

jest przestrzenią rzutową w sensie definicji 1.10. Nazywamy ją *analityczną przestrzenią rzutową*.

Twierdzenie 1.30 (o reprezentacji przestrzeni rzutowych)**.** *Niech $\mathfrak{P}$ będzie przestrzenią rzutową. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *Przestrzeń $\mathfrak{P}$ jest desarguesowska.*

(2) *Istnieje przestrzeń wektorowa V taka, że $\mathfrak{P} \cong \mathbf{P}(V)$.*

1.5 Grassmannian rzutowy

Niech $\mathfrak{P}$ będzie przestrzenią rzutową i niech k będzie liczbą naturalną taką, że

$$0 \leqslant k < \dim(\mathfrak{P}).$$

Zbiór wszystkich podprzestrzeni $\mathfrak{P}$ oznaczmy przez $\mathrm{Sub}(\mathfrak{P})$ natomiast zbiór k-wymiarowych podprzestrzeni $\mathfrak{P}$ to $\mathrm{Sub}_k(\mathfrak{P})$.

Grassmannian rzutowy to geometria

$$\mathbf{G}_k(\mathfrak{P}) = \langle \mathrm{Sub}_k(\mathfrak{P}), \mathrm{Sub}_{k+1}(\mathfrak{P}), \subset \rangle,$$

w której punktami są k-wymiarowe podprzestrzenie $\mathfrak{P}$, a prostymi $(k+1)$-wymiarowe podprzestrzenie $\mathfrak{P}$. Grassmannian rzutowy jest częściową przestrzenią prostych.

1.6 Grassmannian afiniczny

Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \| \rangle$ będzie dowolną przestrzenią afiniczną i niech

$$0 \leqslant k < n := \dim(\mathfrak{A})$$

będzie liczbą naturalną. Wówczas strukturę postaci:

$$\mathbf{G}_k(\mathfrak{A}) = \langle \mathrm{Sub}_k(\mathfrak{A}), \mathrm{Sub}_{k+1}(\mathfrak{A}), \subset \rangle,$$

nazywamy *Grassmannianem afinicznym.* Grasmannian afiniczny jest częściową przestrzenią prostych. Zauważmy, że $\mathbf{G}_0(\mathfrak{A})$ jest przestrzenią afiniczną, natomiast $\mathbf{G}_{n-1}(\mathfrak{A})$ to pojedyncza prosta.

Gdy $\mathfrak{A}$ jest analityczną przestrzenią afiniczną, czyli gdy $\mathfrak{A} = \mathbf{A}(V)$ dla pewnej przestrzeni wektorowej V, to

$$\mathbf{G}_k(\mathfrak{A}) = \langle \mathcal{H}_k(V), \mathcal{H}_{k+1}(V), \subset \rangle.$$

Dalej będziemy zakładać, że rozważana przestrzeń afiniczna $\mathfrak{A}$ jest wymiaru co najmniej 3. Wtedy jest ona desarguesowska i możemy zastosować twierdzenie o reprezentacji, to znaczy, że istnieje przestrzeń wektorowa V taka, że $\mathfrak{A} \cong \mathbf{A}(V)$. Tak więc dalej przyjmujemy, że

$$\mathfrak{A} = \mathbf{A}(V).$$

Fakt 1.31. *Jeśli U_1, U_2 są różnymi punktami, leżącymi na prostej W w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ to $W = U_1 \sqcup U_2$. Dualnie, jeśli W_1, W_2 są różnymi prostymi przechodzącymi przez punkt U w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ to $U = W_1 \cap W_2$.*

Definicja 1.32. Mówimy, że dwie różne podprzestrzenie U_1, U_2 przestrzeni $\mathfrak{A}$ są *sąsiednie* i piszemy $U_1 \approx U_2$, gdy $\dim(U_1 \cap U_2) + 1 = \dim(U_1) = \dim(U_2)$.

Zauważmy, że dwa punkty $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ są współliniowe, gdy są sąsiednie lub równoległe.

Fakt 1.33. *Niech U_1, U_2 będą różnymi punktami w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. Wówczas U_1, U_2 są współliniowe wtw., gdy $U_1 \approx U_2$, lub $U_1 \parallel U_2$.*

Rozdział 2

Podstruktury odcinkowe

Dalej przez V oznaczamy przestrzeń wektorową i przez $\mathfrak{A} = \mathbf{A}(V)$ przestrzeń afiniczną. Zakładamy również, że

$$0 < k < \dim(V) - 1. \tag{2.1}$$

2.1 Odcinki

Definicja 2.1. *Odcinkiem właściwym* w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ nazywamy zbiór postaci

$$[Z, Y] := \{U \in \mathcal{H}(V) \colon Z \subseteq U \subseteq Y\},$$

gdzie $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$.

Definicja 2.2. *Odcinkiem równoległych* (*odcinkiem niewłaściwym*) w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ nazywamy zbiór postaci

$$[Z, Y]^* := \{U \in \mathcal{H}(V) \colon Z \subseteq\parallel U \subseteq Y\},$$

gdzie $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$ takie, że Z jest co najmniej prostą $\mathfrak{A}$.

Z określenia relacji $\subseteq\parallel$, zauważmy, że jeśli $Z \subseteq\parallel U$, to $\dim(Z) \leqslant \dim(U)$. W definicji 2.2 jeśli Z jest co najmniej prostą to U jest co najmniej prostą.

Definicja 2.3. *Odcinkiem właściwym indeksu k* lub *k-odcinkiem właściwym* w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ nazywamy zbiór postaci

$$[Z, Y]_k := \{U \in \mathcal{H}_k(V) : Z \subseteq U \subseteq Y\} = [Z, Y] \cap \mathcal{H}_k(V),$$

gdzie $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$.

Odcinkiem niewłaściwym indeksu k lub *k-odcinkiem niewłaściwym* w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ nazywamy zbiór postaci

$$[Z, Y]^*_k := \{U \in \mathcal{H}_k(V) \colon Z \subseteq\parallel U \subseteq Y\} = [Z, Y]^* \cap \mathcal{H}_k(V),$$

Zauważmy, że gdy $k < \dim(Z)$ lub $\dim(Y) < k$, to

$$[Z, Y]_k = [Z, Y]^*_k = \emptyset,$$

gdy $k = \dim(Z)$, to $[Z, Y]_k = \{Z\}$, a gdy $k = \dim(Y)$, to $[Z, Y]_k = [Z, Y]^*_k = \{Y\}$. Warto również zauważyć, że

$$Z_1 \parallel Z_2 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad [Z_1, Y]^* = [Z_2, Y]^*. \tag{2.2}$$

Lemat 2.4. *Jeśli* $U \subseteq\parallel W$ *to* $[U, Y]^* \supseteq [W, Y]^*$.

DOWÓD. Niech $X \in [W, Y]^*$. Zatem zachodzi: $W \subseteq\parallel X \subseteq Y$. Widać, że $U \subseteq\parallel W \subseteq\parallel X$ więc z przechodniości $U \subseteq\parallel X$. Mamy $U \subseteq\parallel X \subseteq Y$ więc $X \in [U, Y]^*$. □

Przykład 2.5 (odcinka właściwego $[Z, Y]_k$)**.** Weźmy $V := \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ oraz $Z := \langle e_1\rangle$ i $Y := V$, takie że $Z \subseteq Y$. Wówczas mamy

$$[Z, Y]_k = \begin{cases} \{Z\}, & \text{dla } k = 1,\\ \{\langle e_1, y\rangle : y \text{ lin. niez. od } e_1\}, & \text{dla } k = 2,\\ \{V\}, & \text{dla } k = 3. \end{cases}$$

Przykład 2.6 (odcinka równoległych $[Z, Y]^*_k$)**.** Weźmy $V := \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ oraz $Z := \langle e_1\rangle$ i $Y := V$. Wówczas mamy

$$[Z, Y]^*_k = \begin{cases} \{x + \langle e_1\rangle : x \in V\}, & \text{dla } k = 1,\\ \{x + \langle e_1, y\rangle : x \in V, y \text{ lin. niez. od } e_1\}, & \text{dla } k = 2,\\ \{V\}, & \text{dla } k = 3. \end{cases}$$

Stwierdzenie 2.7. *Dla* $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$*, takich że* Z *jest co najmniej prostą i* $Z \subseteq\parallel Y$ *mamy*

$$[Z, Y]^* \cong \mathrm{L}(\mathbf{A}(Y_0/Z_0)),$$

gdzie Z_0, Y_0 *to podprzestrzenie kierunkowe odpowiednio* Z *i* Y*.*

DOWÓD. Niech $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$ i niech Z_0, Y_0 będą podprzestrzeniami kierunkowymi odpowiednio Z i Y. Zakładamy, że Z jest co najmniej prostą i $Z \subseteq\parallel Y$. To oznacza, że istnieje translacja τ_1 taka, że $\tau_1(Z) \subseteq Y$. Z (2.2) mamy

$$[Z, Y]^* = [\tau_1(Z), Y]^*.$$

Skoro Z jest przynajmniej prostą to weźmy $z \in Z$. Niech τ_2 będzie translacją o wektor $-z$. Wtedy $\tau_2\tau_1(Z) = Z_0$ i $\tau_2(Y) = Y_0$. Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned}[Z, Y]^* = [\tau_1(Z), Y]^* \cong [\tau_2\tau_1(Z), \tau_2(Y)]^* = [Z_0, Y_0]^* = \\ = \Big\langle \{y + U : y \in Y, U \in [Z_0, Y_0]\}, \subseteq \Big\rangle \cong \mathrm{L}(\mathbf{A}(Y_0/Z_0)).\end{aligned}$$

□

2.2 Właściwa podstruktura odcinkowa

Sprawdzimy teraz, że odcinki wyznaczają podstruktury w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. Zaczniemy od odcinka właściwego.

Stwierdzenie 2.8. *Niech* $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$ *takie, że* $\dim(Z) < k < \dim(Y)$ *oraz* $Z \subset Y$*, wówczas:*

$$\Big\langle [Z, Y]_k, [Z, Y]_{k+1} \Big\rangle$$

jest podstrukturą w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ *zgodnie z definicją 1.4.*

Dowód. (1) Weźmy $U_1, U_2 \in [Z, Y]_k$ takie, że $U_1 \neq U_2$. Zakładamy, że istnieje prosta $W \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$ taka, że $U_1, U_2 \subset W$. Sprawdzamy czy $W \in [Z, Y]_{k+1}$. W tym celu musimy pokazać, że:

(i) $Z \subseteq W$,

(ii) $W \subseteq Y$,

(iii) $\dim(W) = k + 1$.

Ad. (i): Z założeń widać, że $Z \subseteq U_1, U_2 \subseteq W$. Zatem z przechodniości relacji porządku $\subseteq$ otrzymujemy $Z \subseteq W$.

Ad. (ii): Z faktu 1.31 wiemy, że $W = U_1 \sqcup U_2$. Z elementarnych własności kratowych mamy $U_1 \sqcup U_2 \subseteq Y$. Stąd $W \subseteq Y$.

Ad. (iii): Z wyboru $W \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$ mamy $\dim(W) = k + 1$.

(2) Weźmy $W_1, W_2 \in [Z, Y]_{k+1}$ takie, że $W_1 \neq W_2$. Zakładamy, że istnieje punkt $U \in \mathcal{H}_k(V)$ taki, że $U \subset W_1, W_2$. Sprawdzamy czy $U \in [Z, Y]_k$. W tym celu musimy pokazać, że:

(i) $Z \subseteq U$,

(ii) $U \subseteq Y$,

(iii) $\dim U = k$.

Ad. (i): Z faktu 1.31 wiemy, że $U = W_1 \cap W_2$. Z założeń widać, że $Z \subseteq W_1, W_2$. Zatem musi być $Z \subseteq W_1 \cap W_2 = U$.

Ad. (ii): Z założeń widać, że $U \subset W_1, W_2 \subseteq Y$. Z przechodniości relacji porządku widać, że $U \subseteq Y$.

Ad. (iii): Z wyboru $U \in \mathcal{H}_k(V)$ mamy $\dim(U) = k$.

Zatem na podstawie (1) i (2) dowód jest zakończony. □

Dalej pokażemy jakie własności ma taka podstruktura. Rozważając podstrukturę wyznaczoną przez odcinek $[Z, Y]$ istotne jest czy $Z = \emptyset$, czy $Z \neq \emptyset$.

Twierdzenie 2.9. *Grassmannian afiniczny obcięty do właściwej podstruktury odcinkowej* $\Big\langle (Y]_k, (Y]_{k+1} \Big\rangle$*, gdzie* $Y \in \mathcal{H}(V)$ *i* $k < \dim(Y)$ *jest, z dokładnością do izomorfizmu, Grassmannianem afinicznym* $\mathbf{G}_k(\mathbf{A}(Y_0))$*, gdzie* Y_0 *jest podprzestrzenią kierunkową* Y*.*

Dowód. Warstwa Y pojawiająca się w określeniu naszej podstruktury, może być traktowana jako: element kraty $\mathrm{L}(\mathfrak{A})$, podprzestrzeń $\mathfrak{A}$ lub przestrzeń afiniczna. Niech Y_0 będzie podprzestrzenią kierunkową Y. Wówczas Y jako przestrzeń afiniczna jest izomorficzna z $\mathbf{A}(Y_0)$ i mamy

$$\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})|\Big\langle (Y]_k, (Y]_{k+1}\Big\rangle \cong \Big\langle \mathcal{H}_k(Y_0), \mathcal{H}_{k+1}(Y_0), \subset\Big\rangle = \mathbf{G}_k(\mathbf{A}(Y_0)),$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 2.10. *Grassmannian afiniczny obcięty do właściwej podstruktury odcinkowej $\Big\langle [Z,Y]_k, [Z,Y]_{k+1}\Big\rangle$, gdzie $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$, $\dim(Z) < k < \dim(Y)$ oraz $Z \neq \emptyset$ jest, z dokładnością do izomorfizmu, Grassmannianem rzutowym*

$$\mathbf{G}_{k-\dim(Z_0)}(Y_0/Z_0),$$

gdzie Z_0, Y_0 są podprzestrzeniami kierunkowymi odpowiednio Z i Y.

Dowód. Ponieważ Z to niepusty zbiór wektorów, więc weźmy wektor $a \in Z$. Translacja τ o wektor $-a$ przeprowadza a na wektor zerowy θ w V. Wiązka prostych i płaszczyzn przez punkt θ tworzy przestrzeń rzutową

$$\mathbf{P}(V) = \langle \mathrm{Sub}_1(V), \mathrm{Sub}_2(V), \subset\rangle.$$

Wiązka prostych i płaszczyzn przez a jest izomorficzna z $\mathbf{P}(V)$.

Niech Z_0, Y_0 będą podprzestrzeniami kierunkowymi odpowiednio Z i Y. Zauważmy, że odcinek $[Z,Y]$ wyznaczający naszą podstrukturę odpowiada odcinkowi $[Z_0, Y_0]$ w kracie $\mathrm{L}(V) = \langle \mathrm{Sub}(V), \subseteq\rangle$, to znaczy $\tau([Z,Y]) = [Z_0, Y_0]$. Z drugiej strony (porównaj [2]), w Grassmannianie rzutowym

$$\mathbf{G}_k(V) = \Big\langle \mathrm{Sub}_k(V), \mathrm{Sub}_{k+1}(V), \subset\Big\rangle$$

odcinek $[Z_0, Y_0]$ wyznacza podstrukturę izomorficzną z Grassmannianem rzutowym

$$\mathbf{G}_{k-\dim(Z_0)}(Y_0/Z_0) = \Big\langle \mathrm{Sub}_{k-\dim(Z_0)}(Y_0/Z_0), \mathrm{Sub}_{k+1-\dim(Z_0)}(Y_0/Z_0), \subset\Big\rangle.$$

Ostatecznie

$$\Big\langle [Z,Y]_k, [Z,Y]_{k+1}\Big\rangle \cong \mathbf{G}_{k-\dim(Z_0)}(Y_0/Z_0).$$

□

2.3 Niewłaściwa podstruktura odcinkowa

Stwierdzenie 2.11. *Niech $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$ takie, że $1 \leqslant \dim(Z) \leqslant k < \dim(Y)$ oraz $Z \subseteq\parallel Y$, wówczas $\Big\langle [Z,Y]^*_k, [Z,Y]^*_{k+1}\Big\rangle$ jest podstrukturą w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ w sensie definicji* 1.4.

Dowód. (1) Weźmy $U_1, U_3 \in [Z,Y]^*_k$, takie że $U_1 \neq U_2$. Zatem zachodzi: $Z \subseteq\parallel U_1, U_2 \subseteq Y$. Zakładamy, że istnieje prosta $W \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$ taka, że $U_1, U_2 \subset W$. Sprawdzamy czy $W \in [Z,Y]^*_{k+1}$. W tym celu musimy pokazać, że:

(i) $Z \subseteq\parallel W$,

(ii) $W \subseteq Y$,

(iii) $\dim W = k+1$.

Ad. (i): Z założeń mamy, że $Z \subseteq\parallel U_1, U_2 \subseteq W$, zatem $Z \subseteq\parallel W$
Ad. (ii): Z 1.31 wiemy, że $W = U_1 \sqcup U_2$, oraz $U_1 \sqcup U_2 \subseteq Y$, stąd $W \subseteq Y$.
Ad. (iii): Z wyboru $W \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$, zatem $\dim(W) = k+1$.

(2) Weźmy $W_1, W_2 \in [Z,Y]^*_{k+1}$, $W_1 \neq W_2$. Wówczas zachodzi $Z \subseteq\parallel W_1, W_2 \subseteq Y$. Zakładamy, że istnieje punkt $U \in \mathcal{H}_k(V)$ taki, że $U \subset W_1, W_2$. Sprawdzamy, czy $U \in [Z,Y]^*_k$. Musimy pokazać, że:

(i) $Z \subseteq\parallel U$,

(ii) $U \subseteq Y$,

(iii) $\dim U = k$.

Ad. (i): Z założeń mamy, że $Z \subseteq\parallel W_1, W_2$ wtedy $Z \subseteq\parallel W_1 \cap W_2$ oraz z 1.31 $U = W_1 \cap W_2$, zatem otrzymujemy, że $Z \subseteq\parallel U$.
Ad. (ii): Z założeń, mamy że $Z \subseteq W_1, W_2 \subseteq Y$, zatem $U \subset Y$.
Ad. (iii): Z wyboru $U \in \mathcal{H}_k(V)$ mamy $\dim(U) = k$.

Zatem na podstawie (1) i (2) dowód jest zakończony. □

Twierdzenie 2.12. *Grassmannian afiniczny obcięty do niewłaściwej podstruktury odcinkowej* $\left\langle [Z,Y]^*_k, [Z,Y]^*_{k+1} \right\rangle$, *gdzie* $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$, $1 \leqslant \dim(Z) \leqslant k < \dim(Y)$ *jest, z dokładnością do izomorfizmu, Grassmannianem afinicznym*

$$\mathbf{G}_{k-\dim(Z)}(\mathbf{A}(Y_0/Z_0)),$$

gdzie Z_0, Y_0 *są podprzestrzeniami kierunkowymi odpowiednio* Z *i* Y.

Dowód. Niech Z_0, Y_0 będą podprzestrzeniami kierunkowymi odpowiednio Z i Y. Na mocy 2.7 mamy $[Z,Y]^* \cong \mathrm{L}(\mathbf{A}(Y_0/Z_0))$. Zauważmy, że k-wymiarowe podprzestrzenie w $[Z,Y]^*$ odpowiadają $(k - \dim(Z))$-wymiarowym podprzestrzeniom w $\mathbf{A}(Y_0/Z_0)$. Zatem

$$\left\langle [Z,Y]^*_k, [Z,Y]^*_{k+1} \right\rangle \cong \left\langle \mathcal{H}_{k-\dim(Z)}(\mathbf{A}(Y_0/Z_0)), \mathcal{H}_{k+1-\dim(Z)}(\mathbf{A}(Y_0/Z_0)) \right\rangle = \\ = \mathbf{G}_{k-\dim(Z)}(\mathbf{A}(Y_0/Z_0)),$$

co kończy dowód. □

Rozdział 3

Kliki

3.1 Postać trójkąta

Fakt 3.1. (Żynel J. [4, 1.11]) *Jeżeli* $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{H}_k(V)$ *są parami różne i* $U_1 \approx U_2 \approx U_3 \approx U_1$, *to* $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = k-1$ *lub* $\dim(U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3) = k+1$.

Fakt 3.2. (Żynel J. [4, 1.12]) *Jeżeli* $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{H}_k(V)$ *są parami różne,* $U_1 \parallel U_2$ *i* $U_1 \approx U_2 \approx U_3$, *to* $\dim(U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3) = k+1$.

Fakt 3.3. *Dla parami różnych* $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{H}_k(V)$, *jeśli* $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = k-1$, *to*

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 = U_1 \cap U_2 = U_2 \cap U_3 = U_3 \cap U_1.$$

Twierdzenie 3.4. *Jeśli punkty* U_1, U_2, U_3 *są wierzchołkami trójkąta w* $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$, *to zachodzi jedna z dwóch możliwości:*

(i) U_1, U_2, U_3 *mają wspólny poprzednik, czyli* $\dim(U_1, U_2, U_3) = k-1$ *lub*

(ii) $U_1 \parallel U_2 \parallel U_3$.

W obu wypadkach $\dim(U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3) = k+2$.

Dowód. Załóżmy, że U_1, U_2, U_3 są wierzchołkami trójkąta w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. Z definicji 1.7 wiemy, że U_1, U_2, U_3 są parami różne, parami współliniowe, ale nie współliniowe w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. Zatem z 1.33 punkty U_1, U_2, U_3 są parami sąsiednie lub równoległe. Stąd otrzymujemy następujące możliwości:

1. $U_1 \approx U_2 \approx U_3 \approx U_1$,
2. $U_i \parallel U_j \approx U_k \approx U_i$, gdzie $i, j, k \in \{1, 2, 3\}, \neq (i, j, k)$,
3. $U_i \sim U_j \parallel U_k \parallel U_i$, gdzie $i, j, k \in \{1, 2, 3\}, \neq (i, j, k)$,
4. $U_1 \parallel U_2 \parallel U_3 \parallel U_1$.

W przypadku 1 z 3.1 wierzchołki U_1, U_2, U_3 mają wspólny poprzednik lub następnik. Druga z tych możliwości oznacza, że punkty U_1, U_2, U_3 leżą na jednej prostej w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$, więc nie mogą tworzyć trójkąta.

W przypadku 2 z 3.2 wierzchołki mają wspólny następnik, więc jako punkty naszego $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ leżą na jednej prostej, więc nie tworzą trójkąta.

Teraz rozważmy przypadek 3. Przyjmijmy bez ograniczenia ogólności, że:

$$U_1 \not\approx U_2 \parallel U_3 \parallel U_1$$

Ponieważ U_1, U_2, U_3 są jednakowych wymiarów, więc z przechodniości relacji równoległości mamy $U_1 \parallel U_2$. To przeczy założeniu, że $U_1 \not\approx U_2$. W ten sposób pokazaliśmy, że przypadek 3. nie zachodzi.

Zatem ostatecznie zachodzą tylko dwie żądane możliwości. □

3.2 Pęki właściwe i pęki równoległych

Rozważane tutaj pojęcia mogą wydać się sztuczne z punktu widzenia geometrii Grassmannianu afinicznego $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. Przy ich definicji odwołujemy się do otaczającej przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$. Pojawią się one jednak później jako przekroje klik.

Definicja 3.5. Dwie różne podprzestrzenie H, B przestrzeni $\mathfrak{A}$, takie że

$$H \subset B, \qquad \dim(H) + 1 = k = \dim(B) - 1,$$

wyznaczają *k-pęk właściwy*, to znaczy zbiór postaci

$$\mathbf{p}(H, B) = \{U \in \mathcal{H}_k(V) \colon H \subset U \subset B\},$$

gdzie B nazywamy *podstawą*, a H *wierzchołkiem*. Przez $\mathcal{P}_k(\mathfrak{A})$ oznaczamy zbiór wszystkich k-pęków właściwych w $\mathfrak{A}$.

Zauważmy, że $\mathbf{p}(H, B) = [H, B] \setminus \{H, B\}$, czyli pęk to „krótki" odcinek bez końców. Możemy zatem traktować odcinki właściwe jako uogólnienie pęków właściwych.

Definicja 3.6. Podprzestrzenie U, B przestrzeni $\mathfrak{A}$, takie że

$$U \subseteq\parallel B, \qquad \dim(U) = k = \dim(B) - 1,$$

wyznaczają *k-pęk równoległych* (*k-pęk niewłaściwy*), tzn. zbiór postaci

$$\mathbf{p}^*(U, B) := \{W \in \mathcal{H}_k(V) \colon U \parallel W \subset B\}.$$

Podprzestrzeń U nazywamy *kierunkiem*, a B *podstawą*. Przez $\mathcal{P}^*_k(\mathfrak{A})$ oznaczamy zbiór wszystkich k-pęków niewłaściwych w $\mathfrak{A}$.

Zbiór punktów na prostej w przestrzeni $\mathfrak{A}$ formalnie spełnia założenia zarówno pęku właściwego jak i pęku równoległych.

Podprzestrzenie U_1 i U_2 przestrzeni $\mathfrak{A}$ są *współpękowe*, gdy leżą w jednym pęku (pęku właściwym lub pęku równoległych). Z wcześniejszych definicji i określenia równoległości wynika, że współpękowe podprzestrzenie przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ mają ten sam wymiar.

Fakt 3.7. *Jeśli, dwie różne podprzestrzenie U_1, U_2 przestrzeni $\mathfrak{A}$, są sąsiednie, to* $\dim(U_1 \sqcup U_2) - 1 = \dim(U_1) = \dim(U_2)$ *i wyznaczony przez nie pęk właściwy to*

$$\overline{U_1, U_2} := \mathbf{p}(U_1 \sqcap U_2, U_1 \sqcup U_2).$$

Fakt 3.8. *Jeśli dwie różne podprzestrzenie U_1, U_2 przestrzeni $\mathfrak{A}$, są równoległe, to* $\dim(U_1 \sqcup U_2) - 1 = \dim(U_1) = \dim(U_2)$ *i wyznaczony przez nie pęk równoległych to*

$$\overline{U_1, U_2} := \mathbf{p}^*(U_1, U_1 \sqcup U_2).$$

Fakt 3.9. *Jeśli U_1, U_2 są podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ takimi, że*

$$\dim(U_1 \sqcup U_2) - 1 = \dim(U_1) = \dim(U_2) \quad \textit{oraz} \quad U_1 \sqcap U_2 \neq \emptyset,$$

to $\dim(U_1 \sqcap U_2) + 1 = \dim(U_1) = \dim(U_2)$*, a tym samym $U_1 \approx U_2$.*

Wniosek 3.10. *Jeśli U_1, U_2 są podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ takimi, że*

$$\dim(U_1 \sqcup U_2) - 1 = \dim(U_1) = \dim(U_2),$$

to są równoległe lub sąsiednie, czyli zawsze są współpękowe.

Dla wygody i skrócenia notacji, przyjmijmy teraz oznaczenie na zbiór punktów współliniowych z ustalonym punktem U w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$:

$$U^{\sim} := \{W \in \mathcal{H}_k(V) \colon W \sim U\}.$$

Lemat 3.11. *Niech $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$ i $U \in \mathcal{H}_k(V)$. Jeśli punkt U nie leży na prostej B w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ i mamy dwa różne punkty U_1, U_2 na prostej B współliniowe z U, to*

$$U^{\sim} \cap [B]_k = \begin{cases} \mathbf{p}(U_1 \cap U_2, B), & \textit{gdy } U_1 \approx U_2, \\ \mathbf{p}^*(U, B), & \textit{gdy } U_1 \parallel U_2. \end{cases}$$

Dowód. Rozważmy sytuację, gdy $U_1 \approx U_2$. Niech $H := U_1 \cap U_2$. Mamy $\dim(H) = k - 1$. Z założenia punkty U_1, U_2, U tworzą trójkąt. Z 3.4 musi być

$$H = U_1 \cap U_2 \cap U. \tag{3.1}$$

„$\subseteq$" Weźmy $W \in U^{\sim} \cap [B]_k$. Zatem

$$W \subset B. \tag{3.2}$$

Nie może być jednocześnie $W = U_1$ i $W = U_2$. Przyjmijmy więc bez straty ogólności, że $W \neq U_1$. Zauważmy, że W, U, U_1 tworzą trójkąt. A więc z 3.4 mamy

$$\dim(W \cap U \cap U_1) = k - 1.$$

Z (3.1) i 3.3 mamy $H = U \cap U_1 = W \cap U \cap U_1$. Stąd $H \subset W$, co razem z (3.2) daje

$$W \in \mathbf{p}(H, B).$$

„$\supseteq$” Weźmy teraz $W \in \mathbf{p}(H, B)$. Zatem $H \subset W \subset B$. Z drugiej inkluzji wynika, że $W \in (B]_k$. Zauważmy, że z (3.1) mamy $H \subset U, W$. Zatem $W \sim U$ z 1.33.

Teraz rozważmy sytuację, gdy $U_1 \parallel U_2$.

„$\subseteq$” Weźmy $W \in U^{\sim} \cap (B]_k$. Podobnie jak wyżej w dowodzie „$\subseteq$” mamy trójkąt W, U, U_1, ale tym razem $W \parallel U \parallel U_1$. To wystarczy by stwierdzić, że $W \in \mathbf{p}^*(U, B)$.

„$\supseteq$” Niech $W \in \mathbf{p}^*(U, B)$. Wtedy $U \parallel W \subset B$. Z tego, że $U \parallel W$ mamy $W \sim U$, a z inkluzji $W \subset B$ mamy, że $W \in (B]_k$. $\square$

Lemat 3.11 może służyć jako definicja pojęcia pęku w języku wewnętrznym Grassmannianu afinicznego. Nie daje on jednak możliwości odróżnienia pęków właściwych od niewłaściwych. Rozróżnienie na dwa typy daje twierdzenie 3.4. Precycyjne odróżnienie typów dadzą dowodzone później twierdzenia o tym jaką geometrię niosą maksymalne kliki Grassmannianu afinicznego.

3.3 Kliki wyznaczone przez odcinki

Lemat 3.12. *Odcinki:*

(i) $[H, Y]_k$, *gdzie* $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$, $Y \in \mathcal{H}(V)$,

(ii) $[Z, B]_k$, *gdzie* $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$, $Z \in \mathcal{H}(V)$,

(iii) $[U, Y]^*_k$, *gdzie* $U \in \mathcal{H}_k(V)$, $Y \in \mathcal{H}(V)$,

są klikami w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$.

DOWÓD. Wystarczy pokazać, że we wszystkich trzech przypadkach, każde dwa, różne punkty z odpowiednich odcinków są współliniowe w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$.

(i) Weźmy $U_1, U_2 \in [H, Y]_k$ takie, że $U_1 \neq U_2$. Wówczas $H \subseteq U_i \subseteq Y$ dla $i = 1, 2$. Stąd $H \subseteq U_1 \cap U_2$. Ponieważ $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$ oraz $\dim U_1 = \dim U_2 = k$ oraz $U_1 \neq U_2$, otrzymujemy, że $H = U_1 \cap U_2$. Zatem skoro $\dim(U_1 \cap U_2) = k-1$, to z 1.32 mamy $U_1 \approx U_2$. Zatem z 1.33 U_1, U_2 są współliniowe w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$.

(ii) Teraz weźmy $U_1, U_2 \in [Z, B]_k$, takie, że $U_1 \neq U_2$. Wówczas $Z \subseteq U_i \subseteq B$ dla $i = 1, 2$. Zatem U_1, U_2 są punktami z prostej B w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$.

(iii) Weźmy $U_1, U_2 \in [U, Y]^*_k$ takie, że $U_1 \neq U_2$. Wówczas mamy, że $U \subseteq\parallel U_1$ oraz $U \subseteq\parallel U_2$. Ponieważ $\dim U_1 = \dim U_2 = k = \dim U$ więc $U_1 \parallel U \parallel U_2$ oraz $U_1 \parallel U_2$ z przechodniości $\parallel$. Zatem z 1.33 U_1, U_2 są współliniowe w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. $\square$

Zauważmy, że w powyższym lemacie w przypadku (ii) warstwa B jest prostą w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$, zatem elementy odcinka $[Z, B]_k$ są punktami prostej B. Przy $Z \neq \emptyset$ uzyskujemy "kawałek" prostej, natomiast dla $Z = \emptyset$ odcinek $[Z, B]_k = [\emptyset, B]_k$ jest zbiorem wszystkich punktów na prostej B.

Lemat 3.13. *Jeżeli $\mathcal{K}$ jest niepustą kliką w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$, to zachodzi co najmniej jedna z trzech możliwości:*

(i) *istnieje $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$ takie, że dla każdego $U \in \mathcal{K}$, mamy $H \subseteq U$;*

(ii) *istnieje $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$ takie, że dla każdego $U \in \mathcal{K}$, mamy $U \subseteq B$;*

(iii) *istnieje $U_0 \in \mathcal{H}_k(V)$ takie, że dla każdego $U \in \mathcal{K}$, mamy $U_0 \parallel U$.*

Gdy $|\mathcal{K}| = 1$ to zachodzą wszystkie trzy możliwości,
gdy $|\mathcal{K}| = 2$ to zachodzą albo (i) oraz (ii), albo (ii) oraz (iii),
gdy $|\mathcal{K}| \geqslant 3$ i $\mathcal{K}$ nie zawiera trójkąta, to zachodzi (ii),
gdy $\mathcal{K}$ zawiera trójkąt to zachodzi dokładnie jedna z dwu możliwości (i) i (iii).

Dowód. Gdy $|\mathcal{K}| = 1$, ponieważ $0 < k < \dim(V)$, więc łatwo możemy znaleźć odpowiednie H, B, U_0.

Rozważmy przypadek $|\mathcal{K}| = 2$. Przyjmijmy, że $\mathcal{K} = \{U_1, U_2\}$. Z 1.33 albo $U_1 \approx U_2$ albo $U_1 \parallel U_2$. W pierwszej sytuacji bierzemy $H := U_1 \cap U_2$ oraz $B := U_1 \sqcup U_2$. Zatem spełnione są (i) oraz (ii). W drugiej sytuacji podobnie $B := U_1 \sqcup U_2$, natomiast $U_0 := U_1$. Wtedy spełnione są (ii) oraz (iii).

Pozostaje przypadek $|\mathcal{K}| \geqslant 3$. Gdy wszystkie punkty z $\mathcal{K}$ leżą na jednej prostej to mamy przypadek (ii).

Załóżmy teraz, że w $\mathcal{K}$ są trzy niewspółliniowe punkty U_1, U_2, U_3. Z 3.4 są dwie możliwości:

• $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = k - 1$

Przyjmijmy, że $H := U_1 \cap U_2 \cap U_3$ i weźmy dowolny $U \in \mathcal{K}$. Gdy U jest jednym z U_1, U_2, U_3 to $H \subseteq U$. Załóżmy więc, że $U \neq U_i$ dla $i = 1, 2, 3$. Ponieważ U, U_1, U_2, U_3 są elementami kliki, więc U jest połączalny z U_1, U_2 i U_3. Punkty U_1, U_2, U_3 tworzą trójkąt, możemy zatem wybrać U_i, U_j, gdzie $i, j \in \{1, 2, 3\}$ oraz $i \neq j$, tak aby U, U_i, U_j nie leżały na jednej prostej. Mamy zatem trójkąt U, U_i, U_j. Zgodnie z 3.4 musimy rozpatrzeć dwa przypadki:

(1) $\dim(U \cap U_i \cap U_j) = k - 1$, wtedy $H = U_i \cap U_j = U_i \cap U \cap U_j$ z 3.3, zatem $H \subseteq U$, więc zachodzi (i).

(2) $U \parallel U_i \parallel U_j$, wtedy z założenia że U_1, U_2, U_3 są parami różne mamy, że $U_i \cap U_j = \emptyset$. Z założenia że U_1, U_2, U_3 mają wspólny poprzednik $U_i \cap U_j = H \neq \emptyset$, więc dostajemy sprzeczność, co oznacza, że nie może być $U \parallel U_i \parallel U_j$.

• $U_1 \parallel U_2 \parallel U_3$

Przyjmijmy, że $U_0 := U_1$ i weźmy dowolny $U \in \mathcal{K}$. Pokażemy, że $U_0 \parallel U$. Gdy U jest jednym z U_1, U_2, U_3 to $U_0 \parallel U$. Załóżmy więc, że $U \neq U_i$ dla $i = 1, 2, 3$. Podobnie jak wcześniej możemy wybrać U_i, U_j, gdzie $i, j \in \{1, 2, 3\}$ oraz $i \neq j$, tak aby U, U_i, U_j tworzyły trójkąt. Zgodnie z 3.4 musimy rozpatrzeć dwa przypadki:

(1) $\dim(U \cap U_i \cap U_j) = k-1$, wtedy $\dim(U_i \cap U_j) = k-1$. Z tego wynika, że $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, co daje nam sprzeczność bo z założenia $U_i \parallel U_j$. Tak więc ten przypadek nie jest możliwy.

(2) $U \parallel U_i \parallel U_j$, wtedy z przechodniości widzimy, że $U \parallel U_0$, a więc zachodzi (iii). □

3.4 Kliki maksymalne

Twierdzenie 3.14. *$\mathcal{K}$ jest maksymalną kliką w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ wtw., gdy zachodzi jedna z trzech możliwości:*

(i) $\mathcal{K} = [H)_k$, *gdzie* $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$,

(ii) $\mathcal{K} = (B]_k$, *gdzie* $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$,

(iii) $\mathcal{K} = [U)^*_k$, *gdzie* $U \in \mathcal{H}_k(V)$.

DOWÓD. Implikacja „⇒" zachodzi na mocy 3.13, Pokażemy, że implikacja odwrotna „⇐" również zachodzi.

Z 3.12 $\mathcal{K}$ jest kliką. Przypuśćmy, że istnieje klika $\mathcal{K}'$ taka, że $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$. Z 3.13 $\mathcal{K}'$ musi być jak w (i). Największy odcinek tej postaci to $[H, U]_k$, a więc $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$. Zatem $\mathcal{K}$ jest kliką maksymalną. Dowód (ii) i (iii) przebiega analogicznie. □

Kliki (i) z 3.14 będziemy nazywali *gwiazdami* (*właściwymi*), natomiast kliki typu (iii) będziemy nazywać *gwiazdami równoległych* (*gwiazdami niewłaściwymi*).
Klika typu (iii) to zbiór wszytskich punktów na prostej B, czasem taką klikę nazywamy *układem*.

Przy naszych założeniach w 2.1 zawsze mamy przynajmniej dwie gwiazdy właściwe i dwie gwiazdy niewłaściwe, każda z gwiazd zawiera trójkąt.

Zobaczymy teraz jakie geometrie niosą maksymalne kliki w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$.

Twierdzenie 3.15. *Niech $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$. Podstruktura $\left\langle [H)_k, [H)_{k+1} \right\rangle$ jest, z dokładnością do izomorfizmu, przestrzenią rzutową. Gdy $\dim(V) = n < \infty$, to wymiar tej przestrzeni rzutowej wynosi $n-k$.*

DOWÓD. Z 2.8 $\left\langle [H)_k, [H)_{k+1} \right\rangle$ jest podstrukturą w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. Z 2.10

$$\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})|\left\langle [H)_k, [H)_{k+1} \right\rangle \cong \mathbf{G}_{k-(k-1)}(V/H_0) = \mathbf{P}(V/H_0),$$

gdzie H_0 to podprzestrzeń kierunkowa H. Mamy

$$\dim(V/H_0) = \dim(V) - (k-1) = \dim(V) - k + 1,$$

co wystarczy jako uzasadnienie. □

Twierdzenie 3.16. *Niech $U \in \mathcal{H}_k(V)$. Podstruktura $\left\langle [U]^*_k, [U]^*_{k+1} \right\rangle$ jest, z dokładnością do izomorfizmu, przestrzenią afiniczną. Gdy* $\dim(V) = n < \infty$, *to wymiar tej przestrzeni afinicznej wynosi $n - k$.*

Dowód. Z 2.11 $\left\langle [U]^*_k, [U]^*_{k+1} \right\rangle$ jest podstrukturą w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. Z 2.12

$$\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})|\left\langle [U]^*_k, [U]^*_{k+1} \right\rangle \cong \mathbf{G}_{k-k}(\mathbf{A}(V/U_0)) = \mathbf{A}(V/U_0),$$

gdzie U_0 to podprzestrzeń kierunkowa U. Mamy

$$\dim(V/U_0) = \dim(V) - k$$

i dowód jest zakończony. □

3.5 Przekroje klik maksymalnych

Zbadamy teraz jak mogą się przecinać maksymalne kliki w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. Niech $H, H_1, H_2 \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$, $U, U_1, U_2 \in \mathcal{H}_k(V)$ oraz $B, B_1, B_2 \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$. Wówczas

$$[H)_k \cap (B]_k = \begin{cases} [H, B]_k, & \text{gdy } H \subseteq B, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

$$[U)^*_k \cap (B]_k = \begin{cases} [U, B]^*_k, & \text{gdy } U \subseteq\parallel B, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Tylko w tych dwóch przypadkach możemy uzyskać pęk w przekroju. W każdym innym, jak zobaczymy, najwyżej zbiór jednoelementowy.

Z definicji operacji $*$ wynika, że $\dim(U) = \dim(Z * U)$, oczywiście gdy $Z * U$ istnieje, to znaczy, gdy $Z \subseteq\parallel U$.

$$[H)_k \cap [U)^*_k = \begin{cases} \{H * U\}, & \text{gdy } H \subseteq\parallel U, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

Dla $H_1 \neq H_2$

$$[H_1)_k \cap [H_2)_k = \begin{cases} \{H_1 \sqcup H_2\}, & \text{gdy } \dim(H_1 \sqcup H_2) = k, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Dla $B_1 \neq B_2$

$$(B_1]_k \cap (B_2]_k = \begin{cases} \{B_1 \cap B_2\}, & \text{gdy } \dim(B_1 \cap B_2) = k, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zauważmy, że powyższy fakt stwierdza w istocie (co już i tak wiemy), że Grassmannian afiniczny jest częściową przestrzenia prostych.

Dla $U_1 \nparallel U_2$

$$[U_1)^*_k \cap [U_2)^*_k = \emptyset.$$

Rozdział 4

Zanurzenia

Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi. Rozważmy przestrzenie afiniczne $\mathfrak{A} = \mathbf{A}(V)$ oraz $\mathfrak{M} = \mathbf{A}(W)$. Ustalamy liczy naturalne k, m takie, że

$$0 < k < \dim(V) - 1 \qquad \text{i} \qquad 0 < m < \dim(W) - 1. \tag{4.1}$$

Dalej przez $F = (f, g)$ oznaczamy kolineację $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ na $\mathbf{G}_m(\mathfrak{M})$, czyli

$$f\colon \mathcal{H}_k(V) \to \mathcal{H}_m(W), \qquad g\colon \mathcal{H}_{k+1}(V) \to \mathcal{H}_{m+1}(W).$$

Stwierdzenie 4.1. *Kolineacja F zachowuje typy maksymalnych klik.*

Dowód. Z definicji kolineacji 1.21 obrazem prostej jest zawsze prosta.

Z 1.23 obrazem gwiazdy przy kolineacji F może być gwiazda, prosta lub gwiazda niewłaściwa. Z 3.15 wiemy, że gwiazda wyznacza przestrzeń rzutową, zatem jej obraz przy kolineacji musi wyznaczać też przestrzeń rzutową, oraz obrazem gwiazdy musi być gwiazda.

Z 3.16 wiemy, że gwiazda niewłaściwa wyznacza przestrzeń afiniczną, zatem jej obraz przy kolineacji F musi wyznaczać przestrzeń afiniczną, zatem obrazem gwiazdy niewłaściwej jest gwiazda niewłaściwa. $\square$

Lemat 4.2. *Kolineacja F indukuje kolineację $F' = (h, f)$ z $\mathbf{G}_{k-1}(\mathfrak{A})$ na $\mathbf{G}_{m-1}(\mathfrak{M})$ taką, że dla $U \in \mathcal{H}_k(V)$ i $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$*

$$\textit{jeśli} \quad U = H_1 \sqcup H_2, \quad \textit{to} \quad f(U) = h(H_1) \sqcup h(H_2). \tag{4.2}$$

Dowód. Gwiazdy są jednoznacznie wyznaczone swoimi wierzchołkami, tak, że gwiazdę $[H)_k$ możemy utożsamiać z H. Z 4.1 obrazem przy f gwiazdy $[H)_k$ w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ jest pewna gwiazda $[H')_m$ w $\mathbf{G}_m(\mathfrak{M})$. Zatem dostajemy nową bijekcję

$$h\colon \mathcal{H}_{k-1}(V) \to \mathcal{H}_{m-1}(W)$$

taką, że

$$f\Big([H)_k\Big) = \Big[h(H)\Big)_m.$$

Aby odwzorowanie F' było kolineacją musi spełniać warunek (1.3). Dlatego musimy go teraz sprawdzić. Rozważmy w tym celu punkt H i prostą U w $\mathbf{G}_{k-1}(\mathfrak{A})$. Inkluzja (incydencja) $H \subset U$ oznacza, że $U \in [H)_k$, gdzie H traktujemy jako wierzchołek gwiazdy, a U jako punkt w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. To jest równoważne z tym, że $f(U) \in f([H)_k) = [h(H))_m$. Z definicji gwiazdy mamy równoważnie $h(H) \subset f(U)$.

Zakładamy teraz, że $U = H_1 \sqcup H_2$. To znaczy, że gwiazdy wyznaczone przez H_1, H_2 mają wspólny punkt U w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$, czyli

$$[H_1)_k \cap [H_2)_k = \{U\}.$$

Ponieważ f i h to bijekcje więc mamy

$$\{f(U)\} = f([H_1)_k) \cap f([H_2)_k) = [h(H_1))_m \cap [h(H_2))_m = \{h(H_1) \sqcup h(H_2)\},$$

co kończy dowód. □

Przypomnijmy znany z geometrii, klasyczny fakt.

Twierdzenie 4.3. *Jeśli f jest kolineacją przestrzeni afinicznej $\mathbf{A}(V)$ na $\mathbf{A}(W)$, to istnieje półliniowa bijekcja $\varphi \colon V \to W$ oraz translacja $\tau \colon W \to W$, taka że*

$$f(u) = \tau\varphi(u)$$

dla $u \in V$.

Stwierdzenie 4.4. *Jeśli $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A}) \cong \mathbf{G}_m(\mathfrak{M})$, to $\dim(V) = \dim(W)$ i $m = k$.*

Dowód. Rozważmy, gwiazdę $\mathcal{S}$ w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. Na mocy 3.15 gwiazda $\mathcal{S}$ jest izomorficzna z przestrzenią rzutową wymiaru $\dim(V)-k$. Z 4.1 jej obraz $f(\mathcal{S})$ też jest gwiazdą w $\mathbf{G}_m(\mathfrak{M})$, a odpowiadająca jej przestrzeń rzutowa ma wymiar $\dim(W) - m$. Zatem musi być

$$\dim(V) - k = \dim(W) - m. \tag{4.3}$$

Teraz rozważmy prostą B w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. Możemy przyjąć, że

$$B = a + \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k+1} \rangle,$$

dla pewnych $a, e_1, e_2, \ldots, e_{k+1} \in V$. Niech

$$U_i := a + \langle e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_{k+1} \rangle.$$

Zauważmy, że U_i, $i = 1, 2 \ldots, k+1$ to punkty z prostej B takie, że $U_i \approx U_j$ dla $i \neq j$ oraz żadne 3 z nich nie leżą w jednej gwieździe bo

$$\dim(U_i \cap U_j \cap U_l) = k - 2$$

dla $\neq (i, j, l)$. Obrazy $f(U_i)$ tworzą analogiczny „sympleks" na prostej $g(B)$ w $\mathbf{G}_m(\mathfrak{M})$. To oznacza, że $k \leqslant m$. Ponieważ f i g to bijekcje więc możemy rozumować podobnie zaczynając od wybrania $m+1$ punktów na prostej w $\mathbf{G}_m(\mathfrak{M})$ i badać ich obrazy przy f^{-1}. Wówczas dostaniemy $m \leqslant k$. To razem z (4.3) daje żądane równości. □

Twierdzenie 4.5 (Bennett M.K. [1, Rozdz. 9.1, Tw. 5])**.** *Niech ϕ będzie kolineacją między przestrzeniami afinicznymi $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$, których kraty podprzestrzeni to odpowiednio L i L'. Wówczas istnieje izomorfizm kratowy $f\colon L \to L'$ taki, że f obcięte do zbioru atomów L jest kolineacją ϕ. Odwrotnie, jeśli $f\colon L \to L'$ jest izomorfizmem kratowym, to f obcięte do zbioru atomów L jest kolineacją $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$.*

Twierdzenie 4.6. *Kolineacja F indukuje półliniową bijekcję $\varphi\colon V \to W$ oraz translację $\tau\colon W \to W$ taką, że $f(U) = \tau\varphi(U)$ dla $U \in \mathcal{H}_k(V)$ oraz $g(U) = \tau\varphi(U)$ dla $U \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$.*

Dowód. Niech $F_k = (f_k, g_k) := F$. Korzystając k razy z 4.2 otrzymujemy ciąg kolineacji

$$\begin{aligned} F_k &= (f_k, g_k),\\ F_{k-1} &= (f_{k-1}, g_{k-1} = f_k),\\ &\vdots\\ F_1 &= (f_1, g_1 = f_2),\\ F_0 &= (f_0, g_0 = f_1). \end{aligned}$$

takich, że dla $U \in \mathcal{H}_{i+1}(V)$, $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_i(V)$

$$\text{jeśli} \quad U = H_1 \sqcup H_2, \quad \text{to} \quad g_i(U) = f_i(H_1) \sqcup f_i(H_2), \tag{4.4}$$

gdzie $i = 0, 1, \ldots k$.

Zauważmy, że F_0 jest kolineacją z przestrzeni afinicznej $\mathbf{G}_0(\mathfrak{A}) = \mathbf{A}(V)$ na przestrzeń afiniczną $\mathbf{G}_0(\mathfrak{M}) = \mathbf{A}(W)$. Tak więc na mocy 4.3 mamy półliniową bijekcję $\varphi\colon V \to W$ oraz translację $\tau\colon W \to W$ taką, że

$$\begin{aligned} f_0(a) &= \tau\varphi(a) \quad \text{dla } a \in V,\\ g_0(U) &= \tau\varphi(U) \quad \text{dla } U \in \mathcal{H}_1(V). \end{aligned}$$

Wiemy, że $f_1 = g_0$. Weźmy dowolne $U \in \mathcal{H}_2(V)$. Dobieramy $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_1(V)$ tak, aby $U = H_1 \sqcup H_2$. Następnie z 4.4 oraz 4.5 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} g_1(U) = f_1(H_1) \sqcup f_1(H_2) = g_0(H_1) \sqcup g_0(H_2) = \\ \tau\varphi(H_1) \sqcup \tau\varphi(H_2) = \tau\varphi(H_1 \sqcup H_2) = \tau\varphi(U). \end{aligned}$$

Postępując analogicznie dla poszczególnych indeksów $i = 2, 3, \ldots, k$ otrzymujemy, że:

$$\begin{aligned} f(U) &= f_k(U) = \tau\varphi(U) \quad \text{dla } U \in \mathcal{H}_k(V),\\ g(U) &= g_k(U) = \tau\varphi(U) \quad \text{dla } U \in \mathcal{H}_{k+1}(V), \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Definicja 4.7. Niech $S \subseteq \mathcal{H}_k(V)$ oraz $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}_{k+1}(V)$. Podstrukturę $\langle S, \mathcal{L}\rangle$ w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ nazywamy *podstrukturą Grassmanna*, gdy:

(A1) dla każdych dwóch różnych punktów $U_1, U_2 \in S$ i punktu U_3 takiego, że U_1, U_2, U_3 tworzą trójkąt, każdy punkt prostej $\overline{U_1, U_2}$ współliniowy z U_3 należy do S,

(A2) podstruktura $\langle S, \mathcal{L}\rangle$ jest spójna,

(A3) jeśli $\mathcal{S}$ jest gwiazdą, właściwą lub niewłaściwą, i $\mathcal{T}$ jest zbiorem wszystkich punktów na prostej takim, że $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, $|\mathcal{S} \cap S| \geqslant 2$ i $|\mathcal{T} \cap S| \geqslant 2$, to albo $S \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \emptyset$, albo $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \subseteq S$.

Warunek (A1) w powyższej definicji oznacza, że podstruktura $\langle S, \mathcal{L}\rangle$ jest domknięta na pęki.

Niestety potrzebujemy dodatkowego założenia o zanurzeniu. Zanurzenie F w sensie 1.24 zachowuje pęki, gdy obrazem pęku przy F jest pęk. Pojęcie pęku można wyrazić w terminach częściowej przestrzeni prostych, gdy są w niej przynajmniej dwa rozróżnialne typy maksymalnych klik, jako co najmniej 2 elementowe przecięcie dwóch maksymalnych klik różnych typów.

Lemat 4.8. *Jeśli F jest zanurzeniem $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ w $\mathbf{G}_m(\mathfrak{M})$, zachowującym pęki to* $\mathrm{Im}(F)$ *jest podstrukturą Grassmanna.*

Dowód. Aby pokazać, że

$$\mathrm{Im}(F) = \Big\langle f\Big(\mathcal{H}_k(V)\Big), g\Big(\mathcal{H}_{k+1}(V)\Big)\Big\rangle$$

jest podstrukturą Grassmanna, na mocy 1.25, wystarczy sprawdzić warunki z definicji 4.7.

(A1) Niech $U_1', U_2' \in \mathrm{Im}(f)$, $U_1' \neq U_2'$ i $U_3' \in \mathcal{H}_m(W)$. W $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ mamy różne, współliniowe punkty U_1, U_2 takie, że $f(U_1) = U_1'$ i $f(U_2) = U_2'$. Punkt U_3' z założeń do (A1) jest uzupełnieniem U_1', U_2' do trójkąta. Bez zmniejszania ogólności można przyjąć, że $U_3' = f(U_3)$, gdzie U_3 uzupełnia U_1, U_2 do trójkąta.

Zgodnie z 3.11 mamy pęk $p := U_3^{\sim} \cap (U_1 \sqcup U_2]_k$ (właściwy lub niewłaściwy) w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. Z naszego dodatkowego założenia o F obraz tego pęku $f(p)$ to pęk w $\mathbf{G}_m(\mathfrak{M})$. Z drugiej strony

$$f(p) = f(U_3)^{\sim} \cap (f(U_1) \sqcup f(U_2)]_k = U_3'^{\sim} \cap (U_1' \sqcup U_2']_k,$$

a więc zbiór punktów z prostej $\overline{U_1', U_2'}$ współliniowych z U_3' zawarty jest w $\mathrm{Im}(f)$.

(A2) Grassmannian afiniczny jest spójny, więc na mocy definicji zanurzenia 1.24 oraz faktu 1.25, który mówi że $\mathrm{Im}(F)$ jest podstrukturą w $\mathbf{G}_m(\mathfrak{M})$, otrzymamy spójność $\mathrm{Im}(F)$.

(A3) Niech $\mathcal{S}$ będzie gwiazdą właściwą i niech $\mathcal{T}$ będzie zbiorem wszystkich punktów na prostej B w $\mathbf{G}_m(\mathfrak{M})$. Zakładamy, że

$$\text{(a) } |\mathcal{S} \cap \mathrm{Im}(f)| \geqslant 2, \quad \text{(b) } |\mathcal{T} \cap \mathrm{Im}(f)| \geqslant 2, \quad \text{(c) } \mathrm{Im}(f) \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset. \quad (4.5)$$

Z (4.5)(c) mamy punkt $U' \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Niech $U := f^{-1}(U')$.

Na mocy (4.5)(a) możemy wziąć punkt $D' \in \mathcal{S} \cap \mathrm{Im}(f)$ taki, że $D' \neq U'$. Niech $D := f^{-1}(D')$. Z (4.1) w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ możemy punkty D, U uzupełnić do trójkąta Δ. Weźmy

$$\mathcal{S}_0 := \{R \in \mathcal{H}_k(V) \colon R \sim \Delta\}.$$

Zbiór $\mathcal{S}_0$ jest gwiazdą (właściwą lub niewłaściwą). Zauważmy, że $f(\Delta) \subset \mathcal{S}$, a więc

$$\mathcal{S} = \{R' \in \mathcal{H}_m(W) \colon R' \sim f(\Delta)\}.$$

Stąd mamy

$$\begin{aligned} f(\mathcal{S}_0) = \{f(R) \in \mathcal{H}_m(W) \colon R \sim \Delta\} &= \\ &= \{R' \in \mathrm{Im}(f) \colon R' \sim f(\Delta)\} = \mathcal{S} \cap \mathrm{Im}(f), \end{aligned}$$

co znaczy, że

$$f(\mathcal{S}_0) \subseteq \mathcal{S}. \tag{4.6}$$

Na mocy 1.25 obraz $\mathrm{Im}(F)$ jest podstrukturą w $\mathbf{G}_m(\mathfrak{M})$. Zatem z (4.5)(b) mamy $B \in \mathrm{Im}(g)$. Możemy więc wziąć prostą $B_0 := g^{-1}(B)$ w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. Niech $\mathcal{T}_0 := (B_0]_k$. Skoro $g(B_0) = B$ i na mocy 1.24 para odwzorowań (f, g) zachowuje incydencję to zachodzi:

$$f(\mathcal{T}_0) \subseteq \mathcal{T}. \tag{4.7}$$

Zauważmy, że $U \in \mathcal{S}_0 \cap \mathcal{T}_0$, więc $\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{T}_0$ jest pękiem. Stąd oraz z (4.6) i (4.7) otrzymujemy

$$f(\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{T}_0) = f(\mathcal{S}_0) \cap f(\mathcal{T}_0) = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}.$$

bo obrazem pęku przy F jest pęk. To oznacza, że $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \subseteq \mathrm{Im}(f)$ i dowód jest zakończony. □

Twierdzenie 4.9 (Misiewicz P. [3]). *Niech X będzie podstrukturą w $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$. X jest podstrukturą odcinkową wtw., gdy X jest podstrukturą Grassmanna.*

Twierdzenie 4.10. *Jeśli F jest zanurzeniem $\mathbf{G}_k(\mathfrak{A})$ w $\mathbf{G}_m(\mathfrak{M})$ zachowującym pęki to $k \leqslant m$ i istnieją $Z, Y \in \mathcal{H}(W)$, takie że:*

$$\mathrm{Im}(F) = \begin{cases} \left\langle (Y]_m, (Y]_{m+1} \right\rangle, & \textit{gdy } k = m, \\ \left\langle [Z, Y]^*_m, [Z, Y]^*_{m+1} \right\rangle, & \textit{gdy } k < m. \end{cases}$$

DOWÓD. Generalnie z (1.4) mamy

$$\mathbf{G}_k(\mathfrak{A}) \cong \mathbf{G}_m(\mathfrak{M}) | \mathrm{Im}(F). \tag{4.8}$$

Z 4.8 oraz 4.9 mamy trzy możliwości, które rozpatrzymy kolejno.

(1) $$\mathrm{Im}(F) = \Big\langle (Y]_k, (Y]_{k+1} \Big\rangle,$$
gdzie $Y \in \mathcal{H}(V)$, $k < \dim(Y)$. Z 2.9 prawa strona w (4.8) to Grassmannian afiniczny
$$\mathbf{G}_m(\mathbf{A}(Y_0)),$$
gdzie Y_0 to podprzestrzeń kierunkowa Y w W. Z 4.4 dostajemy $k = m$.

(2) $$\mathrm{Im}(F) = \Big\langle [Z, Y]_k, [Z, Y]_{k+1} \Big\rangle,$$
gdzie $Z \neq \emptyset$, $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$ oraz $\dim(Z) < k < \dim(Y)$. Na mocy 2.10 z prawej strony w (4.8) otrzymujemy Grassmannian rzutowy. Częściowa przestrzeń prostych nie może być jednocześnie Grassmannianem rzutowym i afinicznym bo przy (4.1) ten drugi zawiera kliki niosące geometrię afiniczną, a pierwszy takich nie zawiera. Tak więc ten przypdek nie jest możliwy.

(3) $$\mathrm{Im}(F) = \Big\langle [Z, Y]^*_k, [Z, Y]^*_{k+1} \Big\rangle,$$
gdzie $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$ oraz $1 \leqslant \dim(Z) \leqslant k < \dim(Y)$. Z 2.12 prawa strona w (4.8) to Grassmannian afiniczny
$$\mathbf{G}_{m-\dim(Z)}(\mathbf{A}(Y_0/Z_0)),$$
gdzie Y_0, Z_0 to podprzestrzenie kierunkowe odpowiednio Y, Z w W. Z 4.4 dostajemy $k = m - \dim(Z) < m$. $\square$

Bibliografia

[1] Bennett, M.K., *Affine and projective geometry*, Wiley Interscience, 1995.

[2] Konstantynowicz A., *Zanurzenia Grassmannianów w Grassmannianie podprzestrzeni przestrzeni rzutowej*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, 2010.

[3] Misiewicz P., *Podprzestrzenie odcinkowe w kracie afinicznej i ich charakteryzacje*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, 2010.

[4] Żynel J., *Rzutowania w kracie podprzestrzeni przestrzeni afinicznej*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, 2005.