Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Magdalena Kudzin

Zanurzenia przestrzeni pęków w afinicznych przestrzeniach pęków

Praca magisterska napisana
pod kierunkiem
dr. hab. Krzysztofa Prażmowskiego, prof. UwB

Białystok 2011

Składam serdeczne podziękowania
dr. Mariuszowi Żynelowi
za nieocenioną pomoc,
wielką życzliwość,
oraz poświęcony czas.

Magdalena Kudzin

Spis treści

Wstęp

Z algebry wiemy, że, nieco upraszczając, podgupa jest grupą, podciało jest ciałem, a podprzestrzeń przestrzeni wektorowej też jest przestrzenią wektorową. Listę tę można wydłużać o kolejne przykłady nie tylko z algebry. Nasuwa się pytanie: jak jest w geometrii? Konkretnie, czy podprzestrzeń afinicznej przestrzeni pęków też ma strukturę afinicznej przestrzeni pęków? Aby odpowiedzieć na to pytanie konieczne jest dokładniejsze zbadanie geometrii afinicznych przestrzeni pęków.

Afiniczna przestrzeń pęków $\mathcal{A}$ to struktura incydencyjna, gdzie punkty to ustalonego wymiaru k podprzestrzenie przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$, a proste to pęki tych podprzestrzeni. Dwie k-podprzestrzenie (co najmniej proste) w $\mathfrak{A}$, które leżą w $(k+1)$-podprzestrzeni (inaczej mówiąc mają wspólny następnik) mają wspólny poprzednik albo są równoległe. To powoduje, że mamy dwie rodziny k-pęków, odpowiednio: *pęki właściwe* i *pęki niewłaściwe* (*pęki równoległych*). Widać tutaj, że wygodne jest stosowanie elementów teorii krat.

Podprzestrzeń odcinkowa w $\mathcal{A}$ to zbiór punktów $\mathcal{A}$ leżących w odcinku kraty podprzestrzeni $\mathfrak{A}$. Podobnie jak w przypadku k-pęków, które są szczególnymi k-odcinkami (najmniejszymi, nietrywialnymi k-odcinkami), mamy dwie klasy podprzestrzeni odcinkowych: *właściwe* i *niewłaściwe* (*odcinki równoległych*). Dowodzę twierdzenia, które mówią, że afiniczna przestrzeń pęków obcięta do swojej podprzestrzeni odcinkowej, w zależności od wyboru wyjściowego odcinka, z dokładnością do izomorfizmu, jest afiniczną przestrzenią pęków (por. 2.4, 2.6), albo rzutową przestrzenią pęków (por. 2.5). Nie jest to jeszcze pełna odpowiedź na postawione na początku pytanie, ale wiemy już więcej. Teraz pytanie jest takie: czy podprzestrzenie odcinkowe w $\mathcal{A}$ są jedynymi, które mają strukturę afinicznych przestrzeni pęków? Aby udzielić odpowiedzi trzeba zbadać obraz zanurzenia jednej afinicznej przestrzeni pęków w drugą.

W badaniu kolineacji oraz zanurzeń przestrzeni pęków istotną rolę grają *mocne podprzestrzenie*, czyli takie gdzie każde dwa punkty są współliniowe. Takie podprzestrzenie wyznaczane są przez trójkąty. W $\mathcal{A}$ mamy trzy typy trójkątów, co pokazuję w twierdzeniu 3.1 (por. rys. 3.1, 3.2, 3.3). Są także trzy typy maksymalnych mocnych podprzestrzeni: *gwiazdy właściwe*, *układy* oraz *gwiazdy niewłaściwe*. Ich opis analityczny jako odcinków podaję w twierdzeniu 3.6. Sprawdzam również, że niepustymi przekrojami gwiazd i układów są pęki. Ciekawa jest geometria mocnych podprzestrzeni i tak w twierdzeniu 3.7 pokazuję, że układ jest (z dokładnością do izomorfizmu) przestrzenią rzutową z usuniętym punktem, gwiazda właściwa jest przestrzenią rzutową, a gwiazda niewłaściwa jest przestrzenią afiniczną.

Kolineacja w moim rozumieniu to bijekcja zbioru punktów zachowująca trójargumentową współliniowość w obie strony. Od *zanurzenia* wymagam, aby obraz przy nim był podprzestrzenią izomorficzną z zanurzaną przestrzenią. W literaturze, na przykład w [4], takie zanurzenia nazywa się *full*. W twierdzeniu 4.6 dowodzę, że kolineacje afinicznych przestrzeni pęków zachowują typy mocnych podprzestrzeni, natomiast w 4.10 dowodzę, że takie kolineacje wyznaczone są złożeniami translacji i półliniowych bijekcji, tak jak kolineacje przestrzeni afinicznych. W ostatnim, głównym twierdzeniu pracy (tw. 4.16), dowodzę, że obrazem przy zanurzeniu afinicznej przestrzeni pęków w drugą jest podprzestrzeń odcinkowa właściwa z zerowym początkiem, lub niewłaściwa. W dowodzie wykorzystuję pojęcie *podprzestrzeni Grassmanna* (por. def. 4.11 i tw. 4.13), które daje geometryczny opis podprzestrzeni odcinkowych (w języku struktury incydencyjnej, bez odwołań do zewnętrznej kraty podprzestrzeni).

Rozdział 1

Podstawowe definicje

1.1 Częściowa przestrzeń prostych

Zaczynamy od zdefiniowania podstawowych pojęć dla naszych dalszych rozważań.

Definicja 1.1. Niech S będzie niepustym zbiorem oraz niech $\mathcal{L} \subseteq 2^S$. Elementy S nazywamy punktami, natomiast elementy $\mathcal{L}$ nazywamy prostymi. Strukturę $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ nazywamy *częściową przestrzenią prostych* wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) $\mathcal{L} \neq \emptyset$,

(ii) jeśli $k, l \in \mathcal{L}$ oraz $|k \cap l| \geqslant 2$, to $k = l$,

(iii) jeśli $k \in \mathcal{L}$, to $|k| \geqslant 2$.

Niech $S = \{a, b, c\}$ ($|S| = 3$) i $L = \{k, l\}$, gdzie $k = \{a, b\}$, $l = \{a, c\}$, czyli bierzemy strukturę z trzema punktami a, b, c i dwiema prostymi k, l. Na każdej prostej są po dwa punkty. Proste k, l mają jeden punkt wspólny a. Ta konkretna struktura $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest przykladem częściowej przestrzeni prostych.

Od teraz przez $\mathfrak{A}$ będziemy oznaczać częściową przestrzeń prostych o zbiorze punktów S i zbiorze prostych $\mathcal{L}$. Mówimy, że dwa punkty są *współliniowe* (połączalne), gdy leżą na jednej prostej. Dla punktów $a, b \in S$ piszemy $a \sim b$, gdy a i b są współliniowe. Jeśli mamy przypadek, że $a \neq b$, to prostą przez a i b oznaczamy przez $\overline{a, b}$. Dwie proste *przecinają się*, gdy posiadają wspólny punkt.

Definicja 1.2. *Kliką* w $\mathfrak{A}$ nazywamy każdy podzbiór $X \subseteq S$ w którym każde dwa punkty są wspólniowe.

Definicja 1.3. Jeśli każde dwa punkty częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A}$ są współliniowe, wtedy $\mathfrak{A}$ nazywana jest *przestrzenią prostych*.

Definicja 1.4. Częściowa przestrzeń prostych $\langle S, \mathcal{L} \rangle$, w której jest spełniony warunek:

none-one-or-all : dla dowolnego punktu $p \in S$ i dowolnej prostej $l \in \mathcal{L}$ punkt p nie jest współliniowy z żadnym punktem na prostej l, jest współliniowy z dokładnie jednym punktem z prostej l lub jest współliniowy ze wszystkimi punktami prostej l;

jest *przestrzenią gamma.*

W przestrzeni gamma jeśli punkt p jest współliniowy z dwoma różnymi punktami prostej l to p jest współliniowy ze wszystkimi punktami prostej l.

Trójkątem nazywamy układ trzech parami różnych punktów zwanyh *wierzchołkami* oraz trzech parami różnych prostych zwanych *bokami* takich, że boki przecinają się parami w wierzchołkach (dualnie wierzchołki parami połączone są bokami).

Definicja 1.5. Niech $X \subseteq S$. Mówimy, że X jest *podprzestrzenią częściowej przestrzeni prostych* $\mathfrak{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej prostej $k \in \mathcal{L}$ takiej, że $|k \cap X| \geqslant 2$ mamy $k \subseteq X$.

Czasem mówimy krótko, że podzbiór X jest domknięty na prowadzenie prostych mając na myśli warunek z powyższej definicji.

Definicja 1.6. Mówimy, że podprzestrzeń X przestrzeni $\mathfrak{A}$ jest *mocna*, gdy każde dwa punkty z X są współliniowe.

Definicja 1.7. Podprzestrzeń $H \subseteq S$ nazywamy *hiperpłaszczyzną* w $\mathfrak{A}$, gdy dla dowolnej prostej $k \in \mathcal{L}$ mamy: albo $k \subseteq H$ albo k przecina H w punkcie.

Definicja 1.8. Mówimy, że podzbiór X zbioru S jest *spójny*, jeśli dla dowolnych różnych punktów $a, b \in X$ istnieje łamana zawarta w X łącząca a z b. Przez łamaną rozumiemy ciąg punktów takich, że dwa kolejne punkty w tym ciągu są współliniowe, formalnie: istnieją punkty $c_0, \ldots, c_r \in X$ takie, że $c_0 = a$, $c_r = b$ oraz $c_{i-1} \sim c_i$ dla $i = 1, \ldots, r$.

Dla zbioru punktów $X \subseteq S$ w $\mathfrak{A}$ *obcięcie* przestrzeni $\mathfrak{A}$ do zbioru X to

$$\mathfrak{A}|X := \langle X, \mathcal{L}(X) \rangle,$$

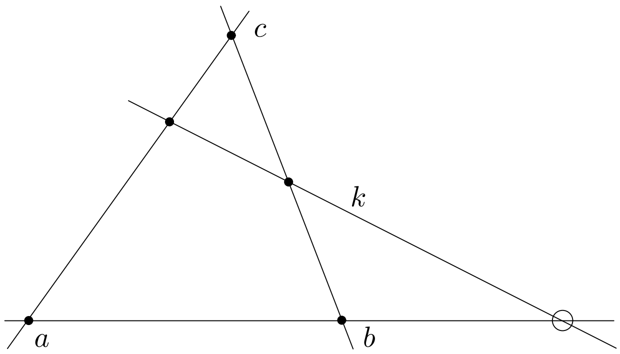
gdzie

$$\mathcal{L}(X) = \{k \in \mathcal{L} : |k \cap X| \geqslant 2\}.$$

Zauważmy, że $\mathcal{L}(X) = \{k \in \mathcal{L} : k \subseteq X\}$, gdy X jest podprzestrzenią $\mathfrak{A}$.

1.2 Przestrzeń rzutowa

Definicja 1.9. *Rzutowy warunek Veblena* (PVC):
Jeżeli prosta przecina dwa boki trójkąta w dokładnie dwóch różnych punktach, to przecina ona też trzeci bok tego trójkąta, gdzie trójkąt rozumiemy, jako trzy proste parami różne i parami przecinające się nie w jednym wspólnym punkcie.



Rysunek 1.1: Rzutowy warunek Veblena (PVC).

Definicja 1.10. Strukturę $\mathfrak{P} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ nazywamy *przestrzenią rzutową* gdy:

(i) $\mathfrak{P}$ jest przestrzenią prostych,

(ii) na każdej prostej leżą przynajmniej trzy różne punkty,

(iii) $\mathfrak{P}$ spełnia (PVC).

1.3 Analityczna przestrzeń rzutowa

Przez V będziemy oznaczać przestrzeń wektorową. Jej wektor zerowy to θ, a podprzestrzeń zerowa to Θ. Dla podprzestrzeni U w V przez $\mathrm{Sub}(U)$ oznaczamy zbiór wszystkich podprzestrzeni U, $\mathrm{Sub}_k(U)$ jako zbiór wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni (k-podprzestrzeni) z U.

Niech $\dim(V) \geqslant 2$. Struktura

$$\mathbf{P}(V) := \langle \mathrm{Sub}_1(V), \mathrm{Sub}_2(V), \subset \rangle$$

jest przestrzenią rzutową zgodnie z 1.10 i nazywamy ją *analityczną przestrzenią rzutową.*

Interesują nas przestrzenie rzutowe wymiaru co najmniej 3. Takie przestrzenie są desarguesowskie. W takim razie możemy zastosować twierdzenie o reprezentacji mówiące, że dla przestrzeni rzutowej $\mathfrak{P}$ istnieje przestrzeń wektorowa V taka, że

$$\mathfrak{P} \cong \mathbf{P}(V).$$

1.4 Rzutowa przestrzeń pęków

Niech $\mathfrak{P}$ oznacza przestrzeń rzutową zgodnie z 1.10. Podobnie jak dla przestrzeni wektorowej używamy symboli $\mathrm{Sub}, \mathrm{Sub}_k$ dla oznaczenia odpowiednich rodzin podprzestrzeni przestrzeni rzutowej $\mathfrak{P}$.

Definicja 1.11. Niech Z i Y będą podprzestrzeniami $\mathfrak{P}$. *Odcinkiem* o końcach Z, Y nazywamy zbiór

$$[Z, Y] := \{U \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{P})\colon Z \subseteq U \subseteq Y\}.$$

W szczególności zbiór

$$[Z, Y]_k := [Z, Y] \cap \mathrm{Sub}_k(\mathfrak{P})$$

nazywamy *k-odcinkiem*. Koniec Z nazywamy *wierzchołkiem*, a Y nazywamy *podstawą* odcinka lub k-odcinka.

Definicja 1.12. Niech k będzie liczbą naturalną taką, że $0 \leqslant k < \dim(\mathfrak{P})$. Jeśli B jest $(k+1)$-podprzestrzenią $\mathfrak{P}$ oraz H jest $(k-1)$-podprzestrzenią B, wtedy

$$\mathbf{p}(H, B) := [H, B]_k$$

nazywamy *k-pękiem* o wierzchołku H i podstawie B. Przez $\mathcal{P}_k(\mathfrak{P})$ oznaczamy rodzinę wszystkich k-pęków w przestrzeni $\mathfrak{P}$.

Definicja 1.13. Niech $0 \leqslant k < \dim(\mathfrak{P})$. Geometrię:

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{P}) = \langle \mathrm{Sub}_k(\mathfrak{P}), \mathcal{P}_k(\mathfrak{P})\rangle$$

z k-podprzestrzeniami $\mathfrak{P}$ jako punktami wraz z k-pękami jako prostymi nazywamy *rzutową przestrzenią pęków.*

$\mathbf{P}_k(\mathfrak{P})$ jest częściową przestrzenią prostych w sensie definicji 1.1. W skrajnych przypadkach k tzn. dla $k = 0$ i $k = \dim(\mathfrak{P}) - 1$ jest ona przestrzenią rzutową. Gdy $0 < k < \dim(\mathfrak{P})-1$, to $\mathbf{P}_k(\mathfrak{P})$ jest właściwą częściową przestrzenią prostych, to znaczy, że są wtedy tam niewspółliniowe punkty. Uzyskamy to gdy przestrzeń rzutowa $\mathfrak{P}$ ma wymiar przynajmniej 3. Wtedy $\mathfrak{P}$ może być traktowana jako analityczna przestrzeń rzutowa.

Dla przestrzeni wektorowej V możemy powtórzyć definicje 1.11, 1.12, 1.13. Gdy przyjmiemy, że $\mathfrak{P} = \mathbf{P}(V)$, to wówczas

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{P}) \cong \mathbf{P}_{k+1}(V).$$

Stwierdzenie 1.14 (Sadowski P. [6])**.** *Rzutowa przestrzeń pęków jest spójna.*

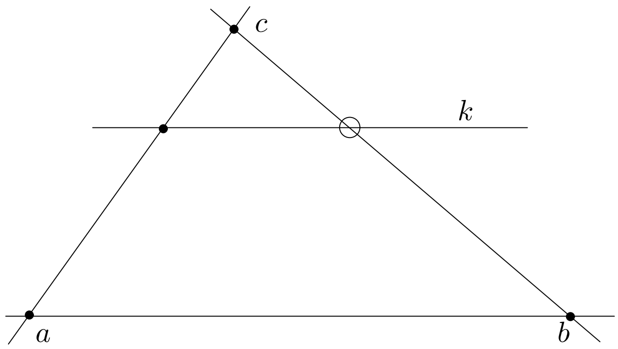
1.5 Przestrzeń afiniczna

Definicja 1.15. Niech $\langle S, \mathcal{L}\rangle$ będzie częściową przestrzenią prostych i niech $\parallel \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ będzie binarną relacją na zbiorze prostych $\mathcal{L}$. Relację $\parallel$ nazywamy relacją *równoległości*, gdy spełnione są następujące warunki:

(i) $\parallel$ jest relacją równoważności,

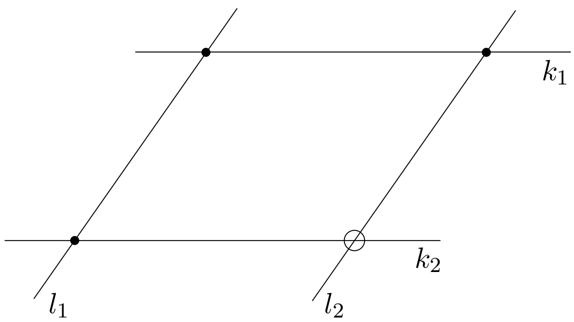
(ii) przez każdy punkt możemy przeprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej, tzn., dla każdego $a \in S$ i $k \in \mathcal{L}$ istnieje dokładnie jedna prosta $l \in \mathcal{L}$ taka, że $a \in l$ i $l \parallel k$.

Definicja 1.16. *Afiniczny warunek Veblena* (AVC):
Niech $a, b, c \in S$ tworzą niezdegenerowany trójkąt tzn., a, b, c są nie współliniowe, ale parami współliniowe. Jeśli prosta $k \in \mathcal{L}$ przecina bok $\overline{a, c}$ i $k \parallel \overline{a, b}$ to k przecina bok $\overline{b, c}$.



Rysunek 1.2: Afiniczny warunek Veblena (AVC).

Definicja 1.17. *Warunek uzupełniania do równoległoboku* (PCC):
Niech $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathcal{L}$. Jeśli prosta k_2 przecina proste l_1 i l_2, prosta l_2 przecina proste k_1 i k_2 oraz $k_1 \parallel k_2$ i $l_1 \parallel l_2$ to k_2 przecina l_2.



Rysunek 1.3: Warunek uzupełniania do równoległoboku (PCC).

Definicja 1.18. *Przestrzenią afiniczną* nazywamy strukturę $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \parallel \rangle$, gdy

(i) $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest przestrzenią prostych,

(ii) $\parallel \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ jest relacją równoległości,

(iii) $\mathfrak{A}$ spełnia (AVC),

(iv) $\mathfrak{A}$ spełnia (PCC).

Definicja 1.19. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \| \rangle$ będzie przestrzenią afiniczną. *Podprzestrzenią* przestrzeni $\mathfrak{A}$ nazywamy zbiór $X \subseteq S$ spełniający warunki:

(i) X jest podprzestrzenią częściowej przestrzeni prostych $\langle S, \mathcal{L} \rangle$,

(ii) X jest zamknięty ze względu na prowadzenie prostych równoległych, tzn. jeśli $k, l \in \mathcal{L}$, $k \subseteq X$, $k \parallel l$ oraz $l \cap X \neq \emptyset$ to $l \subseteq X$.

Fakt 1.20 (*wzajemne położenie prostych i płaszczyzn*)**.**

(i) *Dwie proste na płaszczyźnie są równoległe lub mają dokładnie jeden punkt wspólny.*

(ii) *Dwie proste w przestrzeni trójwymiarowej są równoległe lub mają dokładnie jeden punkt wspólny lub są skośne, tzn. są nierównoległe i rozłączne.*

(iii) *Dwie płaszczyzny w przestrzeni trójwymiarowej są równoległe lub ich cześcią wspólną jest prosta.*

(iv) *Prosta i płaszczyzna w przestrzeni trójwymiarowej są równoległe lub mają dokładnie jeden punkt wspólny.*

Niech $\mathfrak{A}$ będzie dowolną przestrzenią afiniczną zdefiniowaną jak w 1.18. Poprzez $\mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich podprzestrzeni $\mathfrak{A}$. Dla $U, W \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ piszemy $U \subseteq\parallel W$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej prostej $k \subseteq U$ istnieje taka prosta $l \subseteq W$, że $k \parallel l$.

Dla prostej k i punktu a w $\mathfrak{A}$ przez $a * k$ oznaczamy prostą l taką, że $a \in l \parallel k$. Analogicznie dla $Z, U \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ takich, że $Z \subseteq\parallel U$, przez $Z * U$ oznaczamy podprzestrzeń $U' \in \mathrm{Sub}(\mathfrak{A})$ taką, że $Z \subset U' \parallel U$.

1.6 Analityczna przestrzeń afiniczna

Niech V będzie przestrzenią wektorową, $n = \dim(V)$ i niech

$$\mathcal{H}(V) = \{a + U : a \in V, U \in \mathrm{Sub}(V)\} \cup \{\emptyset\}$$

będzie rodziną wszystkich warstw w V uzupełnioną o zbiór pusty. Przyjmujemy, że wymiar warstwy to wymiar jej przestrzeni kierunkowej czyli

$$\dim(a + S) = \dim(S).$$

Niech

$$\mathcal{H}_k(V) = \{a + U : a \in V, U \in \mathrm{Sub}_k(V)\}$$

będzie rodziną wszystkich k-wymiarowych warstw w V.

Mówimy, że warstwa $U = a + S$ jest równoległa do warstwy $W = b + T$ i piszemy $U \subseteq\parallel W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S \subseteq T$. Tak określona relacja równoległości nie jest symetryczna i nie spełnia warunków definicji 1.15. Zauważmy, że gdy $U \subseteq\parallel W$ to $\dim(U) \leqslant \dim(W)$. Symetryczną równoległość warstw tego samego wymiaru $U = a + S$, $W = b + T$, gdzie $a, b \in V$, $S, T \in \mathrm{Sub}(V)$, definiuje się tak

$$U \parallel W :\Longleftrightarrow S = T,$$

czyli dwie warstwy U, W są równoległe, gdy ich kierunki S, T są równe. Zauważmy, że

$$U \parallel W \iff U \subseteq\parallel W \quad \text{oraz} \quad W \subseteq\parallel U.$$

Struktura

$$\mathbf{A}(V) := \langle V, \mathcal{H}_1(V), \parallel \rangle,$$

jest przestrzenią afiniczną w sensie definicji 1.18. Nazywamy ją *analityczną przestrzenią afiniczną*.

Dla dowolnych warstw

$$U = a + S \qquad \text{oraz} \qquad W = b + T,$$

z $\mathcal{H}(V)$ wprowadzamy operacje kresu dolnego

$$U \sqcap W := U \cap W$$

i kresu górnego

$$U \sqcup W = a + \langle S, T, a - b \rangle,$$

gdzie $\langle S, T, a - b \rangle$ jest najmniejszą podprzestrzenią w V zawierającą (podprzestrzenią generowaną przez) $S \cup T \cup \{a - b\}$.

Dalej zakładamy, że wymiar rozważanej przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ zdefiniowanej w 1.18 jest co najmniej 3. Zatem jest ona desarguesowska i korzystając z twierdzenia o reprezentacji wnioskujemy, że istnieje przestrzeń wektorowa V taka, że

$$\mathfrak{A} \cong \mathbf{A}(V).$$

Fakt 1.21. *Jeżeli Z, U_1, U_2 są podprzestrzeniami $\mathfrak{A}$ takimi, że $Z \subseteq\parallel U_1, U_2$ i $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, to $Z \subseteq\parallel U_1 \cap U_2$.*

Fakt 1.22. *Jeżeli U_1, U_2, Y są podprzestrzeniami $\mathfrak{A}$ takimi, że $U_1, U_2 \subseteq\parallel Y$ i $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, to $U_1 \sqcup U_2 \subseteq\parallel Y$.*

1.7 Afiniczna przestrzeń pęków

Niech k będzie liczbą naturalną taką, że

$$0 \leqslant k < n := \dim(V).$$

Definicja 1.23. Podprzestrzenie H, B przestrzeni $\mathfrak{A}$, takie że

$$H \subset B, \qquad \dim(H) + 1 = k = \dim(B) - 1,$$

wyznaczają *k-pęk właściwy*, tzn. zbiór postaci

$$\mathbf{p}(H, B) := \{U \in \mathcal{H}_k(V) : H \subset U \subset B\}.$$

Podprzestrzeń B nazywamy *podstawą*, a H *wierzchołkiem*. Przez $\mathcal{P}_k(\mathfrak{A})$ oznaczamy zbiór wszystkich k-pęków właściwych w $\mathfrak{A}$.

Definicja 1.24. Podprzestrzenie U, B przestrzeni $\mathfrak{A}$, takie że

$$U \subseteq\parallel B, \qquad \dim(U) = k = \dim(B) - 1,$$

wyznaczają *k-pęk równoległych* (*k-pęk niewłaściwy*), tzn. zbiór postaci

$$\mathbf{p}^*(U, B) := \{R \in \mathcal{H}_k(V)\colon U \parallel R \subset B\}.$$

Podprzestrzeń U nazywamy *kierunkiem*, a B *podstawą*. Przez $\mathcal{P}^*_k(\mathfrak{A})$ oznaczamy zbiór wszystkich k-pęków niewłaściwych w $\mathfrak{A}$.

Wiemy, że usuwając z przestrzeni rzutowej $\mathfrak{P}$ jej hiperpłaszczyznę $\mathcal{H}$ dostaniemy przestrzeń afiniczną. Jeśli wierzchołek pęku rzutowego nie leży na $\mathcal{H}$, to po usunięciu $\mathcal{H}$ otrzymamy afiniczny pęk właściwy. Jeśli natomiast ten wierzchołek leży w $\mathcal{H}$, to otrzymamy afiniczny pęk równoległych. Zauważmy tutaj, że w pierwszej sytuacji nic z pęku rzutowego nie usuwamy, natomiast w drugiej usuwamy jeden jego element (punkt rzutowej przestrzeni pęków).

Można by zatem powiedzieć, że pęk równoleglych to pęk z niewłaściwym wierzchołkiem.

Definicja 1.25. Geometrię

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{A}) := \langle \mathcal{H}_k(V), \mathcal{P}_k(\mathfrak{A}) \cup \mathcal{P}^*_k(\mathfrak{A}) \rangle$$

z k-podprzestrzeniami $\mathfrak{A}$ jako punktami i k-pękami właściwymi i niewłaściwymi jako prostymi nazywamy *afiniczną przestrzenią pęków.*

Zauważmy, że $\mathbf{P}_0(\mathfrak{A})$ jest przestrzenią afiniczną.

Dwie proste na płaszczyźnie afinicznej albo przecinają się (są sąsiednie), albo są równoległe. Tak czy inaczej zawsze są one współpękowe. Tak samo jest dla hiperpłaszczyzn w $\mathfrak{A}$. Zatem $\mathbf{P}_{n-1}(\mathfrak{A})$ jest przestrzenią prostych. Można powiedzieć więcej, to jest przestrzeń rzutowa z usuniętym punktem (por. [4] i 3.7).

Dalej zakładamy, że

$$0 < k < n - 1.$$

Definicja 1.26. Mówimy, że dwie różne podprzestrzenie U, W przestrzeni $\mathfrak{A}$ są *sąsiednie* i piszemy $U \approx W$, gdy $\dim(U \sqcap W) + 1 = \dim(U) = \dim(W)$.

Zauważmy, że dwa punkty U, W w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $U \approx W$ lub $U \parallel W$.

Fakt 1.27. *Jeśli, dwie różne podprzestrzenie U, W przestrzeni $\mathfrak{A}$, są sąsiednie, to* $\dim(U \sqcup W) - 1 = \dim(U) = \dim(W)$ *i wyznaczony przez nie pęk właściwy to*

$$\overline{U, W} = \mathbf{p}(U \sqcap W, U \sqcup W).$$

Fakt 1.28. *Jeśli dwie różne podprzestrzenie U, W przestrzeni $\mathfrak{A}$ są równoległe, to* $\dim(U \sqcup W) - 1 = \dim(U) = \dim(W)$ *i wyznaczony przez nie pęk równoległych to*

$$\overline{U, W} = \mathbf{p}^*(U, U \sqcup W).$$

Fakt 1.29. *Jeśli U, W są podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ takimi, że* $\dim(U \sqcup W) - 1 = \dim(W) = \dim(U)$ *oraz* $U \sqcap W \neq \emptyset$*, to* $\dim(U \sqcap W) + 1 = \dim(U) = \dim(W)$*, a tym samym $U \approx W$.*

Wniosek 1.30. *Jeśli U, W są podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ takimi, że* $\dim(U \sqcup W) - 1 = \dim(U) = \dim(W)$*, to są one równoległe lub sąsiednie, czyli zawsze są współpękowe.*

Twierdzenie 1.31. *Afiniczna przestrzeń pęków $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ jest spójna.*

DOWÓD. Niech U, W będą punktami w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, tzn. $U, W \in \mathcal{H}_k(V)$. Zatem

$$U = a + S, \quad W = b + T, \quad \text{dla pewnych} \quad a, b \in V, \quad S, T \in \mathrm{Sub}_k(V).$$

Zauważmy, że $S \in \mathcal{H}_k(V)$ i $S \parallel U$. Dlatego też S i U są współpękowe w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Weźmy więc $P_0 := U$ i $P_1 := S$. Ponieważ $S, T \in \mathrm{Sub}_k(V)$, więc na mocy 1.14 można je połączyć łamaną o wierzchołkach P_i, gdzie $i = 1, \dots, r$ dla pewnego naturalnego r. Ponieważ $\mathrm{Sub}_k(V) \subset \mathcal{H}_k(V)$ i współpękowość w $\mathbf{P}_k(V)$ implikuje współpękowość w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, otrzymujemy więc łamaną o wierzchołkach P_i w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, gdzie $i = 0, \dots, r$. Weźmy jeszcze $P_{r+1} := W$. Zauważmy, że $W \parallel T$, a więc $P_r = T$ i $P_{r+1} = W$ są współpękowe w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Łamana o wierzchołkach

$$P_i, \quad \text{gdzie} \quad i = 0, \dots, r + 1$$

łączy punkty U, W, a zatem afiniczna przestrzeń pęków $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ jest spójna. $\square$

Rozdział 2

Podprzestrzenie odcinkowe

Dalej V jest przestrzenią wektorową, a $\mathfrak{A} = \mathbf{A}(V)$ badaną przestrzenią afiniczną.

2.1 Odcinki

Niech $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$. W przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ wyróżniamy dwa typy odcinków:

odcinek właściwy
$$[Z, Y] := \{U \in \mathcal{H}(V) : Z \subseteq U \subseteq Y\},$$

odcinek równoległych (*odcinek niewłaściwy*)
$$[Z, Y]^* := \{U \in \mathcal{H}(V) : Z \subseteq\parallel U \subseteq Y\}.$$

Koniec Z odcinka właściwego nazywamy *wierzchołkiem,* odcinka równoległych *kierunkiem,* natomiast koniec Y w obu przypadkach nazywamy *podstawą* Jeśli chodzi o odcinki równoległych to mają one sens, gdy Z jest co najmniej prostą z przestrzeni $\mathfrak{A}$, czyli gdy $Z \in \mathcal{H}_k(V)$ dla $k \geqslant 1$. Dopiero wtedy uprawnione jest nazywanie końca Z kierunkiem.

W kontekście afinicznej przestrzeni pęków będą nas interesować zbiory punktów wyznaczone przez wyżej zdefiniowane odcinki. Dla $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$ *k-odcinkiem właściwym* nazywamy zbiór postaci
$$[Z, Y]_k := [Z, Y] \cap \mathcal{H}_k(V),$$

natomiast *k-odcinkiem równoległych* (*k-odcinkiem niewłaściwym*) nazywamy zbiór postaci
$$[Z, Y]^*_k := [Z, Y]^* \cap \mathcal{H}_k(V).$$

Stwierdzenie 2.1. *k-odcinek właściwy $[Z, Y]_k$ jest podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.*

DOWÓD. Niech p będzie prostą w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ przecinającą odcinek $[Z,Y]_k$ w dwóch różnych punktach U_1, U_2. Wówczas $Z \subseteq U_1, U_2 \subseteq Y$. Rozważamy dwa możliwe typy pęku p.

Załóżmy, że p jest pękiem właściwym, a więc $p = \mathbf{p}(H,B)$ dla pewnych H, B. Zgodnie z 1.27, dla wszystkich $U \in p$ mamy

$$Z \subseteq U_1 \cap U_2 = H \subseteq U \subseteq B = U_1 \sqcup U_2 \subseteq Y,$$

a więc $p \subseteq [Z,Y]_k$.

Niech teraz p będzie pękiem równoległych, czyli $p = \mathbf{p}^*(U_0, B)$. Tak więc $U_0 \parallel U_1 \parallel U_2$. Zauważmy, że w tej sytuacji nie może być $Z \neq \Theta$, gdyż mielibyśmy wtedy $U_1 = U_2$, co przeczy naszemu założeniu. Zatem $Z = \Theta$. Tak więc, podobnie jak wyżej, dla wszystkich $U \in p$ mamy

$$Z = \Theta \subseteq U \subseteq B = U_1 \sqcup U_2 \subseteq Y,$$

i stąd $p \subseteq [Z,Y]_k$. □

Stwierdzenie 2.2. *k-odcinek niewłaściwy $[Z,Y]_k^*$ jest podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.*

DOWÓD. Niech p będzie prostą w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ przecinającą odcinek $[Z,Y]_k^*$ w dwóch różnych punktach U_1, U_2. Wówczas $Z \subseteq\parallel U_1, U_2 \subseteq Y$.

W przypadku pęku właściwego $p = \mathbf{p}(H,B)$ z 1.21 i 1.27 dla $U \in p$ mamy

$$Z \subseteq\parallel U_1 \cap U_2 = H \subseteq U \subseteq B = U_1 \sqcup U_2 \subseteq Y,$$

więc $p \subseteq [Z,Y]_k^*$.

Gdy p jest pękiem równoległych, czyli gdy $p = \mathbf{p}^*(U_0, B)$, to $U_0 \parallel U_1 \parallel U_2$. Zauważmy, że dla wszystkich $U \in p$, z przechodniości $\parallel$ i z 1.28 mamy

$$Z \subseteq\parallel U_1 \parallel U_0 \parallel U \subseteq B = U_1 \sqcup U_2 \subseteq Y.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że $p \subseteq [Z,Y]_k^*$. □

Powyższe fakty 2.1 i 2.2 pozwalają nazwać k-odcinki w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ *podprzestrzeniami odcinkowymi.*

Twierdzenie 2.3 (Zieziula E. [7])**.** *Jeśli $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$, $Z \subseteq\parallel Y$ i Z jest co najmniej prostą, to*

$$[Z,Y]^* \cong \mathrm{L}(\mathbf{A}(Y'/Z')),$$

gdzie Z', Y' to podprzestrzenie kierunkowe odpowiednio Z i Y w V.

2.2 Geometrie niesione przez odcinki

Twierdzenie 2.4. *Afiniczna przestrzeń pęków* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ *obcięta do właściwej podprzestrzeni odcinkowej* $[\emptyset, Y]_k = (Y]_k$ *jest, z dokładnością do izomorfizmu, afiniczną przestrzenią pęków* $\mathbf{P}_k(\mathbf{A}(Y'))$*, gdzie* Y' *to podprzestrzeń kierunkowa* Y *w* V*.*

DOWÓD. Niech $y \in Y$. Rozważmy translację τ o wektor $-y$. Wówczas mamy $\tau(y) = \theta$. Przesuńmy nasz odcinek translacją τ. Wtedy mamy $\tau((Y]_k) = \mathcal{H}_k(Y')$, gdzie $Y' = \tau(Y)$ jest podprzestrzenią V a dokładnie podprzestrzenią kierunkową Y. Zauważmy, że:

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{A}) \mid (Y]_k \cong \Big\langle \mathcal{H}_k(Y'), \mathcal{P}_k(\mathbf{A}(Y')) \cup \mathcal{P}^*_k(\mathbf{A}(Y')) \Big\rangle = \mathbf{P}_k(\mathbf{A}(Y')).$$

□

Twierdzenie 2.5. *Afiniczna przestrzeń pęków* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ *obcięta do właściwej podprzestrzeni odcinkowej* $[Z, Y]_k$*, gdzie* $Z \neq \emptyset$*, jest, z dokładnością do izomorfizmu, rzutową przestrzenią pęków* $\mathbf{P}_{k-\dim(Z')}(Y'/Z')$*, gdzie* Z', Y' *to podprzestrzenie kierunkowe odpowiednio* Z, Y *w* V*.*

DOWÓD. Ponieważ Z to niepusty zbiór wektorów w V, więc weźmy wektor $a \in Z$. Rozważmy wiązkę podprzestrzeni afinicznych w $\mathfrak{A}$ przez punkt a. Przy pomocy translacji możemy ją utożsamić z wiązką przez początek układu współrzędnych V, czyli przez θ. Wiemy, że proste i płaszczyzny w tej wiązce odpowiadają punktom i prostym przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}(V)$. Zauważmy, że odcinek $[Z, Y]_k$ odpowiada jednoznacznie odcinkowi $[Z', Y']_k$, gdzie Z', Y' to podprzestrzenie kierunkowe odpowiednio Z, Y w V. Z drugiej strony w rzutowej przestrzeni pęków $\mathbf{P}_k(V) = \langle \mathrm{Sub}_k(V), \mathcal{P}_k(V) \rangle$ odcinek $[Z', Y']$ wyznacza następującą przestrzeń pęków (por. [6])

$$\mathbf{P}_{k-\dim(Z')}(Y'/Z') = \Big\langle \mathrm{Sub}_{k-\dim(Z')}(Y'/Z'), \mathcal{P}_{k-\dim(Z')}(Y'/Z') \Big\rangle;$$

ostatecznie

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{A}) \mid [Z, Y]_k \cong \mathbf{P}_{k-\dim(Z')}(Y'/Z').$$

□

Twierdzenie 2.6. *Afiniczna przestrzeń pęków* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ *obcięta do niewłaściwej podprzestrzeni odcinkowej* $[Z, Y]^*_k$*, gdzie* $\dim(Z) \geqslant 1$*, jest, z dokładnością do izomorfizmu, afiniczną przestrzenią pęków* $\mathbf{P}_{k-\dim(Z')}(\mathbf{A}(Y'/Z'))$*, gdzie* Z', Y' *to podprzestrzenie kierunkowe odpowiednio* Z, Y *w* V*.*

DOWÓD. W pracy [7] dowiedziono, że odcinek $[Z, Y]^*$ jest izomorficzny z kratą afiniczną $\mathrm{L}(\mathbf{A}(Y'/Z'))$, gdzie Z', Y' to podprzestrzenie kierunkowe odpowiednio Z, Y w V (patrz 2.3). Podprzestrzenie k-wymiarowe z $[Z, Y]^*$ odpowiadają podprzestrzeniom $(k - \dim(Z))$-wymiarowym w przestrzeni Y'/Z'. Ze względu na izomorfizm kratowy uzyskujemy

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{A}) \mid [Z, Y]^*_k \cong \mathbf{P}_{k-\dim(Z')}(\mathbf{A}(Y'/Z')),$$

co kończy dowód. $\square$

Rozdział 3

Mocne podprzestrzenie

3.1 Postać trójkąta

Stwierdzenie 3.1. *Jeśli punkty* U_1, U_2, U_3 *są wierzchołkami trójkąta w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$*, to zachodzi jedna z trzech możliwości:*

(i) $U_1 \approx U_2 \approx U_3 \approx U_1$,

(ii) $U_i \parallel U_j \approx U_l \approx U_i$*, gdzie* $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$ *oraz* $\neq (i, j, l)$,

(iii) $U_1 \parallel U_2 \parallel U_3$.

Dowód. Z definicji trójkąta wiemy, że U_1, U_2, U_3 są parami różne oraz współpękowe w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Zatem z określenia pojęcia współpękowości U_1, U_2, U_3 parami są sąsiednie lub równoległe. Stąd otrzymujemy następujące możliwości:

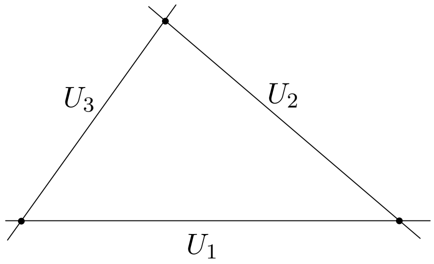
1. $U_1 \approx U_2 \approx U_3 \approx U_1$;
2. $U_i \parallel U_j \approx U_k \approx U_i$, gdzie $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$, $\neq (i, j, l)$;
3. $U_i \approx U_j \parallel U_k \parallel U_i$, gdzie $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $\neq (i, j, k)$;
4. $U_1 \parallel U_2 \parallel U_3$.

Rozważmy przypadek 3. Przyjmijmy bez ograniczenia ogólności, że

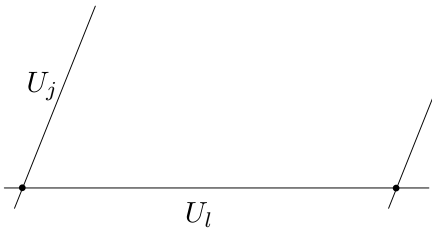
$$U_1 \approx U_2 \parallel U_3 \parallel U_1.$$

Z przechodniości relacji równoległości mamy $U_1 \parallel U_2$ i jednocześnie $U_1 \approx U_2$. Dostajemy sprzeczność. W ten sposób pokazaliśmy, że przypadek 3 nigdy nie zachodzi. □

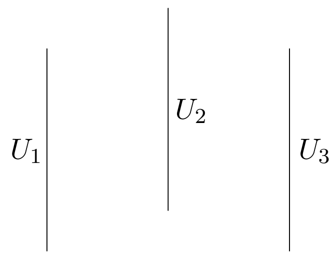
Zgodnie z 3.1 w afinicznej przestrzeni pęków mamy trzy typy trójkątów (por. rys. 3.1, 3.2, 3.3). Będziemy je tak właśnie nazywać, zgodnie z numeracją warunków w 3.1.



Rysunek 3.1: Trójkąt typu 1 w $\mathbf{P}_1(\mathfrak{A})$.



Rysunek 3.2: Trójkąt typu 2 w $\mathbf{P}_1(\mathfrak{A})$.



Rysunek 3.3: Trójkąt typu 3 w $\mathbf{P}_1(\mathfrak{A})$.

Fakt 3.2. (Żynel J. [8, 1.11]) *Jeżeli* $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{H}_k(V)$ *są parami różne i* $U_1 \approx U_2 \approx U_3 \approx U_1$*, to* $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = k-1$ *lub* $\dim(U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3) = k+1$.

Powyższy fakt i obserwacja, że trójkąty w afinicznej przestrzeni pęków $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ powstają z trójkątów w rzutowej przestrzeni pęków $\mathbf{P}_k(V)$ poprzez usunięcie hiperpłaszczyzny z V, pozwala doprecyzować 3.1 i podać warunki wymiarowe, co robimy w kolejnym twierdzeniu. Trójkąt typu 1 powstaje z trójkąta rzutowego tak, że nie jest usuwany kres dolny wierzchołków. Trójkąt typu 2 powstaje z trójkąta rzutowego rozpinającego układ przez usunięcie jednego z trzech poprzedników wierzchołków. Trójkąt typu 3 powstaje z trójkąta rzutowego rozpinającego gwiazdę przez usunięcie wspólnego poprzednika wierzchołków.

Lemat 3.3. *Jeśli punkty* U_1, U_2, U_3 *są wierzchołkami trójkąta w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$*, to dla poszczególnych typów trójkątów (numeracja z* 3.1*) mamy:*

(i) *albo* $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = k - 1$ *i* $\dim(U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3) = k + 2$*, albo* $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = k - 2$ *i* $\dim(U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3) = k + 1$*,*

(ii) $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \emptyset$ *i* $\dim(U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3) = k + 1$*,*

(iii) $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \emptyset$ *i* $\dim(U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3) = k + 2$*.*

3.2 Kliki

Stwierdzenie 3.4. *Odcinki:*

(i) $[H, Y]_k$*, gdzie* $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$*,*

(ii) $[Z, B]_k$*, gdzie* $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$*,*

(iii) $[U, Y]^*_k$*, gdzie* $U \in \mathcal{H}_k(V)$*,*

są mocnymi podprzestrzeniami w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$

Dowód. Na mocy 2.1 i 2.2 wystarczy pokazać, że we wszystkich trzech przypadkach, każde dwa elementy W_1, W_2 odcinka są współpękowe. Ponieważ zbiór pusty oraz jednoelementowy jest mocną podprzestrzenią, możemy przyjąć, że $W_1 \neq W_2$.

(i) Ponieważ $\dim(H) = k - 1$, $\dim(U_1) = \dim(U_2) = k$, $U_1 \neq U_2$ oraz $H \subset U_1, U_2$, więc $H = U_1 \cap U_2$, czyli $U_1 \approx U_2$, co oznacza, że $U_1 \sim U_2$.

(ii) Mamy tutaj $Z \subseteq U_i \subseteq B$ dla $i = 1, 2$. Zatem $U_1 \sqcup U_2 \subseteq B$. Ponieważ $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$ oraz $\dim(U_1) = \dim(U_2) = k$ i $U_1 \neq U_2$, więc $U_1 \sqcup U_2 = B$. Z 1.30 mamy $U_1 \sim U_2$.

(iii) Mamy $U \subseteq\parallel U_1, U_2$. Ponieważ $\dim(U_1) = \dim(U_2) = k = \dim(U)$, więc $U_1 \parallel U_2$, co kończy dowód. □

Stwierdzenie 3.5. *Jeśli* X *jest mocną podprzestrzenią w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$*, to zachodzi jedna z trzech możliwości:*

(i) *istnieje* $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$ *takie, że dla* $U \in X$ *mamy* $H \subset U$*,*

(ii) *istnieje* $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$ *takie, że dla* $U \in X$*, mamy* $U \subset B$*,*

(iii) *istnieje* $U_0 \in \mathcal{H}_k(V)$ *takie, że dla* $U \in X$*, mamy* $U_0 \parallel U$*.*

Dowód. Niech X będzie mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.

Jeśli $X = \emptyset$, to dowolne $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$ spełnia (i).

Jeśli $|X| = 1$, to $H \in \mathcal{H}_{k-1}(U)$, gdzie $\{U\} = X$, spełnia (i).

Jeśli $|X| \geqslant 2$, to X jest co najmniej prostą, bo X jest mocną podprzestrzenią. Gdy X jest prostą, czyli pękiem właściwym lub równoległych, w obu wypadkach mamy $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$ spełniające (ii).

Załóżmy więc, że w X zawarta jest jakaś prosta i punkt nie leżący na niej. Stąd w X istnieją trzy punkty U_1, U_2, U_3 tworzące trójkąt. Zgodnie z 3.1 mamy (bez zmniejszenia ogólności) jedną z następujących sytuacji:

1. $U_1 \approx U_2 \approx U_3 \approx U_1$,

2. $U_1 \approx U_2 \approx U_3 \parallel U_1$,

3. $U_1 \parallel U_2 \parallel U_3 \parallel U_1$.

Rozważmy sytuację 1. Z 3.2 U_1, U_2, U_3 mają wspólny poprzednik H lub wspólny następnik B.

Przyjmijmy, że istnieje poprzednik H. Niech $U \in X$. Pokażemy, że $H \subset U$. Gdyby $U \in \overline{U_1, U_2}$ lub $U \in \overline{U_2, U_3}$ lub $U \in \overline{U_3, U_1}$, to $H \in U$, bo $\overline{U_1, U_2} = \mathbf{p}(H, U_1 \sqcup U_2)$ itd.. Załóżmy więc, że tak nie jest. Wówczas mamy trzy następujące trójkąty: U, U_1, U_2, U, U_2, U_3 i U, U_3, U_1. Uszystkie te trójkąty są typu 1 lub 2. Przypuśćmy, że żaden z nich nie ma wspólnego poprzednika. Zatem z 3.3 U, U_1, U_2 mają wspólny następnik, U, U_2, U_3 mają wspólny następnik, U, U_3, U_1 mają wspólny następnik. Niech $B = U_1 \sqcup U_2$. Zauważmy, że B jest następnikiem U. Rozważmy U, U_2, U_3. B musi być następnikiem U_3. Pokazaliśmy, że $H \subset U_1, U_2, U_3 \subset B$, a więc U_1, U_2, U_3 leżą w jednym pęku, co przeczy założeniu, że U_1, U_2, U_3 tworzą trójkąt. Stąd wierzchołki jednego z trójkątów U, U_1, U_2, albo U, U_2, U_3, albo U, U_3, U_1 mają wspólny poprzednik H. W każdym z trzech przypadków $H \subset U$.

Teraz zakładamy, że U_1, U_2, U_3 mają wspólny następnik B. Rozumując jak poprzednio pokażemy, że $U \subseteq B$ dla wszystkich $U \in X$.

W sytuacji 2, zgodnie z 3.3, punkty U_1, U_2, U_3 mają wspólny następnik B. Niech $U \in X$. Pokażemy, że $U \subset B$. Gdyby $U \in \overline{U_1, U_2}$ lub $U \in \overline{U_2, U_3}$ lub $U \in \overline{U_3, U_1}$, to $U \subset B$. Załóżmy więc, że punkt U nie leży na żdanym z boków naszego trójkąta o wierzchołkach U_1, U_2, U_3. Znowu mamy trzy trójkąty: U, U_1, U_2, U, U_2, U_3 i U, U_3, U_1. Pierwsze dwa mogą być typu 1 lub 2, a ostatni typu 2 lub 3. Z 3.3 tylko gdy

$$U \cap U_1 \cap U_2 = H = U \cap U_2 \cap U_3$$

(dwa pierwsze trójkąty są typu 1 i w obu wierzchołki mają wspólne poprzedniki) oraz $U \parallel U_3 \parallel U_1$ (ostatni trójkąt jest typu 3) to nie mamy $U \subset B$, ale mamy tu sprzeczność bo U równoległe i sąsiednie z U_3.

Pozostaje do rozpatrzenia sytuacja 3. Weźmy $U_0 := U_1$ i dowolny $U \in X$. Pokażemy, że $U_0 \parallel U$. Tutaj, gdy U leży na którymkolwiek boku trójkąta U_1, U_2, U_3, to mamy od razu $U_0 \parallel U$. Zakładamy więc, że nie leży i mamy trzy nowe trójkąty: U, U_1, U_2, U, U_2, U_3 i U, U_3, U_1. Każdy z nich może być typu 2 lub 3. Gdy chociaż jeden jest typu 3, to mamy koniec dowodu z przechodniości relacji $\parallel$. Gdyby wszystkie były typu 2, to oznaczałoby, że U_1, U_2, U_3 mają wspólny następnik, co nie jest możliwe. W ten sposób dowód jest zakończony. $\square$

Twierdzenie 3.6. *X jest maksymalną mocną podprzestrzenią $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ wtw., gdy zachodzi jedna z trzech możliwości:*

(i) $X = [H, V]_k = [H)k$, *gdzie* $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$,

(ii) $X = [\emptyset, B]_k = (B]_k$, *gdzie* $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$,

(iii) $X = [U, V]^*_k = [U)^*_k$, *gdzie* $U \in \mathcal{H}_k(V)$.

Dowód. Konsekwencja 3.4 i 3.5. □

Powyższe twierdzenie charakteryzuje mocne podprzestrzenie w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ i podana jest postać analityczna tych mocnych podprzestrzeni. Podprzestrzenie postaci (i) będziemy nazywać *gwiazdami właściwymi*, postaci (ii) *układami*, a postaci (iii) *gwiazdami niewłaściwymi* albo *gwiazdami równoległych*. Trójkąt typu 1 wyznacza gwiazdę właściwą lub układ, trójkąt typu 2 wyznacza układ, natomiast trójkąt typu 3 wyznacza gwiazdę niewłaściwą.

Sprawdzimy jakie warunki muszą być spełnione, aby mocne podprzestrzenie zawierały trójkąty.

Weźmy gwiazdę $[H, V]_k$ i załóżmy, że zawiera ona trójkąt o wierzchołkach U_1, U_2, U_3. To znaczy, że $U_1, U_2, U_3 \in [H, V]_k$ i $U_1 \approx U_2 \approx U_3 \approx U_1$. Zatem

$$H \subseteq U_1 \cap U_2 \cap U_3 \subseteq U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3 \subseteq V.$$

Stąd i z 3.3 musi być

$$k + 2 \leqslant \dim(V).$$

Teraz weźmy układ $[\emptyset, B]_k$. Jeśli zawiera on trójkąt, to nie może być zbiorem punktów na prostej. To oznacza, że

$$1 \leqslant k.$$

Rozważmy teraz gwiazdę niewłaściwą $[U, V]^*_k$, gdzie $\dim(U) = k$. Podprzestrzeń U musi być conajmniej prostą, więc $1 \leqslant k$. Gdy gwiazda ta zawiera trójkąt U_1, U_2, U_3, to musi być $U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3 \subseteq V$. Stąd $k + 1 \leqslant \dim(V)$.

Teraz spróbujmy odpowiedzieć kiedy maksymalna mocna podprzestrzeń danego typu jest tylko jedna. Dla $k = 0$ jedyna gwiazda $[\emptyset, V]_k$ to cała przestrzeń. Dla $k = \dim(V) - 1$ jest tylko jeden układ $[\emptyset, V]_k$, czyli cała przestrzeń. Jedyne ograniczenie w przypadku gwiazd niewłaściwych postaci $[U, V]^*_k$ jest takie, by U było co najmniej prostą, czyli $1 \leqslant k$. Dla $k = 0$, czyli w przestrzeni afinicznej gwiazdy niewłaściwe nie mają sensu.

Podsumowując, jeśli chcemy aby w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ istniały wszystkie typy mocnych podprzestrzeni i aby zawierały one trójkąty, to musimy założyć, że

$$1 \leqslant k \leqslant \dim(V) - 2. \tag{3.1}$$

3.3 Przekroje mocnych podprzestrzeni

Niech $H, H_1, H_2 \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$, $U, U_1, U_2 \in \mathcal{H}_k(V)$ oraz $B, B_1, B_2 \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$. Wówczas:

$$[H, V]_k \cap [\emptyset, B]_k = \begin{cases} \mathbf{p}(H, B), & \text{gdy } H \subseteq B, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

$$[H, V]_k \cap [U, V]_k^* = \begin{cases} \{H * U\}, & \text{gdy } H \subseteq\parallel U, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

$$[\emptyset, B]_k \cap [U, V]_k^* = \begin{cases} \mathbf{p}^*(U, B), & \text{gdy } U \subseteq\parallel B, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Dla $H_1 \neq H_2$:

$$[H_1, V]_k \cap [H_2, V]_k = \begin{cases} \{H_1 \sqcup H_2\}, & \text{gdy } \dim(H_1 \sqcup H_2) = k, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Dla $B_1 \neq B_2$:

$$[\emptyset, B_1]_k \cap [\emptyset, B_2]_k = \begin{cases} \{B_1 \cap B_2\}, & \text{gdy } \dim(B_1 \cap B_2) = k, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Dla $U_1 \nparallel U_2$:

$$[U_1, V]_k^* \cap [U_2, V]_k^* = \emptyset.$$

Zauważmy, że

$$\mathbf{p}(H, B) = [H, B]_k = [\emptyset, B]_k \cap [H, V]_k.$$

Zatem pęk właściwy rozszerza się jednoznacznie do gwiazdy i układu. Dla pęku równoległych mamy natomiast:

$$\mathbf{p}^*(U, B) = [U, B]_k^* = [\emptyset, B]_k \cap [U, V]_k^*.$$

Tak więc pęk równoległych rozszerza się jednoznacznie do układu i gwiazdy niewłaściwej.

3.4 Geometria mocnych podprzestrzeni

Z 2.4, 2.5 oraz 2.6 otrzymujemy takie oto twierdzenie (por. [2], [4]).

Twierdzenie 3.7.

(i) *Układ, czyli odcinek* $[\emptyset, B]_k$*, gdzie* $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$*, jest, z dokładnością do izomorfizmu,* $(k{+}1)$*-wymiarową przestrzenią rzutową z usuniętym punktem.*

(ii) *Gwiazda, czyli odcinek* $[H, V]_k$*, gdzie* $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$*, jest, z dokładnością do izomorfizmu,* $(n-k)$*-wymiarową przestrzenią rzutową.*

(iii) *Gwiazda niewłaściwa, czyli odcinek* $[U, V]_k^*$*, gdzie* $U \in \mathcal{H}_k(V)$*, jest, z dokładnością do izomorfizmu,* $(n-k)$*-wymiarową przestrzenią afiniczną.*

Dowód. (i) W twierdzeniu 2.4 za Y podstawmy B. Uzyskamy wtedy, że

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{A}) \mid (B]_k \cong \mathbf{P}_k(\mathbf{A}(B')),$$

gdzie B' to podprzestrzeń kierunkowa warstwy B. Z prawej strony jest afiniczna przestrzeń pęków indeksu k nad $k+1$ wymiarową przestrzenią afiniczną $\mathbf{A}(B')$. Rozważmy domknięcie rzutowe $\overline{B}$ przestrzeni $\mathbf{A}(B')$ i taką hiperpłaszczyznę D (utworzoną przez kierunki $\mathbf{A}(B')$) w $\overline{B}$, że usuwając D z $\overline{B}$ odzyskamy $\mathbf{A}(B')$. Zauważmy, że punkty $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ odpowiadają jednoznacznie hiperpłaszczyznom w $\overline{B}$, k-pęki właściwe odpowiadają k-pękom hiperpłaszczyzn (w sensie 1.12), a k-pęki niewłaściwe k-pękom właściwym zawierającym D. Innymi słowy wszystkie pęki niewłaściwe w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ powstają z pęków hiperpłaszczyzn w $\overline{B}$ poprzez usunięcie wierzchołka wraz z hiperpłaszczyzną D. Wiemy też, że

$$\mathbf{P}_k(\overline{B}) \cong \mathbf{P}_1(\overline{B}) \cong \mathbf{P}(\overline{B}),$$

co kończy rozumowanie.

(ii) W twierdzeniu 2.5 za Z bierzemy H, a za Y bierzemy V i otrzymujemy

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{A}) \mid [Z, Y]_k \cong \mathbf{P}_{k-\dim(H')}(V/H'),$$

gdzie H' to podprzestrzeń kierunkowa H. Uwzględniając wymiary, z prawej strony mamy rzutową przestrzeń pęków indeksu 1 nad $n-k+1$ wymiarową przestrzenią wektorową, ponadto

$$\mathbf{P}_1(V/H') \cong \mathbf{P}(V/H'),$$

czyli uzyskujemy przestrzeń rzutową wymiaru $n-k$.

(iii) W twierdzeniu 2.6 za Z podstawiamy U, a za Y podstawiamy V i w ten sposób uzyskujemy

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{A}) \mid [U, V]_k^* \cong \mathbf{P}_{k-\dim(U')}(\mathbf{A}(V/U')) = \mathbf{P}_0(\mathbf{A}(V/U')),$$

gdzie U' to podprzestrzeń kierunkowa U. $\square$

Rozdział 4

Kolineacje i zanurzenia

4.1 Postać kolineacji

Zaczniemy od ogólnych, podstawowych definicji i faktów.

Definicja 4.1. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ i $\mathfrak{A}' = \langle S', \mathcal{L}' \rangle$ będą częściowymi przestrzeniami prostych. Odwzorowanie $f \colon S \to S'$ jest *kolineacją* $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$, gdy

(i) f jest bijekcją,

(ii) jeśli punkty a, b, c są współliniowe w $\mathfrak{A}$, to $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ są współliniowe w $\mathfrak{A}'$,

(iii) jeśli punkty a', b', c' są współliniowe w $\mathfrak{A}'$, to $f^{-1}(a')$, $f^{-1}(b')$, $f^{-1}(c')$ są współliniowe w $\mathfrak{A}$.

Lemat 4.2. *Niech $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ będą częściowymi przestrzeniami prostych i niech f będzie kolineacją $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$.*

(i) *Jeśli X jest podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$ to $f(X)$ jest podprzestrzenią w $\mathfrak{A}'$.*

(ii) *Jeśli X jest mocną podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$ to $f(X)$ jest mocną podprzestrzenią w $\mathfrak{A}'$.*

Dowód. (i) Niech $X \subseteq S$. X jest podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej prostej $k \in \mathcal{L}$, takiej że $|k \cap \mathcal{L}| \geqslant 2$ mamy $k \subseteq X$. Niech $k' \in \mathcal{L}'$. Zakładamy, że $\mid k' \cap f(X) \mid \geqslant 2$. Zatem mamy punkty a', b' w $\mathfrak{A}'$ takie, że $a', b' \in k' \cap f(X)$. Z 4.1 (iii) mamy $a, b \in X$ takie, że $a \neq b$, $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ i $a \sim b$. Niech $k := \overline{a, b}$. Ponieważ X jest podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$ to $k \subseteq X$. Zatem $f(k) \subseteq f(X)$. Zauważmy, że $a', b' \in f(k), k'$ zatem $f(k) = k'$ i dowód jest zakończony.

(ii) Z (i) $f(X)$ jest podprzestrzenią. Wystarczy pokazać, że jest mocna. Weźmy w tym celu dwa punkty $a', b' \in f(X)$. Mamy $a, b \in X$ takie, że $f(a) = a'$, $f(b) = b'$. Ponieważ X jest mocna to $a \sim b$. Z 4.1 (ii) mamy $a' = f(a) \sim f(b) = b'$, co kończy dowód. $\square$

Definicja 4.3. Odwzorowanie f, przy oznaczeniach z 4.1, jest *zanurzeniem* $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{A}'$, gdy $\mathrm{Im}(f)$ jest podprzestrzenią w $\mathfrak{A}'$ i f jest kolineacją $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'|\,\mathrm{Im}(f)$.

Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi odpowiednio nad ciałami F_V, F_W. Rozważmy dwie przestrzenie afiniczne $\mathfrak{A} = \mathbf{A}(V)$, $\mathfrak{M} = \mathbf{A}(W)$ i ustalmy liczby naturalne k, m takie, że

$$1 \leqslant k \leqslant \dim(V) - 2, \qquad 1 \leqslant m \leqslant \dim(W) - 2. \tag{4.1}$$

Przypomnijmy znane z algebry pojęcie i fakt z geometrii.

Definicja 4.4. Niezerowe odwzorowanie $\varphi\colon V \to W$ jest *półliniowe*, jeśli istnieje taki izomorfizm $\mu\colon F_V \to F_W$, że

(i) $\varphi(u + w) = \varphi(u) + \varphi(w)$;

(ii) $\varphi(\lambda u) = \mu(\lambda)\varphi(u)$.

dla dowolnych wektorów $u, w \in V$ oraz $\lambda \in F_V$. Mówimy także, że φ jest μ-półliniowe.

Twierdzenie 4.5. *Jeśli f jest kolineacją przestrzeni afinicznej $\mathbf{A}(V)$ na $\mathbf{A}(W)$, to istnieją półliniowa bijekcja $\varphi\colon V \to W$ oraz translacja $\tau\colon W \to W$, takie że*

$$f(u) = \tau\varphi(u)$$

dla $u \in V$.

Dalej badamy afiniczne przestrzenie pęków $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ oraz $\mathbf{P}_m(\mathfrak{M})$. Niech

$$f\colon \mathcal{H}_k(V) \to \mathcal{H}_m(W)$$

będzie kolineacją $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ na $\mathbf{P}_m(\mathfrak{M})$.

Twierdzenie 4.6. *Kolineacja f zachowuje typy mocnych podprzestrzeni, to znaczy przekształca gwiazdy właściwe na gwiazdy właściwe, układy na układy oraz gwiazdy niewłaściwe na gwiazdy niewłaściwe.*

DOWÓD. Z 4.2 wynika, że obrazem mocnej podprzestrzeni przy f jest mocna podprzestrzeń. Twierdzenie 3.7 daje nam geometryczne rozróżnienie trzech typów mocnych podprzestrzeni jakie na mocy 3.6 są możliwe w afinicznej przestrzeni pęków $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Kolineacja f musi te typy zachowywać, co wystarczy jako uzasadnienie w tym dowodzie. $\square$

Stwierdzenie 4.7. *Jeśli $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ jest izomorficzna z $\mathbf{P}_m(\mathfrak{M})$, to $m = k$ oraz* $\dim(V) = \dim(W)$.

DOWÓD. Rozważmy układ T w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Wówczas $T = [\emptyset, B]_k$, dla pewnego $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$. Zgodnie z 3.7 (także z [2] i [4]), X ma strukturę przestrzeni rzutowej wymiaru $k{+}1$ z usuniętym punktem. Obraz układu $f(T)$ w $\mathbf{P}_m(\mathfrak{M})$ to też układ zgodnie z 4.6 posiadający strukturę $(m+1)$-wymiarowej przestrzeni rzutowej z usuniętym punktem. Stąd $k+1 = m+1$, co dowodzi, że $k = m$.

Teraz rozważmy gwiazdę właściwą S w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Rozumując analogicznie, z 3.7 wynika, że S wyznacza przestrzeń rzutową wymiaru $\dim(V) - k$, a z 4.6 obraz $f(S)$ ma wymiar $\dim(W) - m$. Zatem

$$\dim(V) - m = \dim(V) - k = \dim(W) - m,$$

co kończy dowód. □

Gdy $m = k = 0$ to $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ i $\mathbf{P}_m(\mathfrak{M})$ są przestrzeniami afinicznymi. Możemy wówczas skorzystać z twierdzenia 4.5 i dostaniemy analityczną postać f jako złożenia translacji z półliniową bijekcją. Dalej udowodnimy to samo dla dowolnego, sensownego k.

Konstrukcja 4.8 (przestrzeni pęków $\mathbf{P}_{k-1}(\mathfrak{A})$ w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$)**.** Gdy $k = 1$, to przestrzeń afiniczną $\mathbf{P}_0(\mathfrak{A})$ definiujemy biorąc jako punkty gwiazdy właściwe z $\mathbf{P}_1(\mathfrak{A})$, a jako proste punkty $\mathbf{P}_1(\mathfrak{A})$. Dwie nowe proste są równoległe, gdy jako punkty leżą w pęku niewłaściwym w $\mathbf{P}_1(\mathfrak{A})$.

Zakładamy, że $2 \leqslant k$. Gwiazdę właściwą $[H)_k$ w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ można utożsamiać z jej wierzchołkiem H, czyli z punktem w $\mathbf{P}_{k-1}(\mathfrak{A})$. Rozważmy układ postaci

$$\Pi = [Z, B]_k,$$

gdzie $Z \in \mathcal{H}_{k-2}(V)$, $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$. Z 2.5 jest on izomorficzny z płaszczyzną rzutową. Weźmy $U \in \Pi$. Definiujemy pęk właściwy gwiazd

$$\mathbf{p}(U, \Pi) := \{S - \text{gwiazda}\colon U \in S \text{ i } S \cap \Pi \text{ jest prostą}\}.$$

Taki pęk odpowiada zbiorowi $\{H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)\colon H \subset U \text{ i } Z \subset H \subset B\}$, czyli pękowi właściwemu $\mathbf{p}(Z, U)$ w $\mathbf{P}_{k-1}(\mathfrak{A})$.

Zauważmy, że dla $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$, $U \in \mathcal{H}_k(V)$ z 1.29

$$H_1 \parallel H_2 \iff H_1, H_2 \subset U \text{ i nie istnieje } Z \neq \emptyset \text{ takie, że } Z \subset H_1, H_2$$

bo prawa strona mówi, że H_1, H_2 mają wspólny następnik U i przecinają się pusto. Możemy zatem dla ustalonej gwiazdy $S_0 = [H_0)_k$ i punktu U w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ zdefiniować pęk niewłaściwy gwiazd

$$\mathbf{p}^*(S_0, U) := \{S - \text{gwiazda}\colon U \in S \text{ i nie istnieje } \Pi \text{ takie, że } S_0, S \in \mathbf{p}(U, \Pi)\}.$$

Ten pęk odpowiada zbiorowi $\{H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)\colon H \subset U \text{ i } H \parallel H_0\}$, czyli pękowi niewłaściwemu $\mathbf{p}^*(H_0, U)$ w $\mathbf{P}_{k-1}(\mathfrak{A})$. □

Lemat 4.9. *Kolineacja f wyznacza kolineację f' z $\mathbf{P}_{k-1}(\mathfrak{A})$ na $\mathbf{P}_{k-1}(\mathfrak{M})$ taką, że dla $U \in \mathcal{H}_k(V)$, $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$*

$$\textit{jeśli} \quad U = H_1 \sqcup H_2, \quad \textit{to} \quad f(U) = f'(H_1) \sqcup f'(H_2). \tag{4.2}$$

Dowód. Na podstawie 4.8 i 4.6 mamy żądaną kolineację

$$f' \colon \mathcal{H}_{k-1}(V) \to \mathcal{H}_{k-1}(W)$$

taką, że

$$f\Big([H)_k\Big) = \Big[f'(H)\Big)_k.$$

Wystarczy sprawdzić warunek (4.2). Załóżmy więc, że $U = H_1 \sqcup H_2$. To znaczy, że gwiazdy wyznaczone przez H_1, H_2 mają wspólny punkt U w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, czyli

$$[H_1)_k \cap [H_2)_k = \{U\}.$$

Ponieważ f i f' to bijekcje więc mamy

$$\{f(U)\} = f([H_1)_k) \cap f([H_2)_k) = [f'(H_1))_k \cap [f'(H_2))_k = \{f'(H_1) \sqcup f'(H_2)\},$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 4.10. *Istnieje półliniowa bijekcja $\varphi \colon V \to W$ oraz translacja $\tau \colon W \to W$ taka, że $f(U) = \tau\varphi(U)$ dla $U \in \mathcal{H}_k(V)$.*

Dowód. Z 4.9 mamy ciąg kolineacji $f_0, f_1, \ldots, f_k = f$ takich, że

$$f_i \colon \mathcal{H}_i(V) \to \mathcal{H}_i(W).$$

Dla $U \in \mathcal{H}_{i+1}(V)$, $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_i(V)$

$$\text{jeśli} \quad U = H_1 + H_2, \quad \text{to} \quad f_{i+1}(U) = f_i(H_1) + f_i(H_2), \tag{4.3}$$

gdzie $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Odwzorowanie f_0 jest kolineacją przestrzeni afinicznych. Z 4.5 istnieje półliniowa bijekcja $\varphi \colon V \to W$ oraz translacja $\tau \colon W \to W$ taka, że $f_0(u) = \tau\varphi(u)$ dla $u \in V$. Weźmy teraz dowolne $U \in \mathcal{H}_1(V)$. Możemy dobrać $v, w \in V$ tak, aby $U = v \sqcup w$. Wówczas

$$f_1(U) = f_0(v) \sqcup f_0(w) = \tau\varphi(v) \sqcup \tau\varphi(w) = \tau\varphi(U)$$

z (4.3) dla $i = 0$. Stosując (4.3) kolejno dla $i = 1, 2, \ldots, k$, otrzymujemy, że

$$f(U) = f_k(U) = \varphi(U)$$

dla $U \in \mathcal{H}_k(V)$, co kończy dowód. □

Powyższe twierdzenie mówi, że kolineacja afinicznej przestrzeni pęków wyznaczona jest złożeniem półliniowej bijekcji z translacją, podobnie jak kolineacja przestrzeni afinicznych.

4.2 Obraz przy zanurzeniu

Definicja 4.11. Podprzestrzeń X w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ jest *podprzestrzenią Grassmanna*, gdy:

(i) X jest spójna,

(ii) jeśli l jest prostą, S jest gwiazdą (właściwą lub niewłaściwą), a T układem w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ takimi, że $l = S \cap T$ oraz przekroje $X \cap S$ i $X \cap T$ są co najmniej prostymi (równoważnie $|X \cap S|, |X \cap T| \geqslant 2$), to albo $X \cap l = \emptyset$, albo $l \subseteq X$.

W przypadku struktur incydencyjnych, gdzie proste nie są zbiorami punktów, na przykład w Grassmannianach rzutowych i afinicznych, mówi się o *podstrukturach*, a nie podprzestrzeniach Grassmanna. W definicji podstruktury Grassmanna żąda się, aby była ona domknięta na pęki, co w naszej sytuacji oznacza, że jest ona podprzestrzenią. Zatem oba te pojęcia w kontekście naszej przestrzeni pęków są równoważne.

Stwierdzenie 4.12. *Podprzestrzeń odcinkowa w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ *jest podprzestrzenią Grassmanna.*

DOWÓD. Sprawdzimy warunek (i) w 4.11. Podprzestrzeń odcinkowa w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ ma jedną z trzech postaci:

(i) $[\emptyset, Y]_k$ jest spójna z 2.4 i 1.31,

(ii) $[Z, Y]_k$, gdzie $Z \neq \emptyset$ jest spójna z 2.5 i wyników pracy [5],

(iii) $[Z, Y]^*_k$ jest spójna z 2.6 i 1.31.

Teraz sprawdzamy warunek (ii). Rozważmy k-odcinek $[Z, Y]_k$, gdzie $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$. Mamy do rozpatrzenia dwie postacie prostej l.

Niech $l = \mathbf{p}(H, B)$ będzie pękiem właściwym, który rozszerzamy do gwiazdy $S = [H)_k$ i układu $T = (B]_k$. Z założeń do 4.11(ii) mamy, że

$$[Z, Y]_k \cap [H)_k = [Z \sqcup H, Y]_k$$

jest co najmniej prostą, więc $Z \subseteq H$ oraz

$$[Z, Y]_k \cap (B]_k = [Z, Y \cap B]_k$$

jest co najmniej prostą więc $B \subseteq Y$. Stąd $l = [H, B]_k \subseteq [Z, Y]_k$.

Niech teraz $l = \mathbf{p}^*(U, B)$. Rozszerzamy go do gwiazdy niewłaściwej $S = [U)^*_k$ i układu $T = (B]_k$. Z założeń do 4.11 mamy $B \subseteq Y$ jak wyżej i musi być $Z = \emptyset$ bo inaczej przekrój naszego odcinka i gwiazdy niewłaściwej jest pusty. Wtedy

$$[\emptyset, Y]_k \cap [U)^*_k = [U, Y]^*_k.$$

i mamy $l = [U, B]^*_k \subseteq [\emptyset, Y]_k$.

Pozostaje do rozpatrzenia odcinek $[Z, Y]^*_k$, gdzie Z jest co najmniej prostą w $\mathfrak{A}$. Gwiazda właściwa może przecinać taki odcinek najwyżej w jednym punkcie, więc zakładamy, że $l = \mathbf{p}^*(U, B)$ i bierzemy $S = [U)^*_k$, $T = (B]_k$. Z założeń do 4.11(ii) mamy $Z \subseteq\parallel U$ i $B \subseteq Y$ i wtedy $l = [U, B]^*_k \subseteq [Z, Y]^*_k$. □

Twierdzenie 4.13 (Misiewicz P., [5]). *Niech X będzie podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Podprzestrzeń X jest podprzestrzenią odcinkową wtedy i tylko wtedy, gdy X jest podprzestrzenią Grassmanna.*

Lemat 4.14. *Niech f będzie zanurzeniem $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ w $\mathbf{P}_m(\mathfrak{M})$ i X' maksymalną mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_m(\mathfrak{M})$. Jeśli $|X' \cap \mathrm{Im}(f)| \geqslant 2$, to w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ istnieje maksymalna mocna podprzestrzeń X taka, że $f(X) = X' \cap \mathrm{Im}(f)$.*

Dowód. Z założenia, że $|X' \cap \mathrm{Im}(f)| \geqslant 2$, można wziąć prostą p' taką, że $p' \subseteq X' \cap \mathrm{Im}(f)$. Niech $p := f^{-1}(p')$. Rozszerzamy prostą p do gwiazdy S i układu T, czyli $p = S \cap T$. Z naszych założeń wymiarowych (4.1) gwiazda S zawiera trójkąt Δ_S i układ T też zawiera trójkąt Δ_T. Weźmy $S' := f(S)$ i $T' := f(T)$. Są to kliki rozpięte przez trójkąty odpowiednio $f(\Delta_S)$ i $f(\Delta_T)$. Ponieważ trójkąt jednoznacznie wyznacza maksymalną mocną podprzestrzeń, więc albo $S' \subseteq X'$ albo $T' \subseteq X'$, ale nie zachodzą obie inkluzje jednocześnie. Powiedzmy, że $S' \subseteq X'$. A więc $S' \subseteq X' \cap \mathrm{Im}(f)$. Zauważmy, że

$$S = \{U \in \mathcal{H}_k(V) : U \sim \Delta_S\}.$$

Ponieważ $f(\Delta_S) \subseteq S' \subseteq X'$, więc

$$X' = \{U' \in \mathcal{H}_m(W) : U' \sim f(\Delta_S)\}.$$

Zobaczmy, że

$$\begin{aligned} f(S) = \{f(U) \in \mathcal{H}_m(W) : U \sim \Delta_S\} = \\ = \{U' \in \mathrm{Im}(f) : U' \sim f(\Delta_S)\} = X' \cap \mathrm{Im}(f). \end{aligned}$$

W tym przypadku szukanym X jest S. Analogicznie postępujemy, gdy $T' \subseteq X'$ i bierzemy $X := T$, co kończy dowód. □

Lemat 4.15. *Jeśli f jest zanurzeniem $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ w $\mathbf{P}_m(\mathfrak{M})$ to $\mathrm{Im}(f)$ jest podprzestrzenią Grassmanna w $\mathbf{P}_m(\mathfrak{M})$.*

Dowód. Musimy sprawdzić dwa warunki z 4.11. Z 1.31 i definicji zanurzenia obraz $\mathrm{Im}(f)$ jest spójny.

Teraz niech l będzie prostą, S gwiazdą, T układem w $\mathbf{P}_m(\mathfrak{M})$ takimi, że $l = S \cap T$. Zakładamy, że $|\mathrm{Im}(f) \cap S| \geqslant 2$ i $|\mathrm{Im}(f) \cap T| \geqslant 2$. Dodatkowo, przyjmujemy, że $\mathrm{Im}(f) \cap l \neq \emptyset$. Musimy wykazać, że $l \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

Niech $U' \in \mathrm{Im}(f) \cap l$. Mamy $U := f^{-1}(U')$. Na mocy 4.14 mamy w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ gwiazdę S_0 i układ T_0 takie, że

$$f(S_0) = S \cap \mathrm{Im}(f) \qquad \text{oraz} \qquad f(T_0) = T \cap \mathrm{Im}(f).$$

Z tego, że $U \in S_0 \cap T_0$ przekrój $S_0 \cap T_0$ jest prostą. Co więcej

$$f(S_0 \cap T_0) = f(S_0) \cap f(T_0) = \mathrm{Im}(f) \cap l.$$

Obrazem prostej przy zanurzeniu f jest prosta, więc $\mathrm{Im}(f) \cap l$ jest prostą. Stąd musi być $l \subseteq \mathrm{Im}(f)$. □

Twierdzenie 4.16. *Jeśli f jest zanurzeniem $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ w $\mathbf{P}_m(\mathfrak{M})$ to $k \leqslant m$ oraz istnieją $Z, Y \subseteq \mathcal{H}(W)$ takie, że*

$$\mathrm{Im}(f) = \begin{cases} [\emptyset, Y]_m, & \text{gdy } k = m, \\ [Z, Y]^*_m, & \text{gdy } k < m. \end{cases}$$

W drugim wypadku Z jest co najmniej prostą w $\mathfrak{M}$.

DOWÓD. Niech $f_0 \colon \mathcal{H}_k(V) \to \mathrm{Im}(f)$ taka, że $f_0(U) = f(U)$ dla $U \in \mathcal{H}_k(V)$. Z 4.15 i 4.13 $\mathrm{Im}(f)$ jest podprzestrzenią odcinkową w $\mathbf{P}_m(\mathfrak{M})$, więc f_0 jest kolineacją $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ na $\mathbf{P}_m(\mathfrak{M})|\,\mathrm{Im}(f)$, czyli

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{A}) \cong \mathbf{P}_m(\mathfrak{M})|\,\mathrm{Im}(f). \tag{4.4}$$

Tak więc, na mocy 2.4, 2.5 i 2.6 nie jest możliwe, aby podprzestrzeń odcinkowa $\mathrm{Im}(f)$ była właściwą podprzestrzenią odcinkową postaci $[Z, Y]_m$, gdzie $Z \neq \emptyset$. Tak więc pozostają dwa żądane przypadki.

Weźmy $\mathrm{Im}(f) = [Z, Y]^*_k$, gdzie Z jest co najmniej prostą w $\mathfrak{M}$. Wówczas z (4.4) oraz 2.6 mamy

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{A}) \cong \mathbf{P}_{k-\dim(Z')}(Y'/Z'),$$

gdzie Z', Y' to podprzestrzenie kierunkowe odpowiednio Z i Y w V. W związku z tym $k = m - \dim(Z)$ czyli otrzymaliśmy, że $k < m$.

Teraz weźmy $\mathrm{Im}(f) = [\emptyset, Y]_k$. Z (4.4) i 2.4 mamy

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{A}) \cong \mathbf{P}_m(Y'),$$

gdzie Y' to podprzestrzeń kierunkowa Y w V. Zatem $k = m$.

□

Bibliografia

[1] Bennett M.K., *Affine and projective geometry*, Wiley Interscience, 1995.

[2] Bichara A., Mazocca F. *On a characterization of the Grassmann spaces associated with an affine space*, Annals of Discrete Math. **18** (1983), 95–112.

[3] Chrabąszcz A., *Podprzestrzenie w Grassmannianach kombinatorycznych*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, Białystok, 2009.

[4] Ferrara Dentice E., Lo Re P.M., *Embeddings of affine Grassmann spaces*, J. Geom. **93** (2009), 62–70.

[5] Misiewicz P., *Podprzestrzenie odcinkowe w kracie afinicznej i ich charakteryzacje*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, 2010.

[6] Sadowski P., *Zanurzenia przestrzeni pęków w rzutowych przestrzeniach pęków*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, Białystok, 2011.

[7] Zieziula E., *Zanurzenia Grassmannianów w Grassmannianach podprzestrzeni, przestrzeni Afinicznej*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, Białystok, 2011.

[8] Żynel J., *Rzutowania w kracie podprzestrzeni przestrzeni afinicznej*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, 2005.