Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Paweł Sadowski

Zanurzenia przestrzeni pęków w rzutowych przestrzeniach pęków

Praca magisterska napisana
pod kierunkiem
dr. hab. Krzysztofa Prażmowskiego, prof. UwB

Białystok 2011

Składam serdeczne podziękowania
dr Mariuszowi Żynelowi
za cierpliwość.

Paweł Sadowski

Spis treści

Wstęp **1**

1 Podstawowe definicje **3**
1.1 Częściowa przestrzeń prostych 3
1.2 Kolineacje i zanurzenia 5
1.3 Przestrzeń rzutowa i przestrzeń pęków 6

2 Podprzestrzenie **8**
2.1 Podprzestrzenie odcinkowe 8
2.2 Podprzestrzenie nieodcinkowe 9
2.3 Obcięcie do odcinka 10

3 Mocne podprzestrzenie **13**
3.1 Postać trójkąta 13
3.2 Gwiazdy i układy 14

4 Zanurzenia **19**

Bibliografia **26**

Wstęp

Przestrzenie pęków, czasem zwane też przestrzeniami Grassmanna, nader często pojawiają się w literaturze, w różnych kontekstach, tam gdzie badana jest struktura podprzestrzeni ustalonego wymiaru. Nas interesować będą rzutowe przestrzenie pęków, to znaczy, takie gdzie jako punkty bierzemy k-wymiarowe podprzestrzenie ustalonej przestrzeni rzutowej. Dla wygody pracujemy w modelu analitycznym nad przestrzenią wektorową.

Dwa odwołania do literatury wydają się być konieczne w tym miejscu. Tallini w [2] podaje aksjomatyczny opis rzutowych przestrzeni pęków, natomiast Pankov w swojej książce [4] bada problem bardzo wszechstronnie.

W swojej pracy próbujemy odpowiedzieć na dwa pytania dotyczące rzutowych przestrzeni pęków:

1. jakie podprzestrzenie przestrzeni pęków niosą strukturę przestrzeni pęków,

2. jaka jest postać zanurzeń przestrzeni pęków w przestrzenie pęków.

Częściową odpowiedź na pierwsze pytanie daje twierdzenie 2.9, które mówi, że obcięcie przestrzeni pęków do podprzestrzeni odcinkowej jest izomorficzne z pewną przestrzenią pęków. Aby dowieść zdanie odwrotne potrzebujemy zbadać zanurzenia jednej przestrzeni pęków w drugą. Tak więc, jak widać, postawione w pracy problemy są ze sobą ściśle związane. Rezultat, który głosi, że obrazem przy zanurzeniu jednej przestrzeni pęków w drugą jest odcinek, jest sformułowany i dowodzony w 4.13. Wynik ten w istotny sposób zależy od przyjętej definicji zanurzenia. My zakładamy, że zanurzenie jest pełne (ang. full) to znaczy przestrzeń zanurzana i jej obraz są izomorficzne, obraz jest podprzestrzenią i zachowywana jest trójargumentowa współliniowość w obie strony (por. definicje 1.9 i 1.10). Ostateczna odpowiedź na pytanie 1 daje twierdzenie 4.14 które mówi, że podprzestrzenie odcinkowe to jedyne takie podprzestrzenie w przestrzeni pęków, które niosą strukturę przestrzeni pęków.

Badając zanurzenia znajdujemy w pracy również ich postać analityczną. Istotną rolę w naszych rozważaniach pełnią mocne podprzestrzenie. W przestrzeni pęków, mamy dwie rodziny mocnych podprzestrzeni, a mianowicie gwiazdy i układy (por. 3.12). Są to specyficzne podprzestrzenie odcinkowe.

Generalnie mamy dwa rodzaje kolineacji i zanurzeń w naszym wypadku: te, które zachowują i te, które zamieniają typy mocnych podprzestrzeni (por.

twierdzenie 4.5). Kolineacje zachowujące typy mocnych podprzestrzeni wyznaczone są półliniowymi bijekcjami (por. twierdzenie 4.7), podobnie jak kolinacje przestrzeni rzutowych. Natomiast kolineacje zamieniające typy mocnych podprzestrzeni dane są półtoraliniowymi formami (por. twierdzenie 4.9).

Rozdział 1

Podstawowe definicje

Zanim wgłębimy się w główny temat tej pracy, należy zwrócić uwagę na kilka istotnych pojęć, z których w dalszym rozumowaniu będziemy korzystać. Jedną z podstawowych definicji, można by powiedzieć niezbędną do naszego rozumowania jest definicja częściowej przestrzeni prostych.

1.1 Częściowa przestrzeń prostych

Definicja 1.1. Niech S będzie niepustym zbiorem oraz niech $\mathcal{L} \subseteq 2^S$. Elementy S nazywamy punktami, natomiast elementy $\mathcal{L}$ nazywamy prostymi. Strukturę $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ nazywamy *częściową przestrzenią prostych* wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) $\mathcal{L} \neq \emptyset$

(ii) jeśli $k, l \in \mathcal{L}$ oraz $|k \cap l| \geqslant 2$, to $k = l$,

(iii) jeśli $k \in \mathcal{L}$, to $|k| \geqslant 2$.

Niech $S = \{a, b, c\}$ ($|S| = 3$) i $\mathcal{L} = k, l$, gdzie $k = \{a, b\}$, $l = \{a, c\}$, czyli bierzemy strukturę z trzema punktami a, b, c i dwiema prostymi k, l. Na każdej prostej są po dwa punkty. Proste k, l mają jeden punkt wspólny a. Ta konkretna struktura $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest przykladem częściowej przestrzeni prostych.
Od teraz przez $\mathfrak{A}$ będziemy oznaczać częściową przestrzeń prostych o zbiorze punktów S i zbiorze prostych $\mathcal{L}$. Mówimy, że dwa punkty są *współliniowe* (połączalne), gdy leżą na jednej prostej. Dodatkowo dla punktów $a, b \in S$, piszemy $a \sim b$, gdy a i b są współliniowe. Jeśli mamy przypadek, że $a \neq b$, to prostą przez a i b zapisujemy przez $\overline{ab}$. Dwie proste *przecinają się*, gdy posiadają wspólny punkt.

Definicja 1.2. Zbiór punktów $\mathcal{K} \subseteq S$ w częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A}$ nazywamy *kliką*, gdy każde dwa punkty w $\mathcal{K}$ są współliniowe.

Definicja 1.3. Jeśli każde dwa punkty częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A}$ są współliniowe, wtedy $\mathfrak{A}$ nazywana jest *przestrzenią prostych.*

Definicja 1.4. Niech $X \subseteq S$. Mówimy, że X jest *podprzestrzenią częściowej przestrzeni prostych* $\mathfrak{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej prostej $k \in \mathcal{L}$ takiej, że $|k \cap X| \geqslant 2$ mamy $k \subseteq X$.

Czasem mówimy krótko, że podzbiór X jest domknięty na prowadzenie prostych mając na myśli warunek z powyższej definicji.

Niech $X \subseteq S$ będzie podzbiorem zbioru punktów $\mathfrak{A}$. Wówczas

$$\mathfrak{A}|X := \langle X, \mathcal{L}(X) \rangle$$

gdzie

$$\mathcal{L}(X) = \{k \in \mathcal{L} : |k \cap X| \geqslant 2\}.$$

Zauważmy, że $\mathcal{L}(X) = \{k \in \mathcal{L} : k \subseteq X\}$, gdy X jest podprzestrzenią.

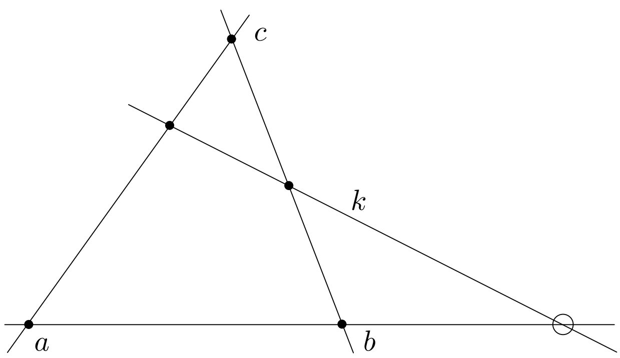
Fakt 1.5. *Gdy X jest podprzestrzenią $\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}|X$ jest częściową przestrzenią prostych.*

Podprzestrzeń częściowej przestrzeni prostych jest *mocna* gdy każde dwie jej punkty sa współliniowe. Zauważmy, że gdy X jest mocną podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}|X$ jest przestrzenią prostych.

Definicja 1.6. Mówimy, że podzbiór X zbioru S jest *spójny*, jeśli dla dowolnych różnych punktów $a, b \in X$ istnieje łamana zawarta w X łącząca a z b. Przez łamaną rozumiemy ciąg punktów takich, że dwa kolejne punkty w tym ciągu są współliniowe, formalnie: istnieją punkty $c_0, \ldots, c_r \in X$ takie, że $c_0 = a$, $c_r = b$ oraz $c_{i-1} \sim c_i$ dla $i = 1, \ldots, r$.

Trójkątem nazywamy układ trzech parami różnych punktów zwanych *wierzchołkami* oraz trzech parami różnych prostych zwanych *bokami* takich, że boki przecinają się parami w wierzchołkach (dualnie wierzchołki parami połączone są bokami).

Definicja 1.7. Mówimy, że częściowa przestrzeń prostych $\mathfrak{A}$ spełnia *rzutowy warunek Veblena*, gdy prosta przecinająca dwa boki dowolnego trójkąta w $\mathfrak{A}$ w dwóch różnych punktach przecina również trzeci bok tego trójkąta (rys. 1.1).



Rysunek 1.1: Rzutowy warunek Veblena.

Definicja 1.8. Strukturę $\mathfrak{P} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ nazywamy *przestrzenią rzutową*, gdy: $\mathfrak{P}$ jest przestrzenią prostych, na każdej prostej leżą przynajmniej trzy punkty oraz $\mathfrak{P}$ spełnia rzutowy warunek Veblena.

1.2 Kolineacje i zanurzenia

Definicja 1.9. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$, $\mathfrak{A}' = \langle S', \mathcal{L}' \rangle$ będą częściowymi przestrzeniami prostych. Odwzorowanie $f\colon S \to S'$ jest *kolineacją* $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$, gdy

(i) f jest bijekcją,

(ii) jeśli punkty a, b, c są współliniowe w $\mathfrak{A}$, to $f(a), f(b), f(c)$ są współliniowe w $\mathfrak{A}'$,

(iii) jeśli punkty a', b', c' są współliniowe w $\mathfrak{A}'$, to $f^{-1}(a'), f^{-1}(b'), f^{-1}(c')$ są współliniowe w $\mathfrak{A}$.

Definicja 1.10. Odwzorowanie f, przy oznaczeniach z 1.9, jest *zanurzeniem* $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{A}'$, gdy $\mathrm{Im}(f)$ jest podprzestrzenią w $\mathfrak{A}'$ i f jest kolineacją $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'|\,\mathrm{Im}(f)$.

Niech f będzie kolineacją częściowych przestrzeni prostych, z $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ na $\mathfrak{A}' = \langle S', \mathcal{L}' \rangle$.

Stwierdzenie 1.11. *Jeżeli X jest podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$, to $f(X)$ jest podprzestrzenią w $\mathfrak{A}'$.*

Dowód. Załóżmy, że $|f(X) \cap l'| \geqslant 2$ dla prostej $l' \in \mathcal{L}'$. Mamy zatem dwa różne punkty $a', b' \in S'$ takie, że $a', b' \in f(X), l'$. Zgodnie z 1.4 mamy pokazać, że $l' \subseteq f(X)$. Weźmy dowolny punkt $c' \in l'$. Mamy zatem trzy punkty $a', b', c' \in l'$. Korzystając z warunku (iii) w 1.9 otrzymujemy, że punkty $a, b, c \in S$ takie, że $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$, leżą na pewnej prostej $l \in \mathcal{L}$. Ponieważ $a' \neq b'$ i f jest bijekcją, więc $a \neq b$. Ponadto $a, b \in X$ bo $a', b' \in f(X)$. Z założenia X jest podprzestrzenią $\mathfrak{A}$, więc $l \subseteq X$. Zatem $c \in X$ i stąd $f(c) \in f(X)$, a więc $c' \in f(X)$ i dowód jest zakończony. □

Stwierdzenie 1.12. *Jeżeli X jest maksymalną mocną podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$, to $f(X)$ jest maksymalną mocną podprzestrzenią w $\mathfrak{A}'$.*

Dowód. Z uwagi na 1.11 wiemy, że $f(X)$ jest podprzestrzenią $\mathfrak{A}'$. Pokażemy, że $f(X)$ jest mocna. Niech $a', b' \in f(X)$. Wówczas mamy $a' = f(a)$ i $b' = f(b)$ dla pewnych $a, b \in X$. Ponieważ X jest mocna to $a \sim b$. Z warunku (ii) w 1.9 mamy $f(a) \sim f(b)$ i ta część dowodu jest skończona. Tak więc, $f(X)$ jest mocna w $\mathfrak{A}'$. Przypuśćmy, że nie jest maksymalną mocną podprzestrzenią, to znaczy, że istnieje w $\mathfrak{A}'$ mocna podprzestrzeń X' taka, że $f(X) \subset X'$ ($f(X) \neq X'$). Zgodnie z przyjęta definicją kolineacji w 1.9 mamy, że $f^{-1}(X')$ jest mocną podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$ i $X \subset f^{-1}(X')$. Ponieważ X jest maksymalną mocną podprzestrzenią to musi być $X = f^{-1}(X')$, ale $f(X) \neq X'$, czyli $X \neq f^{-1}(X')$ i mamy sprzeczność. Tak więc nasze przypuszczenie było fałszywe, co kończy dowód. □

1.3 Przestrzeń rzutowa i przestrzeń pęków

Przez V będziemy oznaczać przestrzeń wektorową. Piszemy $\mathrm{Sub}(U)$ jako zbiór wszystkich podprzestrzeni podprzestrzeni U z przestrzeni V, $\mathrm{Sub}_k(U)$ jako zbiór wszystkich k-podprzestrzeni z U. Podprzestrzeń zerową w V oznaczamy przez Θ.

Definicja 1.13. Struktura

$$\mathbf{P}(V) := \Big\langle \mathrm{Sub}_1(V), \mathrm{Sub}_2(V) \Big\rangle \tag{1.1}$$

jest przestrzenią rzutową w sensie definicji 1.8. Nazywamy ją *analityczną przestrzenią rzutową.*

Dalej ustalamy liczbę naturalną k taką, że

$$0 < k < \dim(V).$$

Definicja 1.14. Niech H będzie $(k-1)$-podprzestrzenią V i niech B będzie $(k+1)$-podprzestrzenią V taką, że $H \subset B$. Wtedy zbiór

$$\mathbf{p}(H, B) = \{U \in \mathrm{Sub}_k(V) \colon H \subset U \subset B\}$$

nazywamy *k-pękiem* o *wierzchołku* H i *podstawie* B. Przez $\mathcal{P}_k(V)$ oznaczamy rodzinę wszystkich k-pęków w przestrzeni V.

W każdym k-pęku są co najmniej 3 elementy. Ze względu na wymiary H i B oraz inkluzję $H \subset B$ mamy taki rozkład

$$B = H \oplus \langle u \rangle \oplus \langle w \rangle,$$

dla pewnych wektorów $u, w \in B \setminus H$. Zauważmy, że podprzestrzenie $H \oplus \langle u \rangle$, $H \oplus \langle w \rangle$, $H \oplus \langle u + w \rangle$ są parami różnymi elementami pęku $\mathbf{p}(H, B)$.

Definicja 1.15. Geometrię

$$\mathbf{P}_k(V) = \Big\langle \mathrm{Sub}_k(V), \mathcal{P}_k(V) \Big\rangle$$

z k-podprzestrzeniami z przestrzeni V jako punktami wraz z k-pękami jako prostymi nazywamy *przestrzenią pęków*, albo *przestrzenią Grassmanna.*

Zauważmy, że dla $k = 1$ lub $k = \dim(V) - 1$ przestrzeń pęków jest przestrzenią rzutową. Dla $k \neq 1$ i $k \neq \dim(V) - 1$ przestrzeń pęków jest właściwą częściową przestrzenią prostych, czyli taką, w której istnieje para niewspółliniowych punktów.

Lemat 1.16. *Jeśli U, W są różnymi i współliniowymi punktami w $\mathbf{P}_k(V)$, to*

$$\overline{UW} = \mathbf{p}(U \cap W, U + W).$$

Dowód. Z założenia mamy prostą w $\mathbf{P}_k(V)$ rozpiętą przez punkty U i W, tzn. mamy k-pęk

$$\overline{UW} = \mathbf{p}(H, B)$$

dla pewnych $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$, $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ takich, że $H \subset B$ oraz

$$H \subseteq U, W \subseteq B.$$

Zauważmy, że $H \subseteq U \cap W$ oraz $U + W \subseteq B$. Ponieważ $U \neq W$ oraz $U, W \in \mathrm{Sub}_k(V)$ to musi być

$$H = U \cap W \quad \text{oraz} \quad B = U + W,$$

co kończy dowód. □

Stwierdzenie 1.17. *Przetrzeń pęków $\mathbf{P}_k(V)$ jest spójna.*

Dowód. Niech A, B będą punktami w $\mathbf{P}_k(V)$, gdzie $A, B \in \mathrm{Sub}_k(V)$. Weźmy $Z = A \cap B$. Zatem

$$A = Z \oplus \langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle$$

oraz

$$B = Z \oplus \langle b_1, b_2, \ldots, b_r \rangle$$

dla pewnych $a_i, b_i \in V$, $i = 1, 2, \ldots, r$, gdzie $k = r + \dim(Z)$.

Rozważmy ciąg

$$\begin{aligned} P_0 &:= A, \\ P_1 &:= Z \oplus \langle b_1, a_r, \ldots, a_r \rangle, \\ P_2 &:= Z \oplus \langle b_1, b_2, \ldots, a_r \rangle, \\ &\ldots \\ P_{r-1} &:= Z \oplus \langle b_1, \ldots, a_{r-1}, a_r \rangle, \\ P_r &:= B. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\dim(P_i \cap P_{i+1}) = k - 1$, zatem P_i i P_{i+1} są współpękowe dla $i = 0, \ldots r - 1$. Tak więc istnieje wymagana łamana $A = P_0, P_1, \ldots, P_r = B$ zawarta w $\mathbf{P}_k(V)$. □

Rozdział 2

Podprzestrzenie

2.1 Podprzestrzenie odcinkowe

Dalej V jest przestrzenią wektorową i k liczbą naturalną taką, że

$$0 < k < \dim(V).$$

Definicja 2.1. Niech Z i Y będą podprzestrzeniami V. *Odcinkiem* o końcach Z, Y nazywamy zbiór

$$[Z, Y] := \{U \in \mathrm{Sub}(V) \colon Z \subseteq U \subseteq Y\}.$$

W szczególności zbiór

$$[Z, Y]_k := [Z, Y] \cap \mathrm{Sub}_k(Y)$$

nazywamy k-*odcinkiem*. Podprzestrzeń Z nazywamy *wierzchołkiem*, a Y nazywamy *podstawą* odcinka lub k-odcinka.

Stwierdzenie 2.2. *Niech $Z, Y \in \mathrm{Sub}(V)$. Każdy k-odcinek $[Z, Y]_k$ jest podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$*

Dowód. Niech $X = [Z, Y]_k$ oraz $p = \mathbf{p}(H, B)$ dla pewnych $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$, $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ takich, że $H \subset B$. Zgodnie z 1.4 zakładamy, że $|X \cap p| \geqslant 2$. Trzeba pokazać, że $p \subseteq X$.

Z założenia mamy dwa różne i współliniowe punkty U, W takie, że

$$U, W \in X \cap p.$$

Z 1.1 mamy, że $p = \overline{UW}$. Z 1.16 mamy

$$p = \mathbf{p}(U \cap W, U + W), \tag{2.1}$$

czyli $H = U \cap W$ i $B = U + W$. Aby wykazać, że $p \subseteq X$ weźmy punkt $D \in p$. Zgodnie z (2.1) mamy

$$U \cap W \subset D \subset U + W. \tag{2.2}$$

Ponieważ $U, W \in X$, czyli

$$Z \subseteq U, W \subseteq Y,$$

a więc

$$Z \subseteq U \cap W \quad \text{oraz} \quad U + W \subseteq Y,$$

co znaczy, że (2.2) możemy zapisać w następujący sposób

$$Z \subseteq U \cap W \subseteq D \subseteq U + W \subseteq Y$$

czyli, że $D \in X$. W ten sposób pokazaliśmy, że $p \subseteq X$. □

Uzasadnione jest w takim razie nazywanie k-odcinków *podprzestrzeniami* odcinkowymi w kontekście przestrzeni pęków.

2.2 Podprzestrzenie nieodcinkowe

Niech ξ będzie niezdegenerowaną formą dwuliniową na V. Zakładamy, że forma ξ jest *refleksywna*, to oznacza, że $\xi(u, w) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi(w, u) = 0$ dla dowolnych $u, w \in V$. Mówi się, że podprzestrzenie $U, W \in \mathrm{Sub}(V)$ są *prostopadłe* i pisze się $U \perp W$, gdy $\xi(U, W) = 0$, to znaczy $\xi(u, w) = 0$ dla wszystkich $u \in U$, $w \in W$. *Ortouzupełnienie* podprzestrzeni $U \in \mathrm{Sub}(V)$ to podprzestrzeń

$$U^{\perp} := \{w \in V : \xi(w, U) = 0\}.$$

Podprzestrzenie *izotropowe* to te, które sa prostopadłe same do siebie. Zauważmy, że $U \perp U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subseteq U^{\perp}$. Zbiór wszystkich podprzestrzeni izotropowych oznaczamy przez $Q(\xi)$, natomiast

$$Q_k(\xi) = Q(\xi) \cap \mathrm{Sub}_k(V).$$

Zanotujemy kilka niezbędnych dalej faktów.

Fakt 2.3. (i) $U \subseteq W \implies W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$,

(ii) $U \subseteq W$ *i* $W \perp W \implies U \perp U$,

(iii) $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$,

(iv) $(U \cap W)^{\perp} \supseteq U^{\perp} + W^{\perp}$.

Mówimy, że forma ξ jest *symplektyczna*, gdy $\xi(u, u) = 0$ dla wszystkich $u \in V$.

Lemat 2.4. *Niech ξ będzie formą symplektyczną i niech p będzie k-pękiem. Jeśli $|p \cap Q_k(\xi)| \geqslant 2$, to $p \subseteq Q_k(\xi)$.*

Dowód. Niech $p = \mathbf{p}(H, B)$ dla odpowiednich H, B. Załóżmy, że U_1, U_2 są różnymi izotropowymi punktami na prostej p w $\mathbf{P}_k(V)$. Ponieważ $H \subset U_1$ więc z 2.3(ii) podprzestrzeń H też jest izotropowa. Z 2.3(i) mamy $U_i^\perp \subseteq H^\perp$, co razem z $U_i \subseteq U_i^\perp$ daje

$$B = U_1 + U_2 \subseteq H^\perp. \tag{2.3}$$

Każdy punkt U z k-pęku p można przedstawić jako sumę prostą

$$U = H \oplus \langle u \rangle$$

dla pewnego $u \in U \setminus H$. Z (2.3) mamy $\langle u \rangle \subseteq H^\perp$. Ponadto $\langle u \rangle \subseteq \langle u \rangle^\perp$ bo ξ jest symplektyczna. Z 2.3(i) mamy $H \subseteq \langle u \rangle^\perp$. Zatem w oparciu o 2.3(iii)

$$U = H \oplus \langle u \rangle \subseteq H^\perp \cap \langle u \rangle^\perp = \Big(H \oplus \langle u \rangle\Big)^\perp = U^\perp.$$

□

Powyższy lemat dowodzi, że $Q_k(\xi)$ jest podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$. Jest to przykład podprzestrzeni w $\mathbf{P}_k(V)$, która nie jest odcinkowa.

2.3 Obcięcie do odcinka

Fakt 2.5 (Bennet M.K. [1, Roz. 8.6, Tw. 15]). *Dla dowolnej przestrzeni wektorowej V, jej krata podprzestrzeni $\mathrm{L}(V) = \langle \mathrm{Sub}(V), \subseteq \rangle$ jest modularna to znaczy, że dla $U, W, X \in \mathrm{Sub}(V)$,*

$$\textit{jeśli} \quad U \subseteq W, \quad \textit{to} \quad U + (X \cap W) = (U + X) \cap W.$$

Lemat 2.6. *Jeśli $Z, Y, W \in \mathrm{Sub}(V)$ są takie, że $Z \cap W = 0$ oraz $Z + W = Y$ to odwzorowanie*

$$[Z, Y] \ni U \mapsto U \cap W \in \mathrm{Sub}(W)$$

jest izomorfizmem odcinka $[Z, Y]$ i kraty $\mathrm{L}(W)$.

Dowód. Niech Z, Y, W będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V takimi, że $Y = Z \oplus W$. Weźmy dwa odwzorowania

$$f\colon [Z, Y] \ni U \mapsto U \cap W \in \mathrm{Sub}(W) \quad \text{oraz}$$
$$g\colon \mathrm{Sub}(W) \ni U \mapsto U + Z \in [Z, Y].$$

Rozpatrzmy dowolną podprzestrzeń U w W. Wtedy

$$(f \circ g)(U) = (U + Z) \cap W = U + (Z \cap W),$$

bo krata $\mathrm{L}(W)$ jak wiemy z 2.5 jest modularna. Ponieważ z założenia mamy $Z \cap W = 0$, więc $(f \circ g)(U) = U$, czyli

$$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}(W)}\,.$$

Teraz weźmy $U \in [Z, Y]$. Wtedy

$$(g \circ f)(U) = (U \cap W) + Z = U \cap (W + Z),$$

bo, podobnie jak wyżej z 2.5, $\mathrm{L}(V)$ jest modularna. Na początku założyliśmy, że $W + Z = Y$, tak więc

$$(g \circ f)(U) = U \cap (W + Z) = U \cap Y = U$$

bo $U \subseteq Y$. Czyli

$$g \circ f = \mathrm{id}_{[Z,Y]}\,.$$

Pokazaliśmy, że $f^{-1} = g$. Zatem f i g są wzajemnie odwrotnymi bijekcjami. Z określenia f i g wynika, że zachowują one porządek $\subseteq$. Zatem f i g realizują izomorfizm $[Z, Y] \cong \mathrm{L}(W)$. □

Lemat 2.7. *Jeśli* $Y = Z \oplus W$ *oraz* $U \in [Z, Y]$, *to*

$$\{u + Z \colon u \in U \cap W\} = U/Z.$$

Dowód. „$\subseteq$" Oczywiste, gdyż $U \cap W \subseteq U$.

„$\supseteq$" Rozważmy warstwę $u + Z \in U/Z$, gdzie u jest wektorem z U. Zauważmy, że $u \in Y$, bo $U \subseteq Y$. Mamy więc, że

$$u = z + w \quad \text{dla pewnych} \quad z \in Z \quad \text{i} \quad w \in W \tag{2.4}$$

na podstawie tego, że $Y = Z \oplus W$. Stąd

$$u + Z = z + w + Z = w + Z, \tag{2.5}$$

bo z jest pochłaniane przez Z. Mamy $w \in U$, bo $w = u - z$ na mocy (2.4) i tego, że $u \in U$ oraz $z \in Z \subseteq U$. Tak więc $w \in U \cap W$ i w rezultacie, z uwagi na (2.5) otrzymujemy

$$u + Z = w + Z \in \{u + Z \colon u \in U \cap W\},$$

co kończy dowód. □

Lemat 2.8. *Jeśli* $Z, Y \in \mathrm{Sub}(V)$ *i* $Z \subseteq Y$, *to wtedy odwzorowanie*

$$[Z, Y] \ni U \mapsto U/Z \in \mathrm{Sub}(Y/Z)$$

jest izomorfizmem odcinka $[Z, Y]$ *i kraty* $\mathrm{L}(Y/Z)$.

Dowód. Niech $Z \subseteq Y \subseteq V$. Weźmy $W \in \mathrm{Sub}(V)$ takie, że $Y = Z \oplus W$.

Z 2.6 mamy izomorfizm

$$f\colon [Z, Y] \ni U \mapsto (U \cap W) \in \mathrm{Sub}(W).$$

Weźmy ponadto standardowy izomorfizm

$$h\colon\ \mathrm{Sub}(W) \ni U \mapsto \{u + Z\colon u \in U\} \in \mathrm{Sub}(Y/Z)$$

pomiędzy kratami $\mathrm{L}(W)$ oraz $\mathrm{L}(Y/Z)$. Rozważmy złożenie $h \circ f$. Uwzględniając 2.7 mamy

$$(h \circ f)(U) = \{u + Z\colon u \in U \cap W\} = U/Z.$$

Zatem, to złożenie jest szukanej postaci izomorfizmem pomiędzy kratami $[Z, Y]$ oraz $\mathrm{L}(Y/Z)$. □

Twierdzenie 2.9. *Niech $Z, Y \in \mathrm{Sub}(V)$, $Z \subseteq Y$ oraz $\dim(Z) < k < \dim(Y)$. Przestrzeń pęków $\mathbf{P}_k(V)$ obcięta do k-odcinka $[Z, Y]_k$ jest, z dokładnością do izomorfizmu, rzutową przestrzenią pęków*

$$\mathbf{P}_{k-\dim(Z)}(Y/Z).$$

Dowód. Z lematu 2.8 mamy izomorfizm f pomiędzy naszym k-odcinkiem $[Z, Y]_k$ oraz kratą rzutową $\mathrm{L}(Y/Z)$.

Dla dowolnego punktu $U \in [Z, Y]_k$ mamy, że

$$\dim(f(U)) = \dim(U/Z) = \dim(U) - \dim(Z) = k - \dim(Z).$$

Zatem

$$f([Z, Y]_k) = \mathrm{Sub}_{k-\dim(Z)}(Y/Z).$$

Odwzorowanie f jest izomorfizmem krat, czyli w szczególności zachowuje porządek $\subseteq$. Oznacza to, że obrazem prostej $\mathbf{p}(H, B)$ leżącej w $[Z, Y]_k$ jest pęk $\mathbf{p}(H/Z, B/Z)$. Tak więc

$$\mathbf{P}_k(V)|[Z, Y]_k \cong \mathbf{P}_{k-\dim(Z)}(Y/Z).$$

□

Rozdział 3

Mocne podprzestrzenie

3.1 Postać trójkąta

Rozważmy kratę podprzestrzeni przestrzeni wektorowej V

$$\mathrm{L}(V) = \langle \mathrm{Sub}(V), \subseteq \rangle.$$

Z 2.5 wiemy, że jest to krata modularna.

Definicja 3.1. W dowolnej kracie L z relacją porządku $\leqslant$ mówimy, że a jest *poprzednikiem* b, gdy dla dowolnego $c \in L$, spełniona jest implikacja:

$$a \leqslant c \leqslant b \implies a = c \text{ lub } c = b.$$

Czasem element b nazywamy *następnikiem* elementu a.

Definicja 3.2. Różne elementy a, b w kracie nazywamy *sąsiednimi* i piszemy $a \sim b$, gdy mają wspólny poprzednik i następnik.

W kracie modularnej istnienie wspólnego poprzednika dla dwóch różnych elementów jest równoważne z istnieniem ich wspólnego następnika.

Zauważmy, że dla różnych i sąsiednich elementów U_1, U_2 w $\mathrm{L}(V)$, ich wspólny poprzednik to $U_1 \cap U_2$, a ich wspólny następnik to $U_1 + U_2$. Oznaczenie relacji sąsiedniości przez $\sim$ nie jest przypadkowe, bo w przestrzeni pęków $\mathbf{P}_k(V)$ pokrywa się ona z relacją współliniowości (por. 1.16).

Fakt 3.3 (Żynel M. [6, Tw. 1.9])**.** *Jeśli U_1, U_2, U_3 są parami sąsiednimi elementami $\mathrm{L}(V)$, to posiadają one albo wspólny poprzednik albo następnik.*

Wniosek z 3.3 jest następujący.

Wniosek 3.4. *Jeżeli U_1, U_2, U_3 są wierzchołkami trójkąta w $\mathbf{P}_k(V)$, to albo $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = k - 1$ albo $\dim(U_1 + U_2 + U_3) = k + 1$.*

Powyższy wniosek charakteryzuje trójkąty w $\mathbf{P}_k(V)$ i podaje ich analityczną postać.

3.2 Gwiazdy i układy

Definicja 3.5. Niech $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$. Wtedy

$$[H)_k := [H, V]_k = \{U \in \mathrm{Sub}_k(V) : H \subset U\}$$

nazywamy *gwiazdą*.

Zauważmy, że gdy $k = 1$, to $H = \Theta$ jest jedynym $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$ i wówczas

$$[\Theta)_k = \mathrm{Sub}_k(V).$$

Definicja 3.6. Niech $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$. Wtedy

$$(B]_k := [\Theta, B]_k = \{U \in \mathrm{Sub}_k(U) : U \subset B\}$$

nazywamy *układem*.

Gdy $k = \dim(V) - 1$ to, $B = V$ jest jedynym $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ i wówczas

$$(V]_k = \mathrm{Sub}_k(V).$$

Tak więc badanie gwiazd i układów w przestrzeni pęków $\mathbf{P}_k(V)$ ma jedynie sens, gdy

$$1 < k < \dim(V) - 1,$$

czyli gdy $\mathbf{P}_k(V)$ nie jest przestrzenią rzutową i to właśnie dalej zakładamy.

Z 2.2 wiemy, że gwiazdy i układy jako szczególne odcinki są podprzestrzeniami w $\mathbf{P}_k(V)$. Z 3.4 trójkąt we właściwej przestrzeni pęków wyznacza albo gwiazdę, albo układ.

Teraz zbadamy przekroje gwiazd i układów.

Lemat 3.7. *Niech $S_i = [H)_k$ dla $H_i \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$, $i = 1, 2$. Wówczas jeśli $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ i $S_1 \neq S_2$ to*

$$S_1 \cap S_2 = \{H_1 + H_2\}.$$

DOWÓD. Z teorii krat wiemy, że

$$S_1 \cap S_2 = [H_1, V]_k \cap [H_2, V]_k = [H_1 + H_2, V]_k.$$

Z naszego założenia, że $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ musi być $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$ takie, że $U \in S_1 \cap S_2$. Z uwagi na to, że $S_1 \neq S_2$, a więc $H_1 \neq H_2$ mamy $\dim(H_1 + H_2) \geqslant k$. Ponieważ $H_1 + H_2 \subseteq U$, więc z uwagi na wymiary musi być $\dim(H_1 + H_2) = k$, co daje tezę. $\square$

Lemat 3.8. *Niech $T_i = (B]_k$ dla $B_i \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$, $i = 1, 2$. Wówczas jeśli $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ i $T_1 \neq T_2$ to*

$$T_1 \cap T_2 = \{B_1 \cap B_2\}.$$

DOWÓD. Dowód przebiega dualnie do dowodu 3.7. □

Lemat 3.9. *Niech* $S = [H)_k$ *i* $T = (B]_k$*, dla* $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$*,* $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$*. Jeśli* $S \cap T \neq \emptyset$*, to*
$$S \cap T = [H, B]_k = \mathbf{p}(H, B).$$

DOWÓD. Podobnie jak w dowodzie 3.8, mamy

$$S \cap T = [H, V]_k \cap [\theta, B]_k = [H + \Theta, V \cap B]_k = [H, B]_k.$$

Są dwie możliwości: albo $H \subseteq B$ albo $H \not\subseteq B$. W drugim wypadku $[H, B]_k = \emptyset$, co przeczy naszemu założeniu, że $S \cap T \neq \emptyset$. Tak więc z 1.14 mamy tezę. □

Zauważmy że, gdy mamy prostą p w $\mathbf{P}_k(V)$, czyli $p = \mathbf{p}(H, B)$, dla pewnych H, B, to możemy ją jednoznacznie rozszerzyć do gwiazdy i układu w następujący sposób:

$$\boldsymbol{S}(p) := [H)_k, \qquad \boldsymbol{T}(p) := (B]_k.$$

Tak więc każda prosta w $\mathbf{P}_k(V)$ jest jednoznacznie związana z pewną gwiazdą i układem, w których leży (jest zawarta).

Z drugiej strony w każdej gwieździe i w każdym układzie leży jakaś prosta. Oznacza to, że każda gwiazda i każdy układ są co najmniej 3-elementowe.

Dalej badamy mocne podprzestrzenie w $\mathbf{P}_k(V)$.

Lemat 3.10. *Jeśli* X *jest mocną podprzestrzenią w* $\mathbf{P}_k(V)$ *to*

$$X \subseteq [H)_k$$

dla pewnego $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$ *lub*

$$X \subseteq (B]_k$$

dla pewnego $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$.

DOWÓD. Gdy $X = \emptyset$ lub $|X| = 1$ to teza jest trywialna. Załóżmy więc, że $|X| \geqslant 2$ i weźmy $U_1, U_2 \in X$ takie, że $U_1 \neq U_2$. Ponieważ X jest mocna, więc $U_1 \sim U_2$. Niech
$$H = U_1 \cap U_2 \qquad \text{i} \qquad B = U_1 + U_2.$$

Z 1.16 mamy

$$\dim(H) = k - 1 \qquad \text{i} \qquad \dim(B) = k + 1.$$

Zauważmy, że $\mathbf{p}(H, B) \subseteq X$ bo X jest podprzestrzenią.

Mamy dwie możliwości: albo w X jest punkt poza prostą $\mathbf{p}(H, B)$, albo nie. W drugim przypadku X to zbiór punktów na prostej, więc $X = \mathbf{p}(H, B)$.

Rozważmy teraz przypadek, gdy $U_3 \in X$ jest punktem poza $\mathbf{p}(H, B)$. Wówczas U_1, U_2, U_3 tworzą trójkąt. Wtedy z 3.4 mamy albo

$$H = U_1 \cap U_2 \cap U_3 \tag{3.1}$$

albo

$$B = U_1 + U_2 + U_3. \tag{3.2}$$

Niech $U \in X$. Punkt U jest wpółliniowy z wierzchołkami trójkąta U_1, U_2, U_3 bo X jest mocną podprzestrzenią. W pracy [5] znajduje się dowód, że w takiej sytuacji albo $H \subset U$, gdy zachodni (3.1), albo $U \subset B$, gdy zachodzi (3.2).

Z dowolności wyboru U otrzymujemy tezę. □

Stwierdzenie 3.11. *Gwiazda $[H)_k$ dla $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$ oraz układ $(B]_k$ dla $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$, są maksymalnymi mocnymi podprzestrzeniami w $\mathbf{P}_k(V)$.*

DOWÓD. Oznaczmy $X := [H)_k$. Z 2.2 wiemy, że X jest podprzestrzenią $\mathbf{P}_k(V)$. Załóżmy, że $U_1, U_2 \in X$, $U_1 \neq U_2$. Wówczas H jest wspólnym poprzednikiem U_1, U_2 co wystarczy by twierdzić, że są one współliniowe w $\mathbf{P}_k(V)$. Z dowolności wyboru tych punktów X jest mocną podprzestrzenią.

Przypuśćmy teraz, że X nie jest maksymalna. To oznacza, że istnieje taka mocna podprzestrzeń X', że $X \subset X'$ (podkreślmy $X' \neq X$). Z 3.10 podprzestrzeń X' jest podzbiorem albo pewnej gwiazdy, albo pewnego układu. Z uwagi na 3.9 druga sytuacja nie może mieć miejsca bo przekrój $X' \cap X$ byłby najwyżej prostą. Zatem z 3.7 musi być $X' \subseteq [H)_k$ i mamy sprzeczność.

Dla układów dowód biegnie dualnie. □

Twierdzenie 3.12. *Jeśli X jest maksymalną mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$ to albo*

$$X = [H)_k$$

dla pewnego $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$ albo

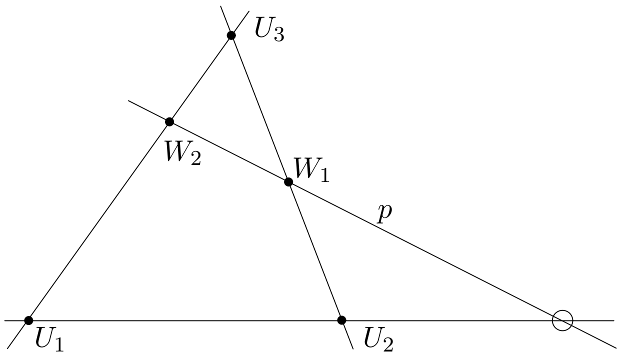
$$X = (B]_k$$

dla pewnego $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$.

DOWÓD. Z 3.11 wiemy, że gwiazda $[H)_k$ i układ $(B]_k$ to maksymalne mocne podprzestrzenie w $\mathbf{P}_k(V)$. Z 3.10 nasza maksymalna mocna podprzestrzeń X jest zawarta albo w takiej gwieździe, albo w takim układzie. Z maksymalności otrzymujemy równość. □

Stwierdzenie 3.13. *Przestrzeń pęków spełnia warunek Veblena.*

DOWÓD. Niech U_1, U_2 i U_3 będą wierzchołkami trójkąta, natomiast W_1 oraz W_2 będą różnymi punktami przecięcia odpowiednio boków $\overline{U_2U_3}$ i $\overline{U_1U_3}$, przez prostą p jak na rys. 3.1. Pokażemy, że p przecina jednocześnie bok $\overline{U_1U_2}$.



Rysunek 3.1: Rzutowy warunek Veblena.

Z 3.4 nasz trójkąt o wierzchołkach U_1, U_2, U_3 wyznacza albo gwiazdę, albo układ. Przyjmijmy, że

$$H = U_1 \cap U_2 \cap U_3 \qquad \text{oraz} \qquad \dim(H) = k - 1.$$

Z 1.16 mamy, że

$$\overline{U_1U_2} = \mathbf{p}(H, B_1) \qquad \text{oraz} \qquad p = \overline{W_1W_2} = \mathbf{p}(H, B_2).$$

Wiemy też, że $B_1 = U_1 + U_2$ i $B_2 = W_1 + W_2$. Musimy policzyć wymiar $\dim(B_1 \cap B_2)$. W tym celu wykorzystujemy równość:

$$\dim(B_1 \cap B_2) = \dim(B_1) + \dim(B_2) - \dim(B_1 + B_2). \tag{3.3}$$

Następnie piszemy

$$B_1 + B_2 = U_1 + U_2 + W_1 + W_2 = (U_1 + W_1) + (U_2 + W_2).$$

Jako, że U_3 jest punktem przecięcia się prostych $\overline{U_1W_1}$ oraz $\overline{U_2W_2}$ możemy napisać, że

$$(U_1 + W_1) \cap (U_2 + W_2) = U_3.$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\dim(B_1 + B_2) = \\
&\quad = \dim(U_1 + W_1) + \dim(U_2 + W_2) - \dim((U_1 + W_1) \cap (U_2 + W_2)) = \\
&\qquad = \dim(U_1 + W_1) + \dim(U_2 + W_2) - \dim(U_3) = \\
&\qquad\qquad = k + 1 + k + 1 - k = k + 2.
\end{aligned}$$

Wracając do naszego wcześniejszego równania (3.3) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
&\dim(B_1 \cap B_2) = \dim(B_1) + \dim(B_2) - \dim(B_1 + B_2) = \\
&\qquad = k + 1 + k + 1 - (k + 2) = k.
\end{aligned}$$

Ponadto $H \subset B_1 \cap B_2$, zatem

$$B_1 \cap B_2 \in \overline{U_1 U_2} \cap p,$$

a więc $B_1 \cap B_2$ jest szukanym punktem, co kończy dowód przy założeniu, że trójkąt U_1, U_2, U_3 rozpina gwiazdę. Gdy ten trójkąt rozpina układ, to dowód przebiega dualnie. □

Fakt 3.14. *Mocna podprzestrzeń w* $\mathbf{P}_k(V)$ *to, z dokładnością do izomorfizmu, przestrzeń rzutowa.*

DOWÓD. Niech X będzie mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$. Z 1.5 wiemy, że $\mathfrak{M} := \mathbf{P}_k(V)|X$ jest przestrzenią prostych. Z 3.13 wiadomo, że $\mathbf{P}_k(V)$ spełnia warunek Veblena, a ilość elementów w pęku $\mathbf{p}(H, B)$, czyli ilość punktów na prostej w $\mathbf{P}_k(V)$ jest co najmniej 3. To wystarczy by twierdzić, że $\mathfrak{M}$ jest przestrzenią rzutową zgodnie z 1.8. □

Twierdzenie 3.15. *Niech* $\dim(V) = n$.

(i) *Jeśli* $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$, *to* $[H)_k$ *jest, z dokładnością do izomorfizmu, przestrzenią rzutową wymiaru* $n - k$.

(ii) *Jeśli* $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$, *to* $(B]_k$ *jest, z dokładnością do izomorfizmu, przestrzenią rzutową wymiaru* k.

DOWÓD. (i) Przyjmując w 2.9 $Z := H$ i $Y := V$ otrzymujemy

$$\mathbf{P}_k(V)|[H)_k \cong \mathbf{P}_{k-(k-1)}(V/H) = \mathbf{P}_1(V/H).$$

Z prawej strony mamy przestrzeń rzutową wymiaru

$$\dim(V/H) - 1 = \dim(V) - \dim(H) - 1 = n - (k-1) - 1 = n - k.$$

(ii) Podobnie, przyjmując w 2.9 $Z := \Theta$ i $Y := B$, mamy

$$\mathbf{P}_k(V)|(B]_k \cong \mathbf{P}_{k-0}(B/\Theta) = \mathbf{P}_k(B).$$

Zauważmy, że $k = \dim(B) - 1$, a więc $\mathbf{P}_k(B)$ jest przestrzenią rzutową. Ponadto

$$\mathbf{P}_k(B) \cong \mathbf{P}_1(B^*)$$

gdzie B^*, to przestrzeń dualna do B, izomorficzna z B ze względu na jej skończony wymiar $k + 1$. Wymiar przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}_1(B^*)$ wynosi

$$\dim(B^*) - 1 = \dim(B) - 1 = k.$$

□

Rozdział 4

Zanurzenia

Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi, odpowiednio nad niekoniecznie przemiennymi ciałami F_V i F_W. Dalej rozważamy kolineację (izomorfizm)

$$f\colon \mathrm{Sub}_k(V) \to \mathrm{Sub}_m(W),$$

z $\mathbf{P}_k(V)$ na $\mathbf{P}_m(W)$.

Definicja 4.1. Niezerowe odwzorowanie $\varphi\colon V \to W$ jest *półliniowe*, jeśli istnieje taki izomorfizm $\mu\colon F_V \to F_W$, że

(i) $\varphi(u+w) = \varphi(u) + \varphi(w)$;

(ii) $\varphi(\lambda u) = \mu(\lambda)\varphi(u)$.

dla dowolnych wektorów $u, w \in V$ oraz $\lambda \in F_V$. Mówimy także, że φ jest μ-półliniowe.

Gdy $\mathbf{P}_k(V)$ jest przestrzenią rzutową, to $\mathbf{P}_m(W)$ też musi być przestrzenią rzutową. Nasze twierdzenie mówiące o postaci f, które będziemy tutaj dowodzić, staje się wówczas podstawowym twierdzeniem geometrii rzutowej (por. [1, Th. 17]), które mówi, że:

Twierdzenie 4.2 (Podstawowe twierdzenie geometrii rzutowej)**.** *Jeśli f jest kolineacją $\mathbf{P}(V)$ na $\mathbf{P}(W)$, to istnieje taka μ-półliniowa bijekcja $\varphi_\mu\colon V \to W$, że $f(U) = \varphi_\mu(U)$ dla $U \in \mathrm{Sub}_1(V)$.*

Gdy f jest wyznaczone również inną σ-półliniową bijekcją $\psi_\sigma\colon V \to W$, to ψ_σ jest proporcjonalne do φ_μ, to znaczy, że istnieje takie $\lambda \in F_V$, że

$$\psi_\sigma(u) = \varphi_\mu(\lambda u) \quad \textit{oraz} \qquad \sigma(\alpha) = \mu(\lambda\alpha\lambda^{-1})$$

dla każdego $u \in V$ i $\alpha \in F_V$.

Tak więc dalej zakładamy, że

$$1 < k < \dim(V) - 1, \tag{4.1}$$

czyli $\mathbf{P}_k(V)$ nie jest przestrzenią rzutową. Przypomnijmy także, że wówczas mamy w $\mathbf{P}_k(V)$ różne gwiazdy i różne układy, a każda z mocnych maksymalnych podprzestrzeni zawiera trójkąt.

Mówimy, że odwzorowanie działające pomiędzy przestrzeniami pęków, zachowuje typy mocnych podprzestrzeni, gdy obrazem każdej gwiazdy jest gwiazda, a układu układ. Odworowanie takie zamienia typy mocnych podprzestrzeni, gdy obrazem każdej gwiazdy jest układ i obrazem każdego układu jest gwiazda.

Lemat 4.3. *Jeśli gwiazda S ma wspólną prostą z układem T, to $f(S)$ i $f(T)$ są różnych typów.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że zarówno $f(S)$ i $f(T)$ są gwiazdami. Dla układów, dowód będzie dualny. Ewidentnie, obrazy S i T są różne. Zauważmy, że zawsze

$$f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T).$$

Ponieważ $S \cap T$ jest prostą w $\mathbf{P}_k(V)$, a f jest kolineacją, więc $f(S \cap T)$ jest prostą w $\mathbf{P}_m(W)$. Zatem dwie gwiazdy $f(S)$ i $f(T)$ mają wspólną prostą $f(S \cap T)$. Zatem z 3.8 i z 1.12

$$f(S) = f(T).$$

Ponieważ f jest bijekcją, to $S = T$ co nie jest możliwe. Tak więc nasze przypuszczenie, że $f(S)$ i $f(T)$ są gwiazdami jet fałszywe, a więc $f(S)$ i $f(T)$ muszą być różnych typów, co kończy dowód. □

Lemat 4.4. *Jeśli dwie maksymalne mocne podprzestrzenie X_1 i X_2 są tego samego typu oraz ich przecięcie jest zbiorem niepustym, to $f(X_1)$ i $f(X_2)$ są tego samego typu.*

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności przyjmijmy, że X_1, X_2 są gwiazdami. Dla układów dowód jest dualny. Niech U będzie punktem przecięcia X_1 i X_2 oraz T będzie układem zawierającym U. Na podstawie 3.9, gwiazda X_i oraz T mają wspólną prostą. Najpierw stosujemy 4.3 do X_1 i T, a następnie do X_2 i T, co wystarczy do zakończenia dowodu. □

Twierdzenie 4.5. *Kolienacje przestrzeni pęków zachowują lub zamieniają typy mocnych podprzestrzeni.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje taka gwiazda S oraz taki układ T w $\mathbf{P}_k(V)$, że ich obrazy $f(S)$ oraz $f(T)$ są tego samego typu. Wybierzmy po jednym punkcie $U_S \in S$ oraz $U_T \in T$. Ze spójności $\mathbf{P}_k(V)$ mamy ciąg punktów $U_0, \ldots, U_r \in \mathrm{Sub}_k(V)$, taki, że $U_S = U_0$, $U_T = U_r$ oraz $U_{i-1} \sim U_i$ dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, r\}$. Każdą prostą $\overline{U_{i-1}U_i}$ możemy rozszerzyć do gwiazdy S_i dla $i \in \{1, \ldots, r\}$. Możemy zastosować 4.4 bo sąsiednie w tym ciągu gwiazdy S_{i-1} i S_i mają wspólny punkt U_{i-1}. Zatem wszystkie obrazy

$f(S_i)$ są tego samego typu co $f(S)$. Ostatnia w ciągu gwiazda S_r oraz układ T mają prostą wspólną na mocy 3.9 bo mają wspólny punkt U_r. Do S_r i T stosujemy 4.3 skąd wynika, że $f(S_r)$ i $f(T)$ mają różne typy, co przeczy naszemy założeniu na początku dowodu. □

Lemat 4.6. *Jeśli f zachowuje typy mocnych podprzestrzeni, to $m = k$. Gdy dodatkowo $2 \leqslant k$, to istnieje taka kolineacja f' z $\mathbf{P}_{k-1}(V)$ na $\mathbf{P}_{k-1}(W)$, że dla punktów $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$ oraz $H_1, H_2 \in \mathrm{Sub}_{k-1}(W)$*

$$\textit{jeśli} \quad U = H_1 + H_2, \quad \textit{to} \quad f(U) = f'(H_1) + f'(H_2).$$

DOWÓD. Kolineacja f przekształca układy na układy. Układ w $\mathbf{P}_k(V)$ z 2.9 jest k-wymiarową przestrzenią rzutową, natomiast układ w $\mathbf{P}_m(W)$ jest m-wymiarową przestrzenią rzutową. Zatem musi być $m = k$.

Niech

$$\Pi := [Z, B]_k$$

dla pewnych $Z \in \mathrm{Sub}_{k-2}(V)$ i $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ takich, że $Z \subset B$. Z 2.9 Π jest przestrzenią rzutową wymiaru (geometrycznego) 2, czyli jest płaszczyzną rzutową, z dokładnością do izomorfizmu. Zauważmy też, że gwiazdy z $\mathbf{P}_k(V)$ przecinają Π albo pusto, albo w prostych. Konkretnie, gwiazda $[H)_k$ przecina Π w prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $Z \subset H \subset B$. Dla dowolnej takiej płaszczyzny i punktu U w $\mathbf{P}_k(V)$ określamy pęk gwiazd:

$$\mathbf{p}(U, \Pi) := \{S - \text{gwiazda}\colon U \in S,\ S \cap \Pi - \text{prosta}\}.$$

Zauważmy, że $[H)_k \in \mathbf{p}(U, \Pi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Z \subset H \subset U$.

Gwiazdy z $\mathbf{P}_k(V)$ możemy utożsamiać z punktami w $\mathbf{P}_{k-1}(V)$, natomiast pęki postaci $\mathbf{p}(U, \Pi)$ z prostymi w $\mathbf{P}_{k-1}(V)$. Innymi słowy przy pomocy mocnych podprzestrzeni izomorficznych z płaszczyznami rzutowymi i gwiazd w $\mathbf{P}_k(V)$ możemy zdefiniować strukturę $\mathbf{P}_{k-1}(V)$. Analogicznie możemy postąpić w $\mathbf{P}_k(W)$.

Nasza kolineacja f z założenia przekształca gwiazdy na gwiazdy i układy na układy, a więc wyznacza kolineację

$$f'\colon \mathrm{Sub}_{k-1}(V) \to \mathrm{Sub}_{k-1}(W)$$

z $\mathbf{P}_{k-1}(V)$ na $\mathbf{P}_{k-1}(W)$. Posiada ona następującą własność:

$$f\Big([H)_k\Big) = f\Big([H, V]_k\Big) = \Big[f'(H), W\Big]_k = \Big[f'(H)\Big)_k.$$

Równość $U = H_1 + H_2$, dla U, H_1, H_2 jak w założeniach naszego lematu, oznacza, że $U \in [H_1)_k \cap [H_2)_k$. W konsekwencji, mamy

$$f(U) \in \Big[f'(H_1)\Big)_k \cap \Big[f'(H_2)\Big)_k$$

co kończy dowód. □

Stwierdzenie 4.7. *Jeśli f zachowuje typy mocnych podprzestrzeni, to istnieje półliniowa bijekcja $\varphi\colon V \to W$ taka, że $f(U) = \varphi(U)$ dla $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$.*

DOWÓD. Z 4.6 mamy ciąg kolineacji $\{f_i\}_{1\leqslant i\leqslant k}$ takich, że

$$f_i\colon \mathrm{Sub}_i(V) \to \mathrm{Sub}_i(W).$$

Dla $U \in \mathrm{Sub}_{i+1}(V)$, $H_1, H_2 \in \mathrm{Sub}_i(V)$

$$\text{jeśli} \quad U = H_1 + H_2, \quad \text{to} \quad f_{i+1}(U) = f_i(H_1) + f_i(H_2), \tag{4.2}$$

gdzie $i = 1, \ldots, k-1$. Ponadto $f_k = f$.

Odwzorowanie f_1 jest kolineacją przestrzeni rzutowych, a co za tym idzie, zgodnie z 4.2 istnieje półliniowa bijekcja

$$\varphi\colon V \to W$$

taka, że $f_1(U) = \varphi(U)$ dla $U \in \mathrm{Sub}_1(V)$. Weźmy teraz dowolne $U \in \mathrm{Sub}_2(V)$. Możemy dobrać $H_1, H_2 \in \mathrm{Sub}_1(V)$ tak, aby $U = H_1 + H_2$. Wówczas

$$f_2(U) = f_1(H_1) + f_1(H_2) = \varphi(H_1) + \varphi(H_2) = \varphi(U)$$

z (4.2) dla $i = 1$. Stosując (4.2) kolejno dla $i = 2, 3, 4, \ldots, k$, otrzymujemy, że

$$f(U) = f_k(U) = \varphi(U)$$

dla $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$, co kończy dowód. □

Definicja 4.8. Niech odwzorowanie $\xi\colon V \times V^* \to F_V$, gdzie V^* jest przestrzenią funkcjonałów liniowych $\delta\colon V \to F_V$, dualną do V, będzie określone w następujący sposób

$$\xi(v, \delta) = \delta(v).$$

Odwzorowanie ξ jest formą dwuliniową zwaną *standardową formą dwuliniową* na V. Wyznacza ona odwzorowanie

$$h\colon \mathrm{Sub}(V) \to \mathrm{Sub}(V^*)$$

w ten sposób, że

$$h(U) = \{\delta \in V^*\colon \xi(U, \delta) = 0\} = \{\delta \in V^*\colon \delta(U) = \{0\}\}.$$

Gdy $\dim(V) = n < \infty$ wówczas V i V^* są izomorficzne i h przekształca k-podprzestrzenie V na $(n-k)$-podprzestrzenie V^*. Odwzorowanie h jest kolineacją $\mathbf{P}_k(V)$ na $\mathbf{P}_{n-k}(V^*)$, która przekształca gwiazdy na układy, a układy na gwiazdy i dlatego nazywamy je *standardową kolineacją zamieniającą typy mocnych podprzestrzeni.*

Stwierdzenie 4.9. *Jeśli f zamienia typy mocnych podprzestrzeni, wówczas* $\dim(V) = \dim(W) = k + m$ *i istnieje niezdegenerowana forma półtoraliniowa* $\eta\colon V \times W \to F_W$ *taka, że* $f(U) = U^{\perp_\eta}$ *dla* $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$.

DOWÓD. Zgodnie z 3.15(i) gwiazdy w $\mathbf{P}_k(V)$ są izomorficzne z przestrzeniami rzutowymi wymiaru $\dim(V) - k$. Zatem ich obrazy przy kolineacji f są układami w $\mathbf{P}_m(W)$, izomorficznymi z przestrzeniami rzutowymi wymiaru $\dim(V) - k$. Stąd, razem z 3.15(ii), otrzymujemy równość

$$\dim(V) - k = m. \tag{4.3}$$

Dualnie, rozważając układy w $\mathbf{P}_k(V)$, wykażemy, że

$$k = \dim(W) - m. \tag{4.4}$$

Dodając stronami równania (4.3) i (4.4) dostajemy żądaną równość

$$\dim(V) = \dim(W) = k + m.$$

Teraz rozważmy standardową kolinację h z $\mathbf{P}_m(W)$ na $\mathbf{P}_k(W^*)$ zamieniającą typy mocnych podprzestrzeni. Złożenie kolineacji $g := h \circ f$ jest kolineacją z $\mathbf{P}_k(V)$ na $\mathbf{P}_k(W^*)$ zachowującą typy mocnych podprzestrzeni. Z 4.7 istnieje półliniowa bijekcja $\varphi\colon V \to W^*$ taka, że $g(U) = \varphi(U)$ dla $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$. Rozważmy odwzorowanie

$$\eta\colon V \times W \to F_W, \qquad \eta(v, w) = v^{\varphi}(w).$$

Weźmy dowolne $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$ i przeliczmy

$$\begin{aligned} U^{\perp_\eta} = \{w \in W\colon u^{\varphi}(w) = 0 \text{ po wszystkich } u \in U\} = \\ \{w \in W\colon \xi(w, u^{\varphi}) = 0 \text{ po wszystkich } u \in U\} = \\ \{w \in W\colon \xi(w, \varphi(U)) = 0\} = \\ \{w \in W\colon \xi(w, g(U)) = 0\} = h^{-1}(g(U)) = f(U), \end{aligned}$$

gdzie ξ jest standardową formą dwuliniową na $W \times W^*$, która określa h. Forma η jest półtoraliniowa, jako złożenie półliniowego odwzorowania φ i formy dwuliniowej ξ. Jako, że φ jest bijekcją i ξ jest niezdegenerowana, to η jest niezdegenerowana. □

Definicja 4.10. Podprzestrzeń X w $\mathbf{P}_k(V)$ jest *podprzestrzenią Grassmanna*, gdy spełnia dwa warunki:

(i) X jest spójna,

(ii) jeśli l jest prostą, S jest gwiazdą, a T układem w $\mathbf{P}_k(V)$ takimi, że $l = S \cap T$ oraz przekroje $X \cap S$ i $X \cap T$ są co najmniej prostymi (równoważnie $|X \cap S|, |X \cap T| \geqslant 2$), to albo $X \cap l = \emptyset$, albo $l \subseteq X$.

Twierdzenie 4.11 (Rybak R. [5]). *Podprzestrzeń X w $\mathbf{P}_k(V)$ jest podprzestrzenią odcinkową, wtedy i tylko wtedy, gdu jest podprzestrzenią Grassmanna.*

Definicja 4.10 razem z twierdzeniem 4.11 daje charakteryzację podprzestrzeni odcinkowej w wewnętrznym języku przestrzeni pęków.

Lemat 4.12. *Niech f będzie zanurzeniem $\mathbf{P}_k(V)$ w $\mathbf{P}_m(W)$ i X' maksymalną mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_m(W)$. Jeśli $|X' \cap \mathrm{Im}(f)| \geqslant 2$, to w $\mathbf{P}_k(V)$ istnieje maksymalna mocna podprzestrzeń X taka, że $f(X) = X' \cap \mathrm{Im}(f)$.*

Dowód. Z założenia $|X' \cap \mathrm{Im}(f)| \geqslant 2$ możemy wziąć taką prostą p' w $\mathbf{P}_m(W)$, że $p' \subseteq X' \cap \mathrm{Im}(f)$ bo X' jest mocna. Niech $p := f^{-1}(p')$. Rozszerzamy prostą p do gwiazdy S i układu T, czyli $p = S \cap T$. Z naszych założeń wymiarowych (4.1) gwiazda S zawiera trójkąt Δ_S i układ T też zawiera trójkąt Δ_T. Weźmy $S' := f(S)$ i $T' := f(T)$. Są to kliki rozpięte przez trójkąty odpowiednio $f(\Delta_S)$ i $f(\Delta_T)$. Trójkąt jednoznacznie wyznacza maksymalną mocną podprzestrzeń, zatem albo $S' \subseteq X'$, albo $T' \subseteq X'$, ale nie obie inkluzje jednocześnie. Powiedzmy, że $S' \subseteq X'$. A więc $S' \subseteq X' \cap \mathrm{Im}(f)$. Zauważmy, że

$$S = \{U \in \mathrm{Sub}_k(V) \colon U \sim \Delta_S\}.$$

Ponieważ $f(\Delta_S) \subseteq S' \subseteq X'$, więc

$$X' = \{U' \in \mathrm{Sub}_m(W) \colon U' \sim f(\Delta_S)\}.$$

Zobaczmy, że

$$\begin{aligned} f(S) = \{f(U) \in \mathrm{Im}(f) \colon U \sim \Delta_S\} = \\ = \{U' \in \mathrm{Im}(f) \colon U' \sim f(\Delta_S)\} = X' \cap \mathrm{Im}(f). \end{aligned}$$

W tym przypadku szukanym X jest S. Analogicznie postępujemy, gdy $T' \subseteq X'$ i bierzemy wtedy $X := T$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 4.13. *Jeśli f jest zanurzeniem $\mathbf{P}_k(V)$ w $\mathbf{P}_m(W)$ to istnieją $Z, Y \in \mathrm{Sub}(W)$, takie że*

$$\mathrm{Im}(f) = [Z, Y]_m.$$

Dowód. Zgodnie z 1.10 wiemy, że

$$\mathbf{P}_k(V) \cong \mathbf{P}_m(W)|\,\mathrm{Im}(f). \tag{4.5}$$

Pokażemy, że $\mathrm{Im}(f)$ jest podprzestrzenią Grassmanna w $\mathbf{P}_m(W)$. Zaczynamy od sprawdzenia warunku (i) z 4.10. Przestrzeń pęków jest spójna z 1.17, a kolineacja realizująca (4.5) zachowuje współliniowość w obie strony, więc obraz $\mathrm{Im}(f)$ też jest spójny.

Teraz sprawdzimy warunek (ii) z 4.10. W tym celu niech l będzie prostą, S gwiazdą, T układem w $\mathbf{P}_m(W)$ takimi, że $l = S \cap T$. Zakładamy, że przekroje

$\mathrm{Im}(f) \cap S$ i $\mathrm{Im}(f) \cap T$ są co najmniej prostymi i dodatkowo, że $\mathrm{Im}(f) \cap l \neq \emptyset$. Musimy wykazać, że $l \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

Weźmy punkt $U' \in \mathrm{Im}(f) \cap l$ i jego przeciwobraz $U := f^{-1}(U')$.

Z 4.12 mamy w $\mathbf{P}_k(V)$ parę maksymalnych mocnych podprzestrzeni S_0, T_0 różnych typów takich, że

$$f(S_0) = S \cap \mathrm{Im}(f) \qquad \text{oraz} \qquad f(T_0) = T \cap \mathrm{Im}(f).$$

Ponieważ $U \in S_0 \cap T_0$, więc na mocy 3.9 przekrój $S_0 \cap T_0$ jest prostą. Ponadto

$$f(S_0 \cap T_0) = f(S_0) \cap f(T_0) = \mathrm{Im}(f) \cap l.$$

Obrazem prostej przy zanurzeniu f jest prosta, więc $\mathrm{Im}(f) \cap l$ jest prostą. Stąd musi być $l \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

W takim razie $\mathrm{Im}(f)$ jest podprzestrzenią Grassmanna w $\mathbf{P}_m(W)$. Aplikując 4.11 otrzymujemy, że $\mathrm{Im}(f)$ jest podprzestrzenią odcinkową w $\mathbf{P}_m(W)$ i dowód jest zakończony. $\square$

Twierdzenie 4.14. *Podprzestrzenie odcinkowe to jedyne takie podprzestrzenie w przestrzeni pęków $\mathbf{P}_k(V)$, które niosą strukturę przestrzeni pęków.*

Dowód. Wniosek z 2.9 oraz 4.13. $\square$

Bibliografia

[1] Bennett, M.K., *Affine and projective geometry*, Wiley Interscience, 1995.

[2] Bichara, A., Tallini, G. *On a characterization of Grassmann space representing the h-dimensional subspaces in a projective space*, Annals of Discrete Math. **18** (1983), 113–132.

[3] Konstatynowicz A., *Zanurzenia grassmannianów w grassmannianie podprzestrzeni przestrzeni rzutowej*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, Białystok, 2010.

[4] Pankov M., *Grassmannians of classical buildings*, Algebra and Discrete Mathematics Vol. 2, World Scientific, 2010.

[5] Rybak R., *Podprzestrzenie odcinkowe w kracie rzutowej i ich charakteryzacja*, praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki, Białystok, 2010.

[6] Żynel, M., *Ruztowania w kracie podprzestrzeni przestrzeni wektorowej*, rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Warszawa, 2003.