Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Justyna Cichocka

Klasy hiperpłaszczyzn w produktach Segre przestrzeni Grassmanna

Praca została napisana
pod kierunkiem
dr. hab. Krzysztofa Prażmowskiego, prof. UwB

Białystok 2016

Dziękuję tym,
którzy przyczynili się
do napisania niniejszej pracy,
w szczególności dr. Mariuszowi Żynelowi
za cierpliwość i nieocenioną pomoc
oraz za cenny wkład
prof. Krzysztofowi Prażmowskiemu.

Justyna Cichocka

Spis treści

Wstęp

W swojej pracy licencjackiej badałam ogólne własności produktu Segre dwóch częściowych przestrzeni prostych: spójność, warunek Veblena, warunek Gamma, wyznaczałam postać trójkąta oraz mocnych podprzestrzeni, charakteryzowałam hiperpłaszczyzny, badałam automorfizmy. W tej pracy kontunuję podjęty temat produktu Segre, ale konkretnie dla dwóch przestrzeni Grassmanna i badam hiperpłaszczyzny w takim produkcie.

Sam produkt Segre to przeniesienie idei produktu prostego z algebry do geometrii, gdzie sytuacja jest o tyle gorsza, że mamy dwa zbiory: punktów i prostych, a nie jedno uniwersum.

Przestrzenie Grassmanna, czasem zwane też przestrzeniami pęków, pojawiają się w literaturze dość często, w różnych kontekstach. Na ogół tam gdzie bada się strukturę podprzestrzeni zadanego wymiaru. W pracy korzystam z klasycznej definicji przestrzeni Grassmanna, gdzie jako punkty bierze się właśnie wszystkie podprzestrzenie ustalonego wymiaru k w przestrzeni wektorowej, natomiast prostymi są pęki takich podprzestrzeni. Z dokładnością do izomorfizmu, pęk podprzestrzeni to pęk prostych przez punkt na płaszczyźnie. Taki model analityczny nad przestrzenią wektorową odpowiada modelowi nad przestrzenią rzutowa i stąd nazwa rzutowa przestrzeń Grassmanna. Warto w tym miejscu wspomnieć aksjomatyczny opis przestrzeni Grassmanna w [1] oraz wszechstronne opracowanie w [4].

Pracę zaczynam od wprowadzenia niezbędnych definicji oraz ogólnych własności częściowych przestrzeni prostych. Przyjmuję geometryczną definicję hiperpłaszczyzny jako właściwej podprzestrzeni, którą przecina każda prosta (dokładniej: dotyka jednym punktem lub cała jest w niej zawarta). Wprowadzam tutaj dwa kluczowe terminy wyróżniając w ten sposób dwie klasy hiperpłaszczyzn: *kolczate* oraz *łuskowate*. Hiperpłaszczyzna jest *kolczata*, gdy z każdego jej punktu wychodzi prosta poza tę hiperpłaszczyznę. Natmiast hiperpłaszczyzna jest *łuskowata*, gdy każda prosta w niej leżąca jest bokiem trójkąta o wierzhołku poza tą hiperpłaszczyzną. Te własności są istotne, gdy usuwamy hiperpłaszczyznę i z tego co pozostało chcemy odzyskać całą wyjściową przestrzeń. Usuwanie hiperpłaszczyzny to klasyczna operacja w wyniku, której z przestrzeni rzutowej uzyskujemy przestrzeń afiniczną.

W tej części podaję też własności alternujących form k-liniowych bo są one istotne w badaniu hiperpłaszczyzn w przestrzeniach Grassmanna.

Drugi rozdział poświęcony jest hiperpłaszczyznom w przestrzeniach Grassmanna. Gdy wyjściowa przestrzeń wektorowa jest nad pierścieniem z dzieleniem, to każda hiperpłaszczyzna przestrzeni Grassmanna jest zbiorem tych k-wymiarowych podprzestrzeni, które niezerowo przecinają pewną podprzestrzeń kowymiaru k. Gdy natomiast mamy ciało to każda hiperpłaszczyzna jest zbiorem k-wymiarowych podprzestrzeni ubijanych przez pewną alternującą formę k-liniową.

W trzecim rozdziale przechodzę do zasadniczego problemu postawionego w tytule pracy. Podaję tutaj szereg przykładów hiperpłaszczyzn niezdegenerowanych, kolczatych i łuskowatych w produktach Segre dwóch przestrzeni Grassmanna.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia

1.1 Częściowa przestrzeń prostych

Zaczynamy od zdefiniowania podstawowego dla naszych dalszych rozważań pojęcia (por. [2]).

Rozważmy niepusty zbiór S, którego elementy dalej będziemy nazywać punktami oraz rodzinę $\mathcal{L}$ podzbiorów zbioru S, tzn. $\mathcal{L} \subseteq 2^S$, której elementy będziemy nazywać prostymi. Mówimy, że punkty $a, b \in S$, są *współliniowe* i piszemy $a \sim b$, gdy istnieje prosta $k \in \mathcal{L}$, taka że $a, b \in k$. Prostą k przez dwa różne punkty a, b oznaczamy $k = \overline{a, b}$. O prostych $k, l \in \mathcal{L}$ mówimy, że *przecinają się*, gdy istnieje punkt $a \in S$, taki że $a \in k, l$. Struktura $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest *częściową przestrzenią prostych* jeśli spełnia następujące warunki:

A1: na każdej prostej leżą co najmniej dwa punkty,

A2: przez dwa różne punkty przechodzi co najwyżej jedna prosta.

Gdy $\mathfrak{A}$ spełnia dodatkowy warunek:

A3: przez każde dwa punkty przechodzi prosta,

to wtedy o $\mathfrak{A}$ mówimy, że jest *przestrzenią prostych*.

Definicja 1.1. Mówimy, że podzbiór $X \subseteq S$ jest *podprzestrzenią* w $\mathfrak{A}$, gdy jest domknięty na prowadzenie prostych, to znaczy, że dla dowolnej prostej $l \in \mathcal{L}$ jeśli $|l \cap X| \geqslant 2$, to $l \subseteq X$.

Definicja 1.2. Podprzestrzeń X przestrzeni $\mathfrak{A}$ jest *mocna*, gdy każde dwa jej punkty są współliniowe.

Definicja 1.3. Mówimy, że parami różne punkty $p, q, r \in S$ tworzą *trójkąt* w $\mathfrak{A}$, gdy są parami współliniowe i nie leżą na jednej prostej. Taki trójkąt oznaczamy wówczas przez pqr.

Mówimy też, że trzy parami różne proste $k, l, m \in \mathcal{L}$ tworzą trójkąt w $\mathfrak{A}$, gdy parami przecinają się i nie przechodzą przez jeden punkt. Wtedy taki trójkąt oznaczamy przez klm.

Definicja 1.4. Zbiór $\mathcal{H} \subseteq S$ nazywamy *hiperpłaszczyzną* w $\mathfrak{A}$, gdy $\mathcal{H}$ jest właściwą podprzestrzenią $\mathfrak{A}$, która z każdą prostą w $\mathfrak{A}$ ma punkt wspólny.

Z powyższej definicji wynika, że:

Stwierdzenie 1.5. *Zbiór $\mathcal{H}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{H}$ jest właściwym podzbiorem w $\mathfrak{A}$, oraz dla każdej prostej $l \in \mathcal{L}$, albo $l \subseteq \mathcal{H}$, albo $|l \cap \mathcal{H}| = 1$.*

Dowód. $\Rightarrow$: Niech $l \in \mathcal{L}$. Ponieważ $\mathcal{H}$ jest hiperpłaszczyzną, to z definicji $\mathcal{H}$ jest właściwą podprzestrzenią taką że $|l \cap \mathcal{H}| \geqslant 1$. Mamy tutaj dwie możliwości:

$$\text{albo } |l \cap \mathcal{H}| \geqslant 2, \text{ albo } |l \cap \mathcal{H}| = 1.$$

Skoro $\mathcal{H}$ jest podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$, to w pierwszym przypadku mamy $l \subseteq \mathcal{H}$, co kończy tę część dowodu.
$\Leftarrow$: Musimy pokazać po pierwsze, że $\mathcal{H}$ jest podprzestrzenią, a to oznacza, że $\mathcal{H}$ przecina każdą prostą.

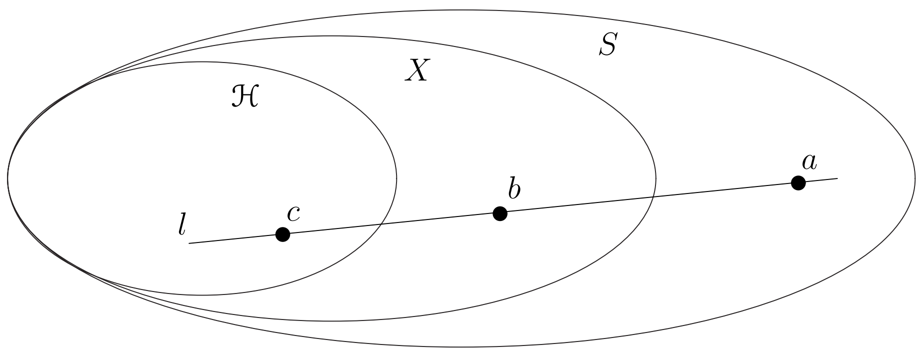
Niech $l \in \mathcal{L}$. Załóżmy, że $|l \cap \mathcal{H}| \geqslant 2$. Ponieważ albo $l \subseteq \mathcal{H}$, albo $|l \cap \mathcal{H}| = 1$, więc musi być $l \subseteq \mathcal{H}$. Zatem $\mathcal{H}$ jest podprzestrzenią.

Dla dowolnej prostej $l \in \mathcal{L}$ wiemy, że $l \subseteq \mathcal{H}$ lub $|l \cap \mathcal{H}| = 1$. W obu wypadkach mamy $l \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ co kończy dowód. $\square$

Gdyby w przestrzeni $\mathfrak{A}$ była określona funkcja wymiaru dla podprzestrzeni, to można by powiedzieć, że hiperpłaszczyzna, to podprzestrzeń kowymiaru 1, to znaczy, że gdy wymiar całej przestrzeni $\mathfrak{A}$ jest n, to wymiar hiperpłaszczyzny jest $n - 1$.

Lemat 1.6. *W przestrzeni prostych hiperpłaszczyzna to maksymalna podprzestrzeń właściwa.*

Dowód. Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpłaszczyzną w przestrzeni prostych $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$. Przypuśćmy, że $\mathcal{H}$ nie jest podprzestrzenią maksymalną w $\mathfrak{A}$, to znaczy, że istnieje podprzestrzeń X w $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathcal{H} \subsetneq X \subsetneq S$.



Rysunek 1.1: Hiperpłaszczyzna w przestrzeni prostych to maksymalna właściwa podprzestrzeń.

Zatem mamy

$$a \in S \setminus X \qquad \text{oraz} \qquad b \in X \setminus \mathcal{H}.$$

Zobaczmy, że $a \neq b$, bo a nie jest w X, a b jest w X. W takim razie jest prosta $l = \overline{a,b}$. Z definicji 1.4 prosta l musi przeciąć $\mathcal{H}$, czyli mamy kolejny punkt $c \in \mathcal{H} \cap k$. Widać, że $b \neq c$ dlatego, że b nie jest w $\mathcal{H}$, a c jest w $\mathcal{H}$. Widzimy też, że $c \in X$ bo $\mathcal{H} \subseteq X$. Skoro X jest podprzestrzenią i $|l \cap X| \geqslant 2$, więc musi być $l \subseteq X$. Ale to oznaczałoby, że $a \in X$ i mamy sprzeczność. □

Fragment hiperpłaszczyzny w podstrukturze jest hiperpłaszczyzną w tej podstrukturze.

Fakt 1.7 ([5])**.** *Niech $S_0 \subseteq S$, $\mathcal{L}_0 \subseteq \{L \in \mathcal{L} \colon L \subseteq S_0\}$, oraz $\mathcal{H}$ będzie hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{A}$. Jeśli $S_0 \nsubseteq \mathcal{H}$, to $\mathcal{H} \cap S_0$ jest hiperpłaszczyzną w $\langle S_0, \mathcal{L}_0 \rangle$.*

Definicja 1.8. Zbiór punktów współliniowych z danym punktem a oznaczamy

$$[a]_\sim = \{x \in S \colon a \sim x\}. \tag{1.1}$$

Częściową przestrzenią prostych $\mathfrak{A}$ nazywamy *przestrzenią gamma*, gdy spełnia ona następujący warunek:

$$\text{jeśli } a \notin l, \text{ to } \Big|[a]_\sim \cap l\Big| = 0 \text{ lub } \Big|[a]_\sim \cap l\Big| = 1 \text{ lub } l \subseteq [a]_\sim.$$

Przy założeniu, że $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest częściową przestrzenią prostych, mamy następujące definicje:

Definicja 1.9. Zbiór punktów X jest *kolczaty* w $\mathfrak{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $a \in X$ istnieje takie $b \notin X$, że $a \sim b$.

Definicja 1.10. Zbiór punktów X jest *łuskowaty* w $\mathfrak{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej prostej $l \subseteq X$ istnieje takie $b \in S \setminus X$, że $l \subseteq [b]_\sim$ (intuicyjnie: l razem z b rozpina płaszczyznę).

Fakt 1.11 ([5])**.** *Jeśli $\mathfrak{A}$ jest przestrzenią prostych i $X \subsetneq S$, to X jest zbiorem łuskowatym i kolczatym.*

Fakt 1.12 ([5])**.** *Łuskowata hiperpłaszczyzna w częściowej przestrzeni prostych bez punktów izolowanych jest kolczata.*

DOWÓD. Niech $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ będzie częściową przestrzenią prostych bez punktów izolowanych, a $\mathcal{H}$ niech będzie łuskowatą hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$. Załóżmy, że $\mathcal{H}$ nie jest kolczata. Istnieje wtedy taki punkt $a \in \mathcal{H}$, że $[a]_\sim \subseteq \mathcal{H}$. Skoro w $\mathfrak{M}$ nie ma punktów izolowanych, weźmy prostą l przez a. Jeśli $l \nsubseteq \mathcal{H}$, to mamy punkt $b \in S \setminus \mathcal{H}$ leżący na l razem z a. To daje sprzeczność, bo $[a]_\sim \subseteq \mathcal{H}$. Jeśli natomiast $l \subseteq \mathcal{H}$, to ponieważ przestrzeń $\mathcal{H}$ jest łuskowata, więc istnieje punkt $b \in S \setminus \mathcal{H}$ taki, że $l \subseteq [b]_\sim$. Znowu mamy sprzeczność, bo w szczególności $a \in [b]_\sim$. □

1.2 Produkt Segre

Definicja 1.13. Niech $\mathfrak{M}_i = \langle S_i, \mathcal{L}_i\rangle$ dla $i = 1, 2$, będą częściowymi przestrzeniami prostych. Oznaczmy

$$S := S_1 \times S_2, \tag{1.2}$$
$$\mathcal{G}_1 := \Big\{ l_1 \times \{x_2\} : l_1 \in \mathcal{L}_1, x_2 \in S_2 \Big\}, \tag{1.3}$$
$$\mathcal{G}_2 := \Big\{ \{x_1\} \times l_2 : x_1 \in S_1, l_2 \in \mathcal{L}_2 \Big\}, \tag{1.4}$$
$$\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2. \tag{1.5}$$

Strukturę

$$\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 = \langle S, \mathcal{G}\rangle$$

nazywamy *produktem Segre* przestrzeni $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$.

Twierdzenie 1.14 ([7]). *Punkty $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ są wierzchołkami trójkąta w produkcie Segre $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) *albo $a_1 = b_1 = c_1$ i wtedy boki tego trójkąta to:*

$$\overline{a, b} = \{a_1\} \times \overline{a_2, b_2}, \qquad \overline{b, c} = \{a_1\} \times \overline{b_2, c_2}, \qquad \overline{a, c} = \{a_1\} \times \overline{a_2, c_2},$$

(ii) *albo $a_2 = b_2 = c_2$ i wtedy boki tego trójkąta to:*

$$\overline{a, b} = \overline{a_1, b_1} \times \{a_2\}, \qquad \overline{b, c} = \overline{b_1, c_1} \times \{a_2\}, \qquad \overline{a, c} = \overline{c_1, a_1} \times \{a_2\}.$$

Na podstawie powyższego twierdzenia można powiedzieć, że trójkąt w produkcie Segre to trójkąt na jednej ze współrzędnych tego produktu, a na drugiej jest jeden punkt. Dzięki tej obserwacji, z twierdzenia 1.14 wynika następujący fakt.

Fakt 1.15. *Niech $l \in \mathcal{G}$ i $a = (a_1, a_2) \in S$. Jeśli $l \subseteq [a]_\sim$ i $a \notin l$, to*

(i) *albo $l = \{a_1\} \times l_2$ i $l_2 \subseteq [a_2]_\sim$ dla pewnej prostej $l_2 \in \mathcal{L}_2$,*

(ii) *albo $l = l_1 \times \{a_2\}$ i $l_1 \subseteq [a_1]_\sim$ dla pewnej prostej $l_1 \in \mathcal{L}_1$.*

Dowód. Aby uzasadnić to stwierdzenie weźmy dwa dowolne, byle różne, punkty $b, c \in l$. Gdy $l \subseteq [a]_\sim$ i $a \notin l$ to mamy trójkąt o wierzchołkach a, b, c. Teraz wystarczy użyć twierdzenie 1.14. □

Dla $a = (a_1, a_2) \in S$ oraz hiperpłaszczyzny $\mathcal{H}$ w $\mathfrak{M}$ będziemy pisać:

$$\mathcal{H}_1^{[a]} = \{x_1 \in S_1 : (x_1, a_2) \in \mathcal{H}\}, \tag{1.6}$$
$$\mathcal{H}_2^{[a]} = \{x_2 \in S_2 : (a_1, x_2) \in \mathcal{H}\}. \tag{1.7}$$

W pracy [7] zostało udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.16 ([7]). *Niech $\mathcal{H} \subseteq S$. Zbiór $\mathcal{H}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) *dla każdego $a \in S$ oraz $i \in \{1,2\}$ albo $\mathcal{H}_i^{[a]}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_i$ albo $\mathcal{H}_i^{[a]} = S_i$,*

(ii) *$\mathcal{H} \neq S_1 \times S_2 = S$.*

Przykład 1.17. Niech $\mathcal{H}_d = (S_1 \times \mathcal{H}_2) \cup (\mathcal{H}_1 \times S_2)$, gdzie $\mathcal{H}_i$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2$. Sprawdzimy, czy $\mathcal{H}_d$ jest hiperpłaszczyzną. Niech k będzie dowolną prostą z $\mathfrak{M}$. Mamy więc dwie możliwości:

$$k = k_1 \times \{a_2\} \qquad \text{albo} \qquad k = \{a_1\} \times k_2,$$

gdzie $k_1 \in \mathcal{L}_1$, $a_2 \in S_2$ albo $a_1 \in S_1$, $k_2 \in \mathcal{L}_2$.

Rozpatrzmy pierwszy przypadek. Zgodnie z definicją 1.4 przecięcie k i $\mathcal{H}_d$ powinno być niepuste, czyli $k \cap \mathcal{H}_d \neq \emptyset$. Zweryfikujmy to

$$\begin{aligned} k \cap \mathcal{H}_d &= (k_1 \times \{a_2\}) \cap \Big((S_1 \times \mathcal{H}_2) \cup (\mathcal{H}_1 \times S_2)\Big) = \\ &\Big((k_1 \times \{a_2\}) \cap (S_1 \times \mathcal{H}_2)\Big) \cup \Big((k_1 \times \{a_2\}) \cap (\mathcal{H}_1 \times S_2)\Big) = \\ &\Big(k_1 \times (\{a_2\} \cap \mathcal{H}_2)\Big) \cup \Big((k_1 \cap \mathcal{H}_1) \times \{a_2\}\Big). \end{aligned}$$

Przekrój $\{a_2\} \cap \mathcal{H}_2$ może być pusty, gdy $a_2 \notin \mathcal{H}_2$, ale ponieważ $\mathcal{H}_1$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_1$ i k_1 jest prostą w $\mathfrak{M}_1$, to $k_1 \cap \mathcal{H}_1 \neq \emptyset$ zgodnie z definicją hiperpłaszczyzny. Dokładniej, będziemy mieli albo $k \cap \mathcal{H}_1 = k_1$, albo $k \cap \mathcal{H}_1 = \{a_1\}$ dla pewnego $a_1 \in S_1$. Ostatecznie $k \cap \mathcal{H}_d \neq \emptyset$, co oznacza, że $\mathcal{H}_d$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$. W drugim przypadku, gdy $k = \{a_1\} \times k_2$ rozumowanie jest analogiczne.

Definicja 1.18. Mówimy, że hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ w produkcie Segre $\mathfrak{M}$ jest niezdegenerowana, gdy dla każdego $a \in S$, $\mathcal{H}_1^{[a]}$ oraz $\mathcal{H}_2^{[a]}$ są hiperpłaszczyznami odpowiednio $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$.

Przykład 1.19. Hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}_d$ z przykładu 1.17 jest zdegenerowana. Dla sprawdzenia weźmy $b \in S$ takie, aby $b_1 \in \mathcal{H}_1$. Wtedy

$$\{b_1\} \times S_2 \subseteq \mathcal{H}_1 \times S_2 \subseteq \mathcal{H}_d,$$

czyli $\mathcal{H}_2^{[b]} = S_2$.

Lemat 1.20 ([5]). *Hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}_d$ nie jest kolczata.*

DOWÓD. Weźmy punkt $a \in S$ taki, że $a_1 \in \mathcal{H}_1$, $a_2 \in \mathcal{H}_2$. Z tego mamy $a \in \mathcal{H}$. Weźmy punkt $b \in S$ współliniowy z a. Tak więc b będzie postaci (a_1, b_2), gdzie $a_2 \sim b_2$, albo postaci (b_1, a_2), gdzie $a_1 \sim b_1$. W obu przypadkach $b \in \mathcal{H}$ bo $\{a_1\} \times S_2 \subseteq \mathcal{H}$ oraz $S_1 \times \{a_2\} \subseteq \mathcal{H}$. Zatem $\mathcal{H}$ nie jest kolczata. $\square$

Stwierdzenie 1.21 ([5])**.** *Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$.*

(i) *Załóżmy, że hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ jest niezdegenerowana. Wówczas $\mathcal{H}$ jest łuskowata wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{H}_i^{[a]}$ jest łuskowatą hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_i$ dla wszystkich $a \in S$ oraz $i = 1, 2$.*

(ii) *Jeśli dla każdego $a \in S$ istnieje takie $i \in \{1, 2\}$, że $\mathcal{H}_i^{[a]}$ jest kolczatą hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_i$, to hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ jest kolczata.*

Dowód. Ad.(i)
$\Rightarrow$: Zakładamy, że hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ jest łuskowata. Weźmy dowolny punkt $a \in S$, powiedzmy, że $a = (a_1, a_2)$. Z niezdegenerowania $\mathcal{H}$ wynika, że $\mathcal{H}_1^{[a]}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_1$. Niech l_1 będzie prostą w $\mathcal{H}_1^{[a]}$. Wtedy $l := l_1 \times \{a_2\}$ jest prostą w $\mathfrak{M}$ zgodnie z (1.3). Ponieważ hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ jest łuskowata, więc z 1.10 istnieje punkt $b \in S \setminus \mathcal{H}$ taki, że $l \subseteq [b]_\sim$. Ale $b = (b_1, b_2)$ i na mocy 1.15 mamy $l_1 \subseteq [b_1]_\sim$ oraz $b_2 = a_2$. Zatem $\mathcal{H}_1^{[a]}$ jest łuskowata w $\mathfrak{M}_1$.

Dla $i = 2$ ta część dowodu biegnie tak samo.

$\Leftarrow$: Teraz zakładamy, że $\mathcal{H}_i^{[a]}$ jest łuskowatą hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_i$ dla dowolnego $a \in S$ oraz $i = 1, 2$. Rozważmy prostą l zawartą w $\mathcal{H}$. Powiedzmy, że $l \in \mathcal{G}_1$, czyli $l = l_1 \times \{a_2\}$ dla pewnej prostej l_1 z $\mathfrak{M}_1$ oraz punktu a_2 z $\mathfrak{M}_2$. Zauważmy, że $l_1 \subseteq \mathcal{H}_1^{[a]}$, gdzie $a = (a_1, a_2)$ dla dowolnego $a_1 \in S_1$. Z łuskowatości $\mathcal{H}_1^{[a]}$ istnieje punkt $b_1 \in S_1 \setminus \mathcal{H}_1^{[a]}$ taki, że $l_1 \subseteq [b_1]_\sim$. Widać, że każdy punkt prostej $l_1 \times \{a_2\}$ jest współliniowy z punktem (b_1, a_2) oraz $(b_1, a_2) \notin \mathcal{H}$. To oznacza, że hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ jest łuskowata.

Gdy $l \in \mathcal{G}_2$ dowód przebiega podobnie.

Ad.(ii)
Mamy pokazać, że hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ jest kolczata. Weźmy więc dowolny punkt $a = (a_1, a_2) \in \mathcal{H}$. Z założenia mamy $i \in \{1, 2\}$ takie, że $\mathcal{H}_i^{[a]}$ jest kolczatą hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_i$. To znaczy, że istnieje punkt $b_i \in S_i \setminus \mathcal{H}_i^{[a]}$ taki, że $a_i \sim b_i$, bo $a_i \in \mathcal{H}_i^{[a]}$. Tak więc punkt (b_1, a_2) lub (a_1, b_2) jest współliniowy z a i nie leży na $\mathcal{H}$, co należało pokazać. $\square$

Z uwagi na fakt 1.12 mamy następujący wniosek.

Wniosek 1.22 ([5])**.** *Niech $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ będą przestrzeniami prostych, a $\mathcal{H}$ hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$.*

(i) *Hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ jest łuskowata wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{H}$ jest niezdegenerowana.*

(ii) *Jeśli dla każdego $a \in S$ istnieje takie $i \in \{1, 2\}$, że $\mathcal{H}_i^{[a]}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_i$, to hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}$ jest kolczata.*

Lemat 1.23 ([5])**.** *Zdegenerowana hiperpłaszczyzna w $\mathfrak{M}$ nie jest łuskowata.*

Dowód. Niech $\mathcal{H}$ będzie zdegenerowaną hiperpłaszczyzną w produkcie Segre $\mathfrak{M}$. Wtedy istnieją takie a i $i \in \{1, 2\}$, że $\mathcal{H}_i^{[a]} = S_i$, co oznacza, że $\{a_1\} \times$

$S_2, S_1 \times \{a_2\} \subseteq \mathcal{H}$. Gy weźniemy $l \in \mathcal{L}_2$, to wtedy prosta $L = \{a_1\} \times l_2 \in \mathcal{H}$ oraz, gdy weźniemy $l \in \mathcal{L}_1$, to prosta $L = l_1 \times \{a_2\} \in \mathcal{H}$. W pierwszym przypadku z twierdzenia 1.14 o trójącie w $\mathfrak{M}$ wiemy, że trójkąt, którego jednym z boków jest prosta L, musi leżeć w $\{a_1\} \times S_2$. Natomiast w drugim przypadku taki trójkąt leży w $S_1 \times \{a_2\}$. W obu przypadkach nie ma punktu na zewnątrz $\mathcal{H}$, który może być wierzchołkiem tego trójkąta. □

1.3 Przestrzeń rzutowa

Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią wektorową nad pierścieniem z dzieleniem F. Przez $\mathrm{Sub}(V)$ oznaczamy rodzinę wszystkich podprzestrzeni przestrzeni V. Gdy $0 \leqslant k \leqslant n$, to przez $\mathrm{Sub}_k(V)$ rozumiemy zbiór wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni V.

Wtedy struktura incydencyjna

$$\mathbf{P}(V) = \langle \mathrm{Sub}_1(V), \mathrm{Sub}_2(V), \subseteq \rangle, \tag{1.8}$$

w której punktami są 1-wymiarowe podprzestrzenie, a prostymi są 2-wymiarowe podprzestrzenie V, to jest przestrzeń rzutowa.

1.4 Przestrzeń Grassmanna

Definicja 1.24. Jeśli $0 < k < n$, $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ i $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(B)$, to zbiór:

$$\mathbf{p}(H, B) = \{U \in \mathrm{Sub}_k(V) \colon H \subset U \subset B\} \tag{1.9}$$

nazywamy *k-pękiem* o wierzchołku H i podstawie B. Zbiór wszystkich takich pęków przy ustalonym k oznaczamy przez $\mathcal{P}_k(V)$. Geometrię, której punktami są k-wymiarowe podprzestrzenie V, a prostymi k-pęki nazywamy *rzutową przestrzenią Grassmanna* indeksu k nad V i oznaczamy

$$\mathbf{P}_k(V) = \left\langle \mathrm{Sub}_k(V), \mathcal{P}_k(V) \right\rangle. \tag{1.10}$$

Aksjomatyczne ujęcie przestrzeni Grassmanna można znaleźć w [1], natomiast szereg własności tej geometrii w [4].

Gdy $k = 1$ lub $k = n - 1$, to $\mathbf{P}_k(V)$ jest przestrzenią rzutową.

Zanotujmy ogólny, aczkolwiek użyteczny fakt z algebry liniowej.

Lemat 1.25. *Jeśli $U, W \in \mathrm{Sub}_k(V)$ i $U \cap W \in \mathrm{Sub}_{k-m}(V)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U + W \in \mathrm{Sub}_{k+m}(V)$.*

Dowód. Z algebry liniowej znany jest wzór

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W). \tag{1.11}$$

$\Rightarrow$: Gdy $\dim(U \cap W) = k - m$, to z (1.11) mamy $\dim(U + W) = k + m$.
$\Leftarrow$: Natomiast, gdy $\dim(U + W) = k + m$, to wtedy ze wzoru (1.11) mamy $\dim(U \cap W) = k - m$. □

W oparciu o definicje 1.24 oraz [8] podamy teraz kilka istotnych własności przestrzeni Grassmanna.

Fakt 1.26. *Niech U, W będą różnymi punktami w przestrzeni Grassmanna $\mathbf{P}_k(V)$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *punkty U, W są współliniowe w $\mathbf{P}_k(V)$,*

(2) $\dim(U \cap W) = k - 1$,

(3) $\dim(U + W) = k + 1$.

Fakt 1.27. *Niech p będzie prostą w przestrzeni Grassmanna $\mathbf{P}_k(V)$ i niech U_1, U_2 będą różnymi punktami z prostej p. Wówczas:*

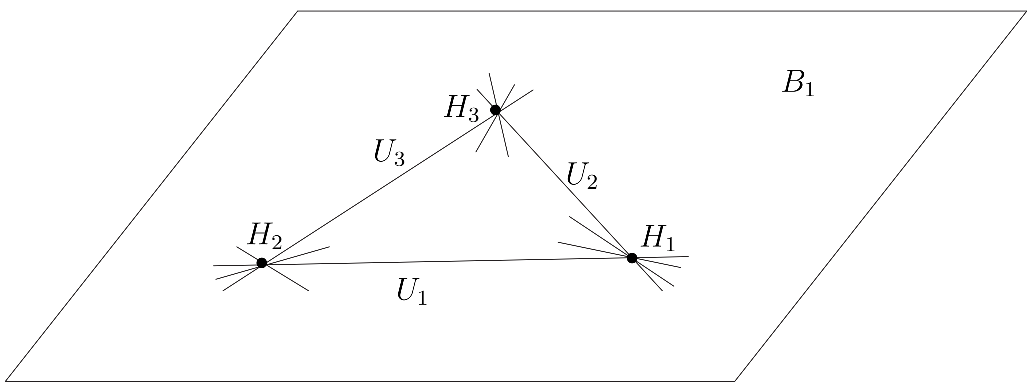
(i) *$p = \mathbf{p}(H, B)$ dla pewnych $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$ i $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ takich, że $H \subset B$,*

(ii) *$U_1 = H \oplus \langle u_1 \rangle$, $U_2 = H \oplus \langle u_2 \rangle$ dla pewnych wektorów $u_1, u_2 \in V$ takich, że $B = H \oplus \langle u_1, u_2 \rangle$, oraz*

(iii) *dla dowolnego $U \in p$ mamy $U = H \oplus \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \rangle$, dla pewnych skalarów $\alpha_1, \alpha_2 \in F$.*

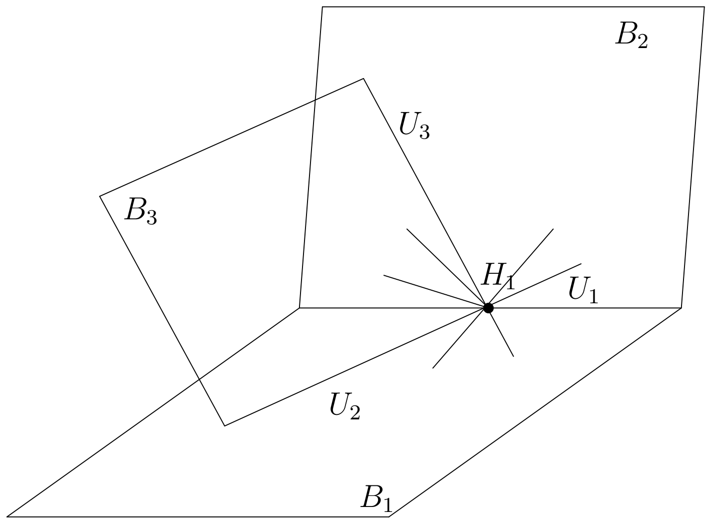
Fakt 1.28. *Niech U_1, U_2, U_3 będą wierzchołkami trójkąta w przestrzeni Grassmanna $\mathbf{P}_k(V)$. Wtedy $U_1 \cap U_2 \cap U_3 \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$ lub $U_1 + U_2 + U_3 \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$.*

Zilustrujemy przykład trójkąta o wierzchołkach U_1, U_2, U_3 w przestrzeni Grassmanna $\mathbf{P}_k(V)$. Niech $p = \mathbf{p}(H_1, B_1)$, $q = \mathbf{p}(H_2, B_2)$, $r = \mathbf{p}(H_3, B_3)$. Pierwszy przypadek, gdy $B_1 = B_2 = B_3$ i wierzchołki pęku są parami różne $\neq (H_1, H_2, H_3)$.



Rysunek 1.2: Trójkąt typu układ w przestrzeni Grassmanna.

Drugi przypadek, gdy $H_1 = H_2 = H_3$ i podstawy pęku są parami różne $\neq (B_1, B_2, B_3)$.



Rysunek 1.3: Trójkąt typu gwiazda w przestrzeni Grassmanna.

1.4.1 Podprzestrzenie odcinkowe

Definicja 1.29. Mówimy, że podprzestrzeń X w przestrzeni Grassmanna $\mathbf{P}_k(V)$ jest *podprzestrzenią odcinkową*, gdy istnieją $Z, Y \in \mathrm{Sub}(V)$ takie, że

$$X = [Z, Y]_k = \{U \in \mathrm{Sub}_k(V) : Z \subseteq U \subseteq Y\}.$$

Podprzestrzenie odcinkowe i tylko takie mają strukturę przestrzeni Grassmanna.

Fakt 1.30 ([9, Tw. 2.6])**.** *Podprzestrzeń odcinkowa $[Z, Y]_k$ w $\mathbf{P}_k(V)$ jest z dokładnością do izomorfizmu przestrzenią Grassmanna $\mathbf{P}_{k-\dim(Z)}(Y/Z)$. Jeśli podprzestrzeń X w $\mathbf{P}_k(V)$ jest izomorficzna z przestrzenią Grassmanna, to X jest podprzestrzenią odcinkową.*

Fakt 1.31. *Dla dowolnych $Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 \in \mathrm{Sub}(V)$ mamy równość*

$$[Z_1, Y_1]_k \cap [Z_2, Y_2]_k = [Z_1 + Z_2, Y_1 \cap Y_2]_k.$$

1.4.2 Gwiazdy i układy

Niech $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$ i $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$. Wtedy

$$\mathrm{S}(H) = \{U \in \mathrm{Sub}_k : H \subset U\} \quad \text{nazywamy gwiazdą,}$$

$$\mathrm{T}(B) = \{U \in \mathrm{Sub}_k : U \subset B\} \quad \text{nazywamy układem.}$$

Zauważmy, że

$$\mathrm{S}(H) = [H, V]_k, \tag{1.12}$$

oraz

$$\mathrm{T}(B) = [\Theta, B]_k. \tag{1.13}$$

Tak więc gwiazdy i układy, to specyficzne podprzestrzenie odcinkowe w $\mathbf{P}_k(V)$.

Fakt 1.32.

(i) *Gdy* $H_1, H_2 \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$, $H_1 \neq H_2$ *i* $S(H_1) \cap S(H_2) \neq \emptyset$, *to*

$$S(H_1) \cap S(H_2) = \{H_1 + H_2\}.$$

(ii) *Gdy* $B_1, B_2 \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$, $B_1 \neq B_2$ *i* $T(B_1) \cap T(B_2) \neq \emptyset$, *to*

$$T(B_1) \cap T(B_2) = \{B_1 \cap B_2\}.$$

(iii) *Gdy* $S(H) \cap T(B) \neq \emptyset$, *to* $S(H) \cap T(B) = \mathbf{p}(H, B)$.

Fakt 1.33. *Zbiór X jest maksymalną mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \mathrm{S}(H)$ dla pewnego $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$ lub $X = \mathrm{T}(B)$ dla pewnego $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$.*

Skoro gwiazda $\mathrm{S}(H)$ jest postaci $[H, V]_k$ zgodnie z (1.12), więc z faktu 1.30 mamy $\mathrm{S}(H) \cong \mathbf{P}_1(V/H)$, czyli $S(H)$ ma strukturę przestrzeni rzutowej. Analogicznie dla układów. Z (1.13) i faktu 1.30 mamy $\mathrm{T}(B) \cong \mathbf{P}_k(B)$. Ponieważ każdą mocną podrzestrzeń można rozszerzyć do maksymalnej mocnej podprzestrzeni, więc na mocy 1.33 możemy zanotować następujące twierdzenie.

Fakt 1.34. *Mocna podprzestrzeń w $\mathbf{P}_k(V)$ ma strukturę przestrzeni rzutowej.*

1.5 Formy półtoraliniowe i dwuliniowe

Definicja 1.35. Niech f będzie niezerowym odwzorowaniem przestrzeni wektorowej V nad pierścieniem z dzieleniem F w przestrzeń wektorową V' nad pierścieniem z dzieleniem F'. Odwzorowanie f jest *półliniowe*, jeśli istnieje taki izomorfizm $\sigma : F \to F'$, który dla dowolnych wektorów $u, w \in V$ oraz $\lambda \in F$ spełnia warunki:

(i) $f(u + w) = f(u) + f(w)$;

(ii) $f(\lambda u) = \sigma(\lambda) f(u)$.

W pierścieniu z dzieleniem F można mówić o *anty-automorfizmach*, to znaczy o automorfizmach $\sigma : F \to F$ takich, że:

$$\sigma(ab) = \sigma(b)\sigma(a)$$

dla wszystkich $a, b \in F$.

Definicja 1.36. Niech F będzie pierścieniem z dzieleniem, a σ anty-automorfizmem F oraz V przestrzenią wektorową nad F. *Półtoraliniową formą* względem σ na V jest takie odwzorowanie $\xi : V \times V \to F$, że:

(i) $\xi(u + w, v) = \xi(u, v) + \xi(w, v)$;

(ii) $\xi(u, w + v) = \xi(u, w) + \xi(u, v)$;

(iii) $\xi(\lambda u, w) = \lambda\xi(u, w)$;

(iv) $\xi(u, \mu w) = \xi(u, w)\sigma(\mu)$

dla wszystkich $u, w, v \in V$ i dla wszystkich $\lambda, \mu \in F$.

Nazwa półtoraliniowa dlatego, że ξ jest liniowa na pierwszej współrzędnej, a na drugiej półliniowa. Forma dwuliniowa jest formą półtoraliniową dla $\sigma =$ id. Forma dwuliniowa jest liniowa na obu współrzędnych.

Niech $\xi : V \times V \longrightarrow F$ będzie formą półtoraliniową.

Gdy $\xi(x, y) = \xi(y, x)$ dla każdego $x, y \in V$, to mówimy, że forma ξ jest *symetryczna*.

Gdy $\xi(x, y) = -\xi(y, x)$ dla każdego $x, y \in V$, to mówimy, że forma ξ jest *alternująca*.

Gdy $\xi(x, y) = 0 \Rightarrow \xi(y, x) = 0$ dla każdego $x, y \in V$, to mówimy, że forma ξ jest *refleksywna*.

Gdy $\xi(x, x) = 0$, dla każdego $x, \in V$, to mówimy, że forma ξ jest *symplektyczna*.

Niech ξ będzie refleksywną formą półtoraliniową. Mówimy, że wektory $x, y \in V$ są *ortogonalne* i piszemy $x \perp y$, gdy $\xi(x, y) = 0$. Gdy $\xi(x, x) = 0$, to wektor x jest prostopadły sam do siebie, czyli *izotropowy*. Natomiast dla podprzestrzeni U, W w V piszemy $U \perp W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi(u, w) = 0$ dla wszystkich $u \in U$ i $w \in W$. Analogicznie, gdy $U \perp U$, to mówimy, że podprzestrzeń U jest izotropowa. Zbiór wszystkich podprzestrzeni izotropowych, to *kwadryka*:

$$Q(\xi) = \{U \in \mathrm{Sub}(V) : U \perp U\}, \qquad Q_k(\xi) = Q(\xi) \cap \mathrm{Sub}_k(V).$$

Zbiór wszystkich wektorów prostopadłych do ustalonej podprzestrzeni U, to jej *ortouzupełnienie*:

$$U^{\perp} := \{x \in V : \xi(x, u) = 0 \text{ dla wszystkich } u \in U\}.$$

Fakt 1.37. *Dla podprzestrzeni U, W, B przestrzeni V mamy:*

(i) $U \perp W$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $U \subseteq W^{\perp}$*;*

(ii) jeśli $U \perp U$ *oraz* $W \subseteq U$ *to* $W \perp W$*;*

(iii) jeśli $U \perp B$ *i* $W \subseteq B$ *to* $U \perp W$*;*

(iv) jeśli $U, W \subseteq B$ *oraz* $B \perp B$ *to* $U \perp W$*;*

(v) $B \perp (U + W)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $B \perp U$ *i* $B \perp W$*;*

(vi) jeśli $U \subseteq W$ *to* $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$*;*

(vii) $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$*;*

(viii) $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$*;*

(ix) $(U \cap W)^{\perp} \supseteq U^{\perp} + W^{\perp}$*;*

(x) jeśli $U \subseteq W^{\perp}$ *to* $W \subseteq U^{\perp}$*;*

(xi) dla $B = U + W$ *mamy* $B \perp B$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $U \perp U$*,* $W \perp W$ *oraz* $U \perp W$*.*

Forma ξ jest zdegenerowana, gdy istnieje niezerowy wektor $x \in V$ taki, że $x \perp V$. Gdy przestrzeń wektorowa V ma skończony wymiar n, to dla niezdegenerowanej formy ξ zachodzi wzór

$$\dim(U^{\perp}) = \dim(V) - \dim(U). \tag{1.14}$$

Przy ustalonej bazie $e_1, e_2, \ldots, e_n$ w przestrzeni V, dla formy ξ możemy wyznaczyć jej macierz w następujący sposób:

$$\Big[\xi(e_i, e_j)\Big]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{bmatrix} \xi(e_1, e_1) & \xi(e_1, e_2) & \ldots & \xi(e_1, e_n) \\ \xi(e_2, e_1) & \xi(e_2, e_2) & \ldots & \xi(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi(e_n, e_1) & \xi(e_n, e_2) & \ldots & \xi(e_n, e_n) \end{bmatrix}.$$

Przykład 1.38. Niech odwzorowanie $\xi \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie zadane wzorem

$$\xi\Big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\Big) = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{1.15}$$

Takie ξ to alternująca forma dwuliniowa. Weźmy

$$e_1 = (1, 0), \qquad e_2 = (0, 1),$$

czyli bazę $\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$. Obliczając kolejno:

$$\xi(e_1, e_1) = 0, \quad \xi(e_1, e_2) = 1, \quad \xi(e_2, e_1) = -1, \quad \xi(e_2, e_2) = 0$$

otrzymujemy macierz naszej formy ξ w ustalonej bazie:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przykład 1.39. Gdyby wzór (1.15) wyglądał tak:

$$\xi\Big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\Big) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

przy tych samych założeniach mielibyśmy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^2$ o macierzy jak poniżej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.6 Formy wieloliniowe

Definicja 1.40. Niech F będzie ciałem i V przestrzenią wektorową nad F. Odwzorowanie $\xi\colon V^k \to F$ jest *formą wieloliniową* (dokładniej: *formą k-liniową*) na V, gdy ξ jest przekształceniem liniowym na każdej współrzędnej.

Podobnie jak dla formy dwuliniowej tak i dla formy wieloliniowej można wyznaczyć jej macierz, gdy ustalona jest baza przestrzeni V. Niech ta baza to $e_1, e_2, \dots, e_n$. Wtedy macierz formy k-liniowej ξ to:

$$\Big[\xi(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})\Big]_{1 \leqslant i_1, i_2, \dots i_k \leqslant n}.$$

Mówimy, że k-liniowa forma ξ na V jest *alternująca*, gdy dla $1 \leqslant i < j \leqslant k$ mamy

$$\xi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = -\xi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k).$$

Przykład 1.41. Rozważamy odwzorowanie $\xi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadane wzorem:

$$\xi\Big((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)\Big) = \\ a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1. \quad (1.16)$$

Jest to alternująca forma 3-liniowa. Weźmy bazę

$$e_1 = (1, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0). \qquad e_3 = (0, 0, 1)$$

w $\mathbb{R}^3$. Zobaczmy jak będzie wyglądać macierz formy ξ w tej bazie. Jest to macierz $3 \times 3 \times 3$, więc przedstawimy ją „po kawałku, piętrami”.

$\xi(\cdot,\cdot,e_1)$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	0	0
e_2	0	0	1
e_3	0	-1	0

$\xi(\cdot,\cdot,e_2)$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	0	-1
e_2	0	0	0
e_3	1	0	0

$\xi(\cdot,\cdot,e_3)$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	1	0
e_2	-1	0	0
e_3	0	0	0

Tabela 1.1: Macierz alternującej formy 3-liniowej ξ w bazie e_1, e_2, e_3 na $\mathbb{R}^3$ w formie tabularycznej.

Niech dalej ξ będzie alternującą formą k-liniową na V. Mówi się, że forma ξ *ubija* podprzestrzeń $U \in \mathrm{Sub}(V)$, gdy $\xi(u_1, \ldots, u_k) = 0$ dla dowolnych wektorów $u_1, \ldots, u_k \in U$.

Lemat 1.42. *Niech $u_1, \ldots, u_k \in V$. Jeśli $u_j = \alpha u_i$ dla pewnych $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ oraz $\alpha \in F$, to $\xi(u_1, \ldots, u_k) = 0$.*

DOWÓD. Zauważmy, że dla dowolnego $\alpha \in F$ mamy

$$\begin{aligned}\alpha\xi(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_i, \ldots, u_k) &= \xi(u_1, \ldots, u_i, \ldots, \alpha u_i, \ldots, u_k) = \\ \xi(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_k) &= -\xi(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_k) = \\ -\xi(u_1, \ldots, \alpha u_i, \ldots, u_i, \ldots, u_k) &= -\alpha\xi(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_i, \ldots, u_k).\end{aligned}$$

Gdy $\alpha = 0$, to od razu mamy $\xi(u_1, \ldots, u_k) = 0$. Gdy natomiast $\alpha \neq 0$, to możemy podzielić obie strony powyższej równości przez α i dostajemy

$$\xi(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_i, \ldots, u_k) = -\xi(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_i, \ldots, u_k),$$

a więc $\xi(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_i, \ldots, u_k) = 0$, czyli $\xi(u_1, \ldots, u_k) = 0$. $\square$

Lemat 1.43. *Jeżeli $u_1, \ldots, u_k \in V$ są liniowo zależne, to $\xi(u_1, \ldots, u_k) = 0$.*

DOWÓD. Skoro wektory są liniowo zależne, to bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że

$$u_k = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{k-1} u_{k-1}$$

dla pewnych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1} \in F$. Wtedy

$$\begin{aligned}\xi(u_1, u_2, \dots, u_k) = {} & \xi(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_{k-1} u_{k-1}) = \\ & \xi(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \alpha_1 u_1) \\ & + \xi(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \alpha_2 u_2) \\ & \dots \\ & + \xi(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \alpha_{k-1} u_{k-1}).\end{aligned}$$

Z lematu 1.42 wynika, że $\xi(u_1, u_2, \dots, u_k) = 0$. □

Powyższe dwa lematy są dość ważne dla alternujących form k-liniowych, gdy bedziemy mówić o przestrzeniach Grassmanna. Po pierwsze, lemat 1.43 mówi, że forma ξ zawsze ubija podprzestrzeń U, gdy $\dim(U) < k$. Po drugie, aby sprawdzić, czy forma ξ ubija podprzestrzeń U czy nie, warto brać tylko k wektorów liniowo niezależnych.

W [6] powiedziane jest, że gdy mamy k-wymiarową podprzestrzeń U oraz $\xi(u_1, \dots, u_k) = 0$ dla jakiejś bazy $u_1, \dots, u_k$ w U, to ξ zeruje się na każdej bazie U. Wtedy ξ zeruje się na każdym układzie k wektorów z U, innymi słowy forma ξ ubija U.

Forma k-liniowa ξ jest *zerowa*, gdy $\xi(u_1, \dots, u_k) = 0$ dla dowolnych wektorów $u_1, \dots, u_k \in V$. Alternująca forma k-liniowa jest niezerowa, gdy istnieje k-wymiarowa podprzestrzeń $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$, której ta forma nie ubija.

Możemy zdefiniować *radykał* formy k-liniowej, który wyraża się następująco:

$$\mathrm{Rad}(\xi) = \Big\{ v \in V \colon \xi(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v) = 0 \text{ dla } v_1, v_2, \dots, v_{k-1} \in V \Big\}. \quad (1.17)$$

Jest to uogólnienie definicji radykału formy dwuliniowej, czy półtoraliniowej.

Rozdział 2

Hiperpłaszczyzny w przestrzeni Grassmanna

Niech F będzie pierścieniem z dzieleniem i niech V będzie przestrzenią wektorową nad F. Zakładamy, że $\dim(V) = n < \infty$. Postać hiperpłaszczyzny w przestrzeni Grassmanna $\mathbf{P}_k(V)$ zależy od tego czy F jest ciałem, czy tylko pierścieniem z dzieleniem.

2.1 Hiperpłaszczyzny geometryczne

Rozważmy na początku sytuację, gdy F jest pierścieniem z dzieleniem i niekoniecznie jest ciałem. Niech $W \in \mathrm{Sub}(V)$. Bardzo ważny w dalszych rozważaniach będzie zbiór

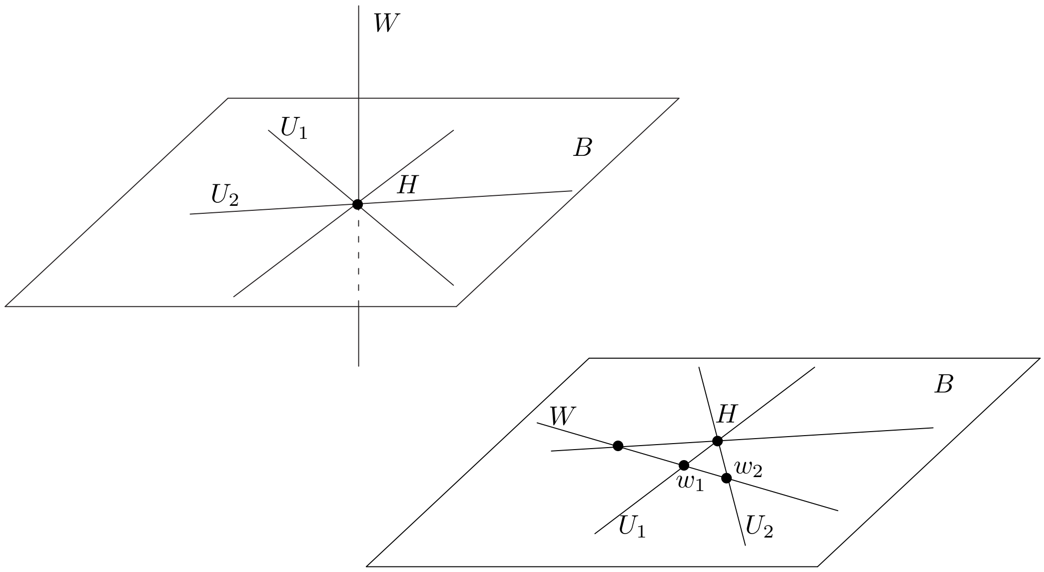
$$\mathcal{H}(W) := \Big\{U \in \mathrm{Sub}_k(V) \colon U \cap W \neq \Theta\Big\}. \tag{2.1}$$

Lemat 2.1. *Jeśli $W \in \mathrm{Sub}_{n-k}(V)$ dla $0 \leqslant k \leqslant n$, to $\mathcal{H}(W)$ jest podprzestrzenią $\mathbf{P}_k(V)$ oraz każda prosta z $\mathbf{P}_k(V)$ przecina $\mathcal{H}(W)$.*

Dowód. Niech $W \in \mathrm{Sub}_{n-k}(V)$. Zaczniemy od pokazania, że każda prosta przecina $\mathcal{H}(W)$. Weźmy dowolną prostą $p = \mathbf{p}(H, B)$ w $\mathbf{P}_k(V)$ dla pewnych $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ i $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(B)$. Musi zachodzić $p \cap \mathcal{H}(W) \neq \emptyset$. Wiemy, że $\dim(B) = k + 1$ i $\dim(W) = n - k$. Ze wzoru (1.11) oraz z tego, że $\dim(B+W) \leqslant n$ wynika, że $\dim(B\cap W) \geqslant 1$. Czyli istnieje wektor $w \in B\cap W$ taki, że $w \neq \theta$. Mamy $\dim(H + \langle w\rangle) = k - 1$, gdy $w \in H$ i $\dim(H + \langle w\rangle) = k$, gdy $w \notin H$.
W pierwszym przypadku dla dowolnego punktu U z prostej p czyli takiego, że $H \subset U \subset B$, mamy $w \in U$. Zatem każdy punkt z p niezerowo przecina W, czyli $p \subset \mathcal{H}(W)$.
W drugim przypadku weźmy $U := H + \langle w\rangle$. Zauważmy, że $H \subset U \subset B$. To oznacza, że $U \in p$. Z drugiej strony $U \cap W \neq \Theta$, więc $p \cap \mathcal{H}(W) \neq \emptyset$.

Aby dowieść, że $\mathcal{H}(W)$ jest podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$ weźmy dowolną prostą $p = \mathbf{p}(H, B)$ z $\mathbf{P}_k(V)$ i załóżmy, że $|p \cap \mathcal{H}(W)| \geqslant 2$. Zatem mamy takie

$U_1, U_2 \in p$, że $U_1 \cap W \neq \Theta$, $U_2 \cap W \neq \Theta$ i $U_1 \neq U_2$. Pęk p możemy wyobrazić sobie jako zbiór wszystkich prostych przez punkt H na płaszczyźnie B.



Rysunek 2.1: Pęk prostych o wierzchołku H na płaszczyźnie rzutowej B z ustaloną podprzestrzenią W. Albo przestrzeń W przecina H, abo nie przecina.

W tej interpretacji U_1, U_2 to proste z tego zbioru, a W to podprzestrzeń jakoś przecinająca płaszczyznę B. Istotne jest jak W leży względem H. Albo H przecina W, albo nie. Na B mamy dwa punkty w_1, w_2 takie, że $w_i \in U_i \cap W$, $i = 1, 2$. Jeśli $w_1 = w_2$ jest punktem wspólnym U_1 i U_2, czyli gdy $w_1 = w_2 = H$, to wszystkie proste z pęku p przecinają W. W przeciwnym razie mamy prostą w_1, w_2 zawartą w W i leżącą na B. Na płaszczyźnie rzutowej B każda prosta z pęku p przecina prostą $\overline{w_1, w_2}$. Tym samym $p \subset \mathcal{H}(W)$, co kończy dowód. $\square$

Udowodniliśmy właśnie ważny fakt znany też z literatury [3].

Stwierdzenie 2.2. *Jeśli $W \in \mathrm{Sub}_{n-k}(V)$, to $\mathcal{H}(W)$ jest hiperpłaszczyzną w przestrzeni $\mathbf{P}_k(V)$.*

W pracy [3] udowodnione jest, że o ile F nie jest ciałem, to każda hiperpłaszczyzna w $\mathbf{P}_k(V)$ jest postaci $\mathcal{H}(W)$.

Twierdzenie 2.3 ([3])**.** *Jeśli F nie jest ciałem i $\mathcal{H}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathbf{P}_k(V)$, to $\mathcal{H} = \mathcal{H}(W)$ dla pewnego $W \in \mathrm{Sub}_{n-k}(V)$.*

Przykład 2.4. Niech $\dim(V) = 4$ i $k = 2$. W zasadzie badamy przestrzeń Grassmanna $\mathbf{P}_2(V)$. Wówczas $P = \mathbf{P}(V)$ to 3-wymiarowa przestrzeń rzutowa zdefiniowana w (1.8).

Weźmy $W \in \mathrm{Sub}_2(V)$. Podprzestrzeń W w P, to prosta. Rozważmy definicję (2.1). Wówczas $\mathcal{H}(W)$ w P, to zbiór wszystkich prostych przecinających ustaloną wcześniej prostą W, którą dalej nazywamy *osią*. Zbiór $\mathcal{H}(W)$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathbf{P}_2(V)$ i w P nazywamy ją *kompleksem liniowym*.

Lemat 2.5. *Niech W będzie podprzestrzenią kowymiaru k w V oraz niech $2 \leqslant k \leqslant n-2$. Jeśli $U_1 \in \mathrm{Sub}_k(V)$ i $\dim(U_1 \cap W) \geqslant 2$, to dla każdego $U_2 \in \mathrm{Sub}_k(V)$ takiego, że $U_1 \sim U_2$ mamy $U_2 \in \mathcal{H}(W)$.*

Dowód. Weźmy $U_1 \in \mathrm{Sub}_k(V)$ takie, że $\dim(U_1 \cap W) \geqslant 2$. Zatem $U_1 \in \mathcal{H}(W)$. Niech $U_2 \in \mathrm{Sub}_k(V)$ będzie jakimkolwiek punktem $\mathbf{P}_k(V)$ byle współliniowym z U_1 i różnym od U_1. Wówczas $\dim(U_1 \cap U_2) = k-1$. To oznacza, że $U_1 \cap U_2$ jest hiperpłaszczyzną w U_1. Zauważmy, że w U_1 (tzn. ograniczając się do U_1) skoro $U_1 \cap W$ jest podprzestrzenią wymiaru 2 lub więcej, to musi przecinać hiperpłaszczyznę $U_1 \cap U_2$ nietrywialnie. Dokładniej: $\dim(U_1 \cap W \cap U_1 \cap U_2) \geqslant 1$, a ponieważ mamy również

$$U_1 \cap W \cap U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_2 \cap W \subseteq U_2 \cap W,$$

więc $\dim(U_2 \cap W) \geqslant 1$. Stąd $U_2 \in \mathcal{H}(W)$. $\square$

Stwierdzenie 2.6. *Niech W będzie podprzestrzenią kowymiaru k w V.*

(i) *Jeśli $k = 1$ lub $k = n-1$, czyli gdy $\mathbf{P}_k(V)$ jest przestrzenią rzutową, to $\mathcal{H}(W)$ jest kolczatą hiperpłaszczyzną w $\mathbf{P}_k(V)$.*

(ii) *Jeśli $2 \leqslant k \leqslant n-2$, czyli gdy $\mathbf{P}_k(V)$ nie jest przestrzenią rzutową, to hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}(W)$ nigdy nie jest kolczata w $\mathbf{P}_k(V)$.*

Dowód. Ad. (i). Gdy $\mathbf{P}_k(V)$ jest przestrzenią rzutową to każdy punkt na hiperpłaszczyźnie jest współliniowy z każdym punktem poza nią.

Ad. (ii). Weźmy $U_1 \in \mathrm{Sub}_k(V)$ takie, że $\dim(U_1 \cap W) \geqslant 2$. Pozwalają nam na to przyjęte założenia o k. Z lematu 2.5 $\mathcal{H}(W)$ nie może być kolczate. $\square$

Wniosek 2.7. *Gdy F jest ciałem, to nie wszystkie hiperpłaszczyzny są kolczate, bo z 2.6 wynika,że hiperpłaszyzny postaci $\mathcal{H}(W)$ nie są kolczate.*

Stwierdzenie 2.8. *Niech W będzie podprzestrzenią kowymiaru k w V.*

(i) *Jeśli $k = 1$ lub $k = n-1$, czyli gdy $\mathbf{P}_k(V)$ jest przestrzenią rzutową, to $\mathcal{H}(W)$ jest łuskowatą hiperpłaszczyzną w $\mathbf{P}_k(V)$.*

(ii) *Jeśli $2 \leqslant k \leqslant n-2$, czyli gdy $\mathbf{P}_k(V)$ nie jest przestrzenią rzutową, to hiperpłaszczyzna $\mathcal{H}(W)$ nigdy nie jest łuskowata w $\mathbf{P}_k(V)$.*

Dowód. Ad. (i). Gdy $\mathbf{P}_k(V)$ jest przestrzenią rzutową to każdą prostą na hiperpłaszczyźnie możemy rozszerzyć do płaszczyzny zawierającej punkt spoza tej hiperpłaszczyzny.

Ad. (ii). Weźmy U_1 takie, że $\dim(U_1 \cap W) \geqslant 2$. Wówczas mamy liniowo niezależne wektory $w_1, w_2 \in U_1 \cap W_2$. Dobieramy prostą p przez U_1, taką aby $p \subseteq \mathcal{H}(W)$. Weźmy $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(U_1)$ taką, że $w_1 \in H$.
Wtedy $\dim(H \cap W) \geqslant 1$. Weźmy poza tym $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ takie, że $U_2 \subseteq B$. Mamy prostą $p = \mathbf{p}(H, B)$, na której leży punkt U_1. Ponieważ $\dim(H \cap W) \geqslant 1$, to dla $U \in p$ mamy $\dim(U \cap W) \geqslant 1$, co oznacza, że $p \subseteq \mathcal{H}(W)$. Z lematu 2.5 wszystkie punkty współliniowe z U_1 leżą na hiperpłaszczyźnie $\mathcal{H}(W)$. Zatem $\mathcal{H}(W)$ w tym wypadku nie może być łuskowata zgodnie z definicją 1.10. $\square$

2.2 Hiperpłaszczyzny analityczne

Rozważmy teraz sytuację, gdy F jest ciałem charakterystyki różnej od 2. Dla k-liniowej formy alternującej ξ określimy następujący zbiór

$$\mathcal{H}(\xi) := \Big\{U \in \mathrm{Sub}_k(V) \colon \xi(u_1, \ldots, u_k) = 0 \text{ dla } u_1, \ldots, u_k \in U\Big\}, \tag{2.2}$$

czyli zbiór tych k-wymiarowych podprzestrzeni V, które są ubijane przez formę ξ.

Stwierdzenie 2.9. *Jeśli ξ jest niezerową alternującą formą k-liniową, to $\mathcal{H}(\xi)$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathbf{P}_k(V)$.*

Dowód. Trzeba na początku sprawdzić, czy $\mathcal{H}(\xi)$ jest podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$. Weźmy w tym celu prostą p z $\mathbf{P}_k(V)$ taką, że $|p \cap \mathcal{H}(\xi)| \geqslant 2$. Zatem na p są (przynajmniej) dwa różne punkty U_1, U_2, które jednocześnie leżą na $\mathcal{H}(\xi)$. Z lematu 1.27 mamy $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$, $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ oraz wektory $w_1, w_2 \in V$ takie, że

$$p = \mathbf{p}(H, B), \quad U_i = H \oplus \langle w_i \rangle,\ i = 1, 2 \quad \text{oraz} \quad B = H \oplus \langle w_1, w_2 \rangle.$$

Niech wektory $u_1, \ldots, u_{k-1}$ będą bazą H, to znaczy

$$H = \langle u_1, \ldots, u_{k-1} \rangle.$$

Można teraz napisać, że

$$U_i = \langle u_1, \ldots, u_{k-1}, w_i \rangle, \text{ gdzie } i = 1, 2.$$

Ponieważ $U_1, U_2 \in \mathcal{H}(\xi)$, więc

$$\xi(u_1, \ldots, u_{k-1}, w_i) = 0, \text{ dla } i = 1, 2. \tag{2.3}$$

Wybierzmy teraz dowolny punkt $U \in p$. Z lematu 1.27 mamy

$$U = H \oplus \langle \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle = \langle u_1, \ldots, u_{k-1}, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle.$$

Innymi słowy układ $u_1, \ldots, u_{k-1}, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ jest bazą U. Policzmy wartość ξ na tej bazie pamiętając o (2.3):

$$\xi(u_1, \ldots, u_{k-1}, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \\ \alpha_1 \xi(u_1, \ldots, u_{k-1}, w_1) + \alpha_2 \xi(u_1, \ldots, u_{k-1}, w_2) = 0$$

To już oznacza, że $U \in \mathcal{H}(\xi)$. Z dowolności wyboru U mamy $p \subseteq \mathcal{H}(\xi)$. Tak więc $\mathcal{H}(\xi)$ jest podprzestrzenią $\mathbf{P}_k(V)$.

Forma ξ jest niezerowa, więc musi istnieć punkt $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$, którego forma ξ nie ubija. Tak więc nasza podprzestrzeń $\mathcal{H}(\xi)$ jest właściwa.

Teraz sprawdzimy, czy każda prosta z $\mathbf{P}_k(V)$ przecina $\mathcal{H}(\xi)$. Weźmy więc prostą p w $\mathbf{P}_k(V)$. Podobnie jak wyżej mamy odpowiednie $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$ i $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ takie, że $p = \mathbf{p}(H, B)$. Ustalmy bazę dla H i B:

$$H = \langle u_1, u_2, \ldots u_{k-1} \rangle, \qquad B = \langle u_1, u_2, \ldots u_{k-1}, w_1, w_2 \rangle.$$

Przyjmujemy

$$\alpha_1 := \xi(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, w_1), \qquad \alpha_2 := \xi(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, w_2).$$

Gdy $\alpha_i = 0$ dla $i = 1$ lub 2, to odpowiadające temu skalarowi

$$U_i = \langle u_1, \ldots, u_{k-1}, w_i \rangle$$

jest szukanym punktem wspólnym prostej p oraz $\mathcal{H}(\xi)$. Gdy $\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha_2$, to liczymy

$$\xi(u_1, u_2, \ldots u_{k-1}, \alpha_2 w_1 - \alpha_1 w_2) = \\ \alpha_2 \xi(u_1, u_2, \ldots u_{k-1}, w_1) - \alpha_1 \xi(u_1, u_2, \ldots u_{k-1}, w_2) = \\ \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2 = 0.$$

i bierzemy $U := \langle u_1, u_2, \ldots u_{k-1}, \alpha_2 w_1 - \alpha_1 w_2 \rangle$. Układ k wektorów

$$u_1, u_2, \ldots u_{k-1}, \alpha_2 w_1 - \alpha_1 w_2$$

jest liniowo niezależny, więc $U \in \mathcal{H}(\xi)$. Ponadto $H \subset U \subset B$ więc $U \in p$. W ten sposób znaleźliśmy punkt wspólny prostej p i podprzestrzeni $\mathcal{H}(\xi)$. Z dowolności wyboru p i definicji 1.4 podprzestrzeń $\mathcal{H}(\xi)$ jest hiperpłaszczyzną. □

W pracy [6] udowodnione jest, że każda hiperpłaszczyzna w $\mathbf{P}_k(V)$, jest takiej właśnie postaci.

Twierdzenie 2.10 ([6]). *Jeśli F jest ciałem i $\mathcal{H}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathbf{P}_k(V)$, to $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\xi)$, dla pewnej alternującej formy k-liniowej ξ na V.*

Zauważmy, że przy założeniu nieparzystej charakterystyki ciała F dwuliniowa forma symplektyczna na V jest alternująca i na odwrót. Ponadto gdy mamy symplektyczną formę dwuliniową ξ na V, to $\mathcal{H}(\xi) = Q_2(\xi)$. Przyjrzymy się teraz dokładniej klasycznemu przykładowi hiperpłaszczyzny zadanej symplektyczną formą dwuliniową, czyli przy $k = 2$. Potrzebujemy do tego jeden lemat.

Lemat 2.11. *Niech ξ będzie niezdegenerowaną, symplektyczną formą dwuliniową na V i niech $p = \mathbf{p}(H, B)$ będzie prostą w $\mathbf{P}_k(V)$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $p \subseteq Q_k(\xi)$,

(2) $|p \cap Q_k(\xi)| \geqslant 2$,

(3) $B \subseteq H^\perp$ *i* $H \perp H$.

DOWÓD. Implikacja (1) $\Longrightarrow$ (2) jest trywialna.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Weźmy dwie różne k-wymiarowe podprzestrzenie izotropowe U_1 i U_2 w k-pęku p. Z faktu, że wszystkie podprzestrzenie przestrzeni izotropowej, są izotropowe, oraz tego, że $H \subseteq U_i$, mamy $H \perp H$. Ponieważ $U_i \subseteq U_i^\perp \subseteq H^\perp$, z faktu 1.37 mamy $B = U_1 + U_2 \subseteq H^\perp$.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Niech $U \in p$. Punkt U ma postać $U = H \otimes \langle w \rangle$ dla pewnego $w \in B$ i $w \notin H$. Z założenia mamy $\langle w \rangle \subseteq H^\perp$ i $H \subseteq H^\perp$. Dalej mamy $\langle w \rangle \subseteq \langle w \rangle^\perp$, bo forma ξ jest symplektyczna. Ponieważ $H \subseteq \langle w \rangle^\perp$, więc z faktu 1.37 mamy

$$U = H \otimes \langle w \rangle \subseteq H^\perp \cap \langle w \rangle^\perp = \Big(H \otimes \langle w \rangle\Big)^\perp = U^\perp.$$

□

Przykład 2.12. Gdy ξ jest niezdegenerowaną, symplektyczną formą dwuliniową na V, to $Q_2(\xi)$ jest hiperpłaszczyzną w przestrzeni $\mathbf{P}_2(V)$.

Sprawdźmy, że tak jest trochę inną metodą niż w 2.9. Lemat 2.11 mówi, że $Q_2(\xi)$ jest podprzestrzenią, bo jeśli dla dowolnej prostej p z $\mathbf{P}_2(V)$ mamy $|Q_2(\xi) \cap p| \geqslant 2$, to musi być $p \subseteq Q_2(\xi)$.

Musimy pokazać, że każda prosta przecina $Q_2(\xi)$ w $\mathbf{P}_2(V)$. Niech więc $p = \mathbf{p}(H, B)$ dla pewnych $H \in \mathrm{Sub}_1(V)$, $B \in \mathrm{Sub}_3(V)$, $H \subseteq B$. Wykażemy, że $p \cap Q_2(\xi) \neq \emptyset$. Zauważmy, że $H \perp H$, bo ξ to forma symplektyczna. W takim wypadku są dwie możliwości:

1. $B \subseteq H^\perp$,
2. $B \not\subseteq H^\perp$.

Ad. 1. Wtedy $p \subseteq Q_2(\xi)$ z lematu 2.11.
Ad. 2. Z równania

$$\dim(H^\perp \cap B) = \dim(H^\perp) + \dim(B) - \dim(H^\perp + B)$$

mamy

$$\dim(H^{\perp} \cap B) = (n-1) + 3 - n,$$

więc $\dim(H^{\perp} \cap B) = 2$. Z tego, że $H \subset H^{\perp} \cap B \subset B$ mamy $H^{\perp} \cap B \in p$. Przyjmijmy, że $U := H^{\perp} \cap B$. Ponieważ $H \subset U \subset B$, więc $U = \langle h, x \rangle$ dla pewnego h takiego, że $H = \langle h \rangle$. Ale ponieważ $U \subseteq H^{\perp}$, czyli $x \perp h$, więc $U \perp U$, co oznacza, że $U \in Q_2(\xi)$.
Zatem prosta p przecina $Q_2(\xi)$ w punkcie U.

Mówimy, że k-liniowa forma alternująca ξ jest niezdegenerowana, gdy każdy liniowo-niezależny układ wektorów $u_1, \dots, u_{k-1} \in V$ da się uzupełnić wektorem $u_k \in V$ w ten sposób, że $\xi(u_1, \dots, u_k) \neq 0$. Zwróćmy uwagę, że ta definicja niezdegenerowania pokrywa się z wcześniejszą przy $k = 2$.

Twierdzenie 2.13. *Jeśli alternująca forma k-liniowa ξ na V jest niezdegenerowana, to $\mathcal{H}(\xi)$ jest łuskowatą hiperpłaszczyzną w $\mathbf{P}_k(V)$.*

DOWÓD. Weźmy prostą $p = \mathbf{p}(H, B)$ w $\mathbf{P}_k(V)$ taką, że $p \subseteq \mathcal{H}(\xi)$.
Mamy

$$H = \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle$$

dla pewnych $u_1, \dots, u_{k-1} \in V$. Wtedy

$$B = H \otimes \langle w_1, w_2 \rangle$$

dla pewnych liniowo niezależnych $w_1, w_2 \in V$. Niech

$$U_1 := H \otimes \langle w_1 \rangle \qquad \text{i} \qquad U_2 := H \otimes \langle w_2 \rangle.$$

Zatem $U_1, U_2 \in \mathcal{H}(\xi)$. Wiemy, że $\xi(u_1, \dots, u_{k-1}, w_j) = 0$ dla $j = 1, 2$, ponieważ $U_1, U_2 \in \mathcal{H}(\xi)$. Z założenia nasza forma ξ jest niezdegenerowana. Istnieje zatem wektor $v \in V$ taki, że

$$\xi(u_1, \dots, u_{k-1}, v) \neq 0.$$

Gdyby układ $u_1, \dots, u_{k-1}, w_1, w_2, v$ był liniowo zależny, to

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_{k-1} u_{k-1} + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2.$$

Z lematu 1.42 i z poprzedniego równania mamy, że:

$$\begin{aligned}
&\xi(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, v) = \\
&\quad \alpha_1 \xi(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_1) \\
&\quad + \alpha_2 \xi(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_2) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \alpha_{k-1} \xi(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_{k-1}) \\
&\quad + \beta_1 \xi(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, w_1) \\
&\quad + \beta_2 \xi(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, w_2) = 0.
\end{aligned}$$

Zatem $u_1, \dots, u_{k-1}, w_1, w_2, v$ są liniowo niezależne. Stąd

$$\dim\Big(\langle u_1, \dots, u_{k-1}, v\rangle\Big) = k.$$

Inaczej mówiąc $U := \langle u_1, \dots, u_{k-1}, v\rangle$ jest punktem spoza p, bo v jest liniowo niezależny nad B. Punkty U_1, U_2, U tworzą trójkąt typu gwiazda, bo

$$U_1 \cap U_2 \cap U = H$$

przy czym $U \notin \mathcal{H}(\xi)$, co kończy dowód. □

Przykład 2.14. Niech $V = \mathbb{R}^5$ i $k = 2$. Zakładamy, że $V = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\rangle$. Rozważmy formę dwuliniową $\xi\colon V \times V \to \mathbb{R}$, która w bazie e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 ma macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Niech

$$W = \langle e_3, e_4, e_5\rangle.$$

Podprzestrzeń W ma kowymiar 2. Weźmy $U \in \mathrm{Sub}_2(V)$ takie, że $U \cap W \neq \Theta$, czyli $U \in \mathcal{H}(W)$. Mamy wtedy $w \in U \cap W$ takie, że $w \neq \theta$ oraz

$$w = \alpha e_3 + \beta e_4 + \gamma e_5$$

dla pewnych skalarów $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Dobieramy wektor u w U tak, aby z w tworzył bazę U, to znaczy $U = \langle w, u\rangle$. Istnieją skalary $a, b, c, d, f \in \mathbb{R}$ takie, że

$$u = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 + fe_5.$$

Policzmy

$$\begin{aligned}\xi(u, w) = {} & \alpha a\xi(e_1, e_3) + \alpha b\xi(e_2, e_3) + \alpha c\xi(e_3, e_3) + \alpha d\xi(e_4, e_3) + \alpha f\xi(e_5, e_3) + \\ & + \beta a\xi(e_1, e_4) + \beta b\xi(e_2, e_4) + \beta c\xi(e_3, e_4) + \beta d\xi(e_4, e_4) + \beta f\xi(e_5, e_4) + \\ & + \gamma a\xi(e_1, e_5) + \gamma b\xi(e_2, e_5) + \gamma c\xi(e_3, e_5) + \gamma d\xi(e_4, e_5) + \gamma f\xi(e_5, e_5) \\ & = 0.\end{aligned}$$

Skoro forma ξ zeruje się na bazie U, to forma ξ ubija U, czyli $U \in \mathcal{H}(\xi)$. Z dowolności wyboru U mamy

$$\mathcal{H}(W) \subseteq \mathcal{H}(\xi).$$

Ten przykład sugeruje następujący ogólny fakt.

Stwierdzenie 2.15. *Niech ξ będzie alternująca formą k-liniową na V. Jeśli $\dim(\mathrm{Rad}(\xi)) = n - k$, to $\mathcal{H}(\mathrm{Rad}(\xi)) = \mathcal{H}(\xi)$.*

Dowód. $\subseteq$: Niech $U \in \mathcal{H}(\mathrm{Rad}(\xi))$. Ze wzoru (2.1) mamy $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$ oraz $U \cap \mathrm{Rad}(\xi) \neq \Theta$. Zatem istnieje niezerowy wektor $w \in U \cap \mathrm{Rad}(\xi)$. Z kolei z (1.17) wiemy, że

$$\text{dla dowolnych } v_1, v_2, \ldots, v_{k-1} \in V \text{ zachodzi } \xi(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, w) = 0.$$

Wektor w możemy uzupełnić do bazy podprzestrzeni U. Niech więc

$$U = \langle u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, w \rangle.$$

Zobaczmy, że $\xi(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, w) = 0$. To oznacza, że forma ξ ubija podprzestrzeń U, czyli $U \in \mathcal{H}(\xi)$ z (2.2).

$\supseteq$: Niech teraz $U \in \mathcal{H}(\xi)$. Na podstawie (2.2) wiemy, że $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$ oraz

$$\xi(u_1, u_2, \ldots, u_k) = 0 \text{ dla dowolnych } u_1, u_2, \ldots, u_k \in U. \tag{2.4}$$

Mamy pokazać, że $U \cap \mathrm{Rad}(\xi) \neq \Theta$, aby uzyskać $U \in \mathcal{H}(\mathrm{Rad}(\xi))$. Przypuśćmy niewprost, że $U \cap \mathrm{Rad}(\xi) = \Theta$. To oznacza, że

$$V = U \oplus \mathrm{Rad}(\xi), \tag{2.5}$$

bo $\dim(U) = k$ i $\dim(\mathrm{Rad}(\xi)) = n - k$. Weźmy punkt Y spoza hiperpłaszczyzny $\mathcal{H}(\xi)$. Jako k-podprzestrzeń Y ma jakąś bazę, czyli

$$Y = \langle y_1, y_2, \ldots, y_k \rangle.$$

Z (2.5) mamy

$$y_i = u_i + w_i, \text{ dla pewnych } u_i \in U, w_i \in \mathrm{Rad}(\xi), \text{ gdzie } i = 1, \ldots, k.$$

Policzmy pamiętając o własności wektorów z radykału $\mathrm{Rad}(\xi)$:

$$\begin{aligned}
&\xi(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \\
&\quad = \xi(u_1 + w_1, y_2, \ldots, y_k) = \xi(u_1, y_2, \ldots, y_k) + \xi(w_1, y_2, \ldots, y_k) = \\
&\quad = \xi(u_1, y_2, \ldots, y_k) + 0 = \xi(u_1, u_2, y_3, \ldots, y_k) + \xi(u_1, w_2, y_3, \ldots, y_k) = \\
&= \xi(u_1, u_2, y_3, \ldots, y_k) + 0 = \xi(u_1, u_2, u_3, y_4, \ldots, y_k) + \xi(u_1, u_2, w_3, y_4, \ldots, y_k) = \\
&\qquad \cdots = \xi(u_1, u_2, \ldots, u_k) = 0.
\end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z (2.4). To by oznaczało, że forma ξ ubija Y, ale Y jest spoza $\mathcal{H}(\xi)$ i mamy sprzeczność. □

Rozdział 3

Produkt Segre przestrzeni Grassmanna

W tym rozdziale przejrzymy się kilku klasom hiperpłaszczyzn jakie mamy w produkcie Segre $\mathfrak{M}$ dwóch przestrzeni Grassmanna. Można by znaleźć różna kryteria do klasyfikowania hiperpłaszczyzn w $\mathfrak{M}$, ale my kierujemy się możliowściami odtworzenia wyjściowej przestrzeni $\mathfrak{M}$ z tego co zostaje po usunięciu ustalonej hiperpłaszczyzny $\mathcal{H}$ w $\mathfrak{M}$ (to co zostaje to uzupełnianie hiperpłaszczyzny $\mathcal{H}$ do całego $\mathfrak{M}$). W procedurze odzyskiwania podstawową rolę pełnią hiperpłaszczyzny łuskowate i kolczate, a co za tym idzie niezdegenerowane.

3.1 Hiperpłaszczyzny niezdegenerowane

Przykład 3.1. Niech $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{k_1,k_2}(V) = \mathbf{P}_{k_1}(V) \times \mathbf{P}_{k_2}(V)$, gdzie $\mathbf{P}_{k_i}(V)$ jest przestrzenią Grassmanna, $i = 1, 2$. Niech wymiar $\dim(V) = n < \infty$ będzie taki, że $1 < k_1 < n-1$ oraz $k_1 + k_2 = n$. Rozważamy zbiór

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{k_1,k_2}(V) = \Big\{(U_1, U_2) \in \mathrm{Sub}_{k_1}(V) \times \mathrm{Sub}_{k_2}(V) \colon U_1 \cap U_2 \neq \Theta\Big\}.$$

Sprawdzimy, czy jest on hiperpłaszczyzną niezdegenerowaną. Najpierw sprawdzimy, czy jest podprzestrzenią w $\mathfrak{M}$. Weźmy dowolną prostą l z $\mathfrak{M}$ taką, że $|l \cap \mathcal{H}| \geqslant 2$. Powiedzmy, że $l = l_1 \times \{U_2\}$, gdzie l_1 jest prostą w $\mathbf{P}_{k_1}(V)$, a U_2 jest punktem w $\mathbf{P}_{k_2}(V)$. Wówczas mamy dwa różne punkty $U, W \in l \cap \mathcal{H}$ takie, że $U = (U_1, U_2)$, $W = (W_1, W_2)$, gdzie U_1, W_1 są różnymi punktami z l_1 w $\mathbf{P}_{k_1}(V)$ oraz

$$U_1 \cap U_2 \neq \Theta \quad \text{i} \quad W_1 \cap W_2 \neq \Theta.$$

Punkt U_2 jako podprzestrzeń V jest kowymiaru k_1, a z 2.1 wiemy, że zbiór $\mathcal{H}(U_2)$ jest podprzestrzenią $\mathbf{P}_{k_1}(V)$. Zatem $l_1 \subseteq \mathcal{H}(U_2)$, czyli biorąc dowolne $U_1 \in l_1$ mamy $U_1 \cap U_2 \neq \Theta$, co oznacza, że $l \subseteq \mathcal{H}$. Dla prostych postaci $l = \{U_1\} \times l_2$, gdzie U_1 jest punktem w $\mathbf{P}_{k_1}(V)$, a l_2 prostą w $\mathbf{P}_{k_2}(V)$, dowód jest taki sam. Czyli $\mathcal{H}$ jest podprzestrzenią $\mathfrak{M}$.

Teraz sprawdźmy, czy każda prosta z $\mathfrak{M}$ przecina $\mathcal{H}$. Weźmy prostą l w $\mathfrak{M}$. Powiedzmy, że $l = l_1 \times \{U_2\}$, jak wcześniej. Szukamy $U_1 \in \mathrm{Sub}_{k_1}(V)$ takiego by $U_1 \in l_1$ oraz $U_1 \cap U_2 \neq \Theta$. Znowu z 2.1 wiemy, że każda prosta z $\mathbf{P}_{k_1}(V)$ przecina $\mathcal{H}(U_2)$, czyli w szczególności dla l_1 mamy szukany punkt U_1. Analogicznie możemy rozumować, gdy $l = \{U_1\} \times l_2$, gdzie U_1 jest punktem w $\mathbf{P}_{k_1}(V)$, a l_2 prostą w $\mathbf{P}_{k_2}(V)$. Podsumowując $\mathcal{H}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$.

Teraz uzasadnimy dlaczego $\mathcal{H}$ jest niezdegenerowana. Niech $U = (U_1, U_2)$ będzie punktem z $\mathfrak{M}$. Zobaczmy, że

$$\mathcal{H}_1^{[U]} = \Big\{D_1 \in \mathrm{Sub}_{k_1}(V) \colon D_1 \cap U_2 \neq \Theta\Big\} = \mathcal{H}(U_2) \text{ oraz} \tag{3.1}$$

$$\mathcal{H}_2^{[U]} = \Big\{D_2 \in \mathrm{Sub}_{k_2}(V) \colon U_1 \cap D_2 \neq \Theta\Big\} = \mathcal{H}(U_1). \tag{3.2}$$

Zatem z lematu 2.1 widać, że $\mathcal{H}_1^{[U]}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathbf{P}_{k_1}(V)$, a $\mathcal{H}_2^{[U]}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathbf{P}_{k_2}(V)$. Zgodnie z definicją 1.18 nasz zbiór $\mathcal{H}$ jest niezdegenerowaną hiperpłaszczyzną.

Powyższy przykład pokazuje, że w produkcie Segre przestrzeni Grassmanna istnieją hiperpłaszczyzny niezdegenerowane. Teraz pokażemy inny przykład niezdegenerowanej hiperpłaszczyzny w produkcie przestrzeni rzutowych.

Przykład 3.2. Niech V_1, V_2 będą przestrzeniami wektorowymi nad pierścieniem z dzieleniem F. Rozważamy teraz niezdegenerowaną formę półtoraliniową $\xi \colon V_1 \times V_2 \to F$ oraz zbiór

$$\mathcal{H} = \Big\{(U_1, U_2) \in \mathrm{Sub}_1(V_1) \times \mathrm{Sub}_1(V_2) \colon \xi(U_1, U_2) = 0\Big\}.$$

Sprawdzimy, czy $\mathcal{H}$ jest niezdegenerowaną hiperpłaszczyzną w produkcie Segre przestrzeni rzutowych $\mathfrak{M} = \mathbf{P}_1(V_1) \times \mathbf{P}_1(V_2)$.

Forma ξ wyznacza relację prostopadłości $\perp$ standardowo jak w poprzednim rozdziale, w sekcji 2.2. Ponieważ nasza forma ξ jest niezdegenerowana, więc dla ustalonego punktu $U = (U_1, U_2)$ w $\mathfrak{M}$ zbiory

$$\mathcal{H}_1^{[U]} = \Big\{D_1 \in \mathrm{Sub}_1(V) \colon \xi(D_1, U_2) = 0\Big\} = \mathrm{Sub}_1(U_2^{\perp}), \tag{3.3}$$

$$\mathcal{H}_2^{[U]} = \Big\{D_2 \in \mathrm{Sub}_1(V) \colon \xi(U_1, D_2) = 0\Big\} = \mathrm{Sub}_1(U_1^{\perp}). \tag{3.4}$$

są hiperpłaszczyznami odpowiednio w $\mathbf{P}_1(V_1)$ oraz $\mathbf{P}_1(V_2)$. Według 1.16 to wystarczy by twierdzić, że zbiór $\mathcal{H}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$.

W pracy [5] dowiedzione zostało mocniejsze twierdzenie, z którego wynika nasz przykład.

Twierdzenie 3.3. *Niech V_1, V_2 będą przestrzeniami wektorowymi nad pierścieniem z dzieleniem D. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathcal{H}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_{1,2}(V_1, V_2) = \mathbf{P}_1(V_1) \times \mathbf{P}_1(V_2)$.*

(2) *Istnieje forma półtoraliniowa $\xi : V_1 \times V_2 \to D$ wyznaczająca prostopadłość $\perp$ warunkiem*

$$\langle u_1\rangle \perp \langle u_2\rangle \quad \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \xi(u_1,u_2)=0$$

dla wszystkich $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$ oraz mamy

$$\mathcal{H} = \{(U_1,U_2) \in \mathrm{Sub}_1(V_1) \times \mathrm{Sub}_1(V_2)\colon U_1 \perp U_2\}.$$

Rodzinę wszystkich hiperpłaszczyzn w przestrzeni Grassmanna $\mathbf{P}_k(V)$ będziemy dalej oznaczać przez $\mathrm{Hip}_k(V)$.

Przykład 3.4. Niech $\mathfrak{M} = \mathbf{P}_{k_1}(V_1) \times \mathbf{P}_{k_2}(V_2)$, gdzie $\mathbf{P}_{k_i}(V_i)$ jest przestrzenią Grassmanna, $i = 1,2$. Rozważmy funkcje f_1 i f_2:

$$f_1\colon \mathrm{Sub}_{k_1}(V_1) \to \mathrm{Hip}_{k_2}(V_2),$$
$$f_2\colon \mathrm{Sub}_{k_2}(V_2) \to \mathrm{Hip}_{k_1}(V_1).$$

Teraz określamy taki zbiór:

$$\mathcal{H} = \Big(\bigcup_{U_1 \in \mathrm{Sub}_{k_1}(V_1)} \{U_1\} \times f_1(U_1)\Big) \cup \Big(\bigcup_{U_2 \in \mathrm{Sub}_{k_2}(V_2)} f_2(U_2) \times \{U_2\}\Big). \tag{3.5}$$

Jak widać z 1.16 nasz zbiór $\mathcal{H}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$. Taka hiperpłaszczyzna może być jednak zdegenerowana. Mając na uwadze definicję 1.18, zdegenerowana będzie wtedy, gdy znajdziemy punkt U_1, na pierwszej współrzędnej, taki, że $U_1 \in f(D_2)$ dla każdego punktu D_2 z drugiej współrzędnej, bo to oznacza, że

$$\mathcal{H}_2^{[U]} = \Big\{D_2 \in \mathrm{Sub}_{k_2}(V_2)\colon (U_1,D_2) \in \mathcal{H}\Big\} = \mathrm{Sub}_{k_2}(V_2),$$

gdzie $U = (U_1,U_2)$, U_2 dowolne na drugiej współrzędnej. Może też być na odwrót

$$\mathcal{H}_1^{[U]} = \Big\{D_1 \in \mathrm{Sub}_{k_1}(V_1)\colon (D_1,U_2) \in \mathcal{H}\Big\} = \mathrm{Sub}_{k_1}(V_1).$$

Przykład 3.5. Niech $\mathfrak{M}$ jak w przykładzie 3.4. Wybierzmy w $\mathrm{Hip}_{k_i}(V_i)$, $i = 1,2$, układ hiperpłaszczyzn K_i, tak aby ich przekrój był pusty i w sumie dawały cały zbiór punktów $\mathbf{P}_{k_i}(V_i)$, to znaczy

$$\bigcap K_i = \emptyset \qquad \text{oraz} \qquad \bigcup K_i = \mathrm{Sub}_{k_i}(V_i).$$

Układ taki przypomina sympleks, to znaczy układ rozpinający, niezależny w terminologii matroidów. Trochę podobnie jak w 3.4, rozważmy dwie surjekcje:

$$f_1\colon \mathrm{Sub}_{k_1}(V_1) \to K_2,$$
$$f_2\colon \mathrm{Sub}_{k_2}(V_2) \to K_1.$$

Nasza hiperpłaszczyzna w $\mathfrak{M}$ to zbiór dany wzorem (3.5). Przy tak dobranych f_1, f_2 nasze $\mathcal{H}$ nie ma problemu opisanego w 3.4, to znaczy jest hiperpłaszczyzną niezdegenerowaną.

3.2 Hiperpłaszczyzny kolczate

Przykład 3.6. Hiperpłaszczyzna z przykładu 3.1 nie jest kolczata. Sprawdźmy, czy rzeczywiście tak jest.
Niech $U = (U_1, U_2) \in \mathcal{H}$ i przypuśćmy, że istnieje taki punkt $W = (W_1, W_2)$ w produkcie $\mathfrak{M}$ poza hiperpłaszczyzną $\mathcal{H}$, że $U \sim W$. Wtedy $U_1 \cap U_2 \neq \Theta$ oraz $W_1 \cap W_2 = \Theta$ i mamy dwa przypadki:

1. albo $U_1 = W_1$ i $U_2 \sim W_2$,
2. albo $U_2 = W_2$ i $U_1 \sim W_1$.

W pierwszym przypadku patrzymy na zbiór $\mathcal{H}_2^{[U]} = \mathcal{H}(U_1)$, a w drugim na zbiór $\mathcal{H}_1^{[U]} = \mathcal{H}(U_2)$. Widać, że odpowiednio

$$W_2 \notin \mathcal{H}(W_1) = \mathcal{H}(U_1) \ni U_2 \quad \text{oraz} \quad W_1 \notin \mathcal{H}(W_2) = \mathcal{H}(U_2) \ni U_1.$$

Przy naszych założeniach ani $\mathbf{P}_{k_1}(V)$, ani $\mathbf{P}_{k_2}(V)$ nie jest przestrzenią rzutową, więc w obu powyższych przypadkach mamy sprzeczność z 2.6(ii).

Przykład 3.7. Hiperpłaszczyzna z przykładu 3.2 jest kolczata. Wynika to z wniosku 1.22(ii).

3.3 Hiperpłaszczyzny łuskowate

Przykład 3.8. Hiperpłaszczyzna z przykładu 3.1 nie jest łuskowata dlatego, że nie jest kolczata, jak to sprawdziliśmy w przykładzie 3.6, oraz z faktu 1.12.

Przykład 3.9. Hiperpłaszczyzna z przykładu 3.2 jest łuskowata, co wynika z wniosku 1.22(i).

Bibliografia

[1] BICHARA, A., TALLINI, G. *On a characterization of Grassmann space representing the h-dimensional subspaces in a projective space*, Annals of Discrete Math. **18** (1983), 113–132.

[2] Ed. F. BUEKENHOUT, *Handbook of incidence geometry*, Elsevier 1995.

[3] HALL J. I.,SHULT E. E., *Geometric hyperplanes of non-embeddable Grassmannians*, European J. Combin. 14 (1993), 29-35.

[4] PANKOV M., *Grassmannians of classical buildings*, Algebra and Discrete Mathematics Vol. 2, World Scientific, 2010.

[5] PETELCZYC K., ŻYNEL M., *Affinization of Segre products of partial linear spaces*, to appear in Bulletin of the Iranian Mathematical Society.

[6] SHULT E. E., *Geometric hyperplanes in embeddable Grassmannians*, J. Algebra 145 (1992), 55-82.

[7] LESZCZYŃSKA J., *Produkt Segre czesciowych przestrzeni prostych, własnosci, struktura podprzestrzeni, automorfizmy*, Praca magisterska 2014.

[8] ŻYNEL M., *Rzutowania w kracie podprzestrzeni przestrzeni wektorowej*, Praca doktorska 2003.

[9] ŻYNEL M., *Correlations of spaces of pencils*, J. Appl. Logic **10** (2012), no. 2, 187-198.

[10] ŻYNEL M., *Finite Grassmannian geometries*, Demonstratio Math. **34** (2001), no. 1, 145-160.