POLITECHNIKA WARSZAWSKA
WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Mariusz Żynel

Rzutowania w kracie podprzestrzeni przestrzeni wektorowej

Praca doktorska

Promotor
dr. hab. Krzysztof Prażmowski

Warszawa 2003

Spis treści

Wstęp

Przedmiotem rozprawy są zagadnienia związane z własnościami rzutów w kracie podprzestrzeni przestrzeni wektorowej. Zgodnie z intuicją oraz przyjmowanymi w literaturze konwencjami (por. [9], [4], [3]), rzuty to specyficznej postaci odwzorowania (pewne "lokalne izomorfizmy") między podprzestrzeniami rozważanych struktur. Geometria sugeruje z jednej strony, że rzutowane podprzestrzenie muszą należeć do "pęku podprzestrzeni", co przyjmuję jako warunek konieczny, z drugiej natomiast, że przy rzucie "punkt" i jego "obraz" powinny być w jakimś sensie "współliniowe", a wszystkie "proste" łączące punkty z obrazami powinny zbiegać się w pewnym "środku rzutu". Wymienione kryteria nadają ostateczny kształt zasadniczemu pojęciu rozprawy, a mianowicie rzutowi w kracie, traktowanemu jako odwzorowanie między odcinkami kraty.

W rozdziale 1 analizuję pojęcie rzutu w kracie wszystkich podprzestrzeni przestrzeni wektorowej. Rozważania rozpoczynam od zdefiniowania kluczowych dla rozprawy pojęć: sąsiedniości elementów kraty i prostej w kracie (definicja 1.8, str. 6), oraz pęku odcinków kraty (definicja 1.30, str. 16). Przyjęte przeze mnie pojęcie pęku odcinków obejmuje pęki wierzchołkowe, zwane pękami właściwymi, jak również pęki wprowadzone w [4], zwane tutaj waflami. Oba rodzaje pęków charakteryzuję dwoma warunkami, wyrażonymi w terminach współliniowości elementów kraty i przecinania odcinka przez prostą (twierdzenie 1.48, str. 26).

Drobiazgowa analiza własności pęków odcinków pozwoliła mi zdefiniować rzut z prostej na pęk (tzw. perspektywę, definicja 1.58, str. 31) oraz rzut między elementami pęku odcinków. Pomiędzy rzutami z prostej na pęk a klasycznymi dla geometrii rzutowej perspektywami jest pewna analogia, dobrze widoczna, gdy odcinki potraktujemy jako proste, a pęk odcinków jako pęk prostych. Z pojęciem perspektywy blisko związane jest pojęcie "rozszerzania" pęków. Dowiedzione przeze mnie twierdzenie 1.66, str. 34 dostarcza kryteria na rozszerzanie pęków odcinków, natomiast twierdzenia 1.70, str. 38 oraz 1.74, str. 39 mówią w jaki sposób pęki odcinków można rozszerzać.

Dla każdego z dwu rodzajów pęków odcinków rzut określa się formalnie inaczej, ze względu na specyficzne właściwości danego rodzaju pęku. I tak dla pęków wierzchołkowych w 1.76, str. 42, zdefiniowany jest uogólniony rzut środkowy, natomiast w 1.77, str. 42, podana jest definicja drugiego rzutu – ślizgu, wyznaczonego jednoznacznie przez samą strukturę wafla. W twierdzeniu 1.81, str. 43, dowodzę, że uogólnione rzuty środkowe są złożeniami pewnych ślizgów. Z kolei z analitycznego przedstawienia ślizgu wynika, że jest on złożeniem typowych dla teorii krat półhomomorfizmów, zwanych tutaj przesunięciami kratowymi (por. [4, Roz IV.1]). Pomimo odmiennej natury pęków odcinków, na których oba rzuty są określone, zarówno uogólniony rzut środkowy jak i ślizg posiadają wiele cech wspólnych. W twierdzeniu 1.78, str. 43 dowodzę, że oba rzuty zachowują porządek kraty, co w połączeniu z faktem, że rzuty są bijekcjami daje mocną własność, a mianowicie rzuty są izomorfizmami odpowiednich podkrat kraty wyjściowej. Rozdział 1 kończy się rozważaniami o złożeniach i redukcji rzutów w kracie. W twierdzeniach 1.86, 1.87 i 1.89 na str. 48-51, uogólniam klasyczne wyniki z geometrii rzutowej, w abstrakcyjnym języku kraty.

W następnych rozdziałach dalej korzystam z aparatu teorii krat zajmując się rzutami w strukturach bardziej zbliżonych do klasycznych geometrii. W rozdziale 2 rozważam zagadnienia związane z pękami oraz rzutami dla struktury powstałej przez ograniczenie kraty wybraniem w niej elementów o tej samej wysokości k, czyli k-grasmanianu. Wybór odcinków jako dziedzin rzutów w grasmanianach znajduje dodatkowe usprawiedliwienie w fakcie 2.1, str. 54, gdyż podprzestrzenie odcinkowe, to właśnie te podprzestrzenie grasmanianu, które z dokładnością do izomorfizmu, same są pewnymi grasmanianami. Wyniki przedstawione w rozdziale drugim w dużej mierze są bezpośrednimi wnioskami z bardziej ogólnych wyników zgromadzonych w rozdziale pierwszym. Większość rezultatów rozdziału 2, uzyskanych niezależnie od ogólnej teorii z rozdziału 1, przedstawiona jest w pracy [17]. W przypadku grasmanianu, w rozdziale drugim rozprawy, skupiłem się na faktach niezbędnych, z punktu widzenia dalszej części pracy. Część prawdziwych dla grasmanianu twierdzeń, będących konsekwencją ogólniejszej teorii prezentowanej wcześniej, została pominięta, w szczególności twierdzenia o składaniu i redukcji rzutów, które dla grasmanianu $\mathbf{P}_1(V)$, czyli przestrzeni rzutowej, są wynikami klasycznymi. Szczególne przypadki rzutów, to znaczy rzuty między prostymi w grasmanianie, były badane w [11]. Z drugiej strony korzystając z wyników dotyczących rzutów w grasmanianach przedstawionych w rozdziale drugim i [17], łatwo można uzyskać pewne dalsze własności rzutów rozważanych w rozdziale poprzednim, jak na przykład fakt, że każde bijektywne obcięcie do odcinka $\mathcal{X}$ złożenia f przesunięć kratowych takiego, że $\mathcal{X}$ i $f(\mathcal{X})$ są podobne, jest złożeniem rzutów kratowych.

W ostatnim rozdziale przechodzę do charakteryzacji rzutów w przestrzeni jeżowej, inaczej mówiąc w strukturze powstałej przez wybranie z uniwersum k-grasmanianu tych elementów, które w ustalonym wymiarze przecinają ustalony element W wyjściowej kraty. Struktury takie zostały wprowadzone w [13], a związana z nimi teoria rozwijana jest w [18] i [19]. Warto może zwrócić uwagę na to, że wśród przestrzeni jeżowych są też podpółkraty będące jądrami przesunięć kratowych. Wyznaczone przez nie geometrie odpowiadają geometriom struktury liniowych uzupełnień (por. [12]), a wśród nich jest też geometria afiniczna.

Zaczynam od analizy tego jak obiekty wprowadzone wcześniej dla kraty zachowują się względem ustalonego W. W efekcie uzyskuję ważną dla dalszych rozważań, klasyfikację prostych. Otóż w kracie z ustalonym elementem mogą być dokładnie trzy typy prostych, co dowodzę w twierdzeniu 3.2, str. 62. Odcinki kraty zrelatywizowane do uniwersum przestrzeni jeżowej tworzą podstawową klasę podprzestrzeni tej przestrzeni. W odniesieniu do tych właśnie podprzestrzeni stosuję termin podprzestrzeń odcinkowa. W twierdzeniach 3.17, 3.18, 3.19 i 3.20, na str. 73-74 podaję klasyfikację podprzestrzeni odcinkowych przestrzeni jeżowej. Nie jest to jednak klasyfikacja wyczerpująca, gdyż spośród wszystkich podprzestrzeni odcinkowych wybrane zostały tylko te o jednorodnej strukturze zawartych w nich prostych. Nazywam je podprzestrzeniami rzutowymi i semi-afinicznymi. Następnie badam pęki odcinków w kracie z ustalonym elementem. Wyniki tej klasyfikacji zebrane zostały w tabelach 3.10, 3.11 oraz 3.12, na str. 85-86.

Badanie rzutów w przestrzeni jeżowej rozpoczynam od rzutów pomiędzy prostymi przestrzeni jeżowej. Przestrzeń jeżowa nie jest wprawdzie sami-afiniczną częściową przestrzenią prostych w sensie [14], ale dowiedzione przeze mnie twierdzenia 3.39, 3.41, str. 90-91 o rzutach między prostymi w przestrzeni jeżowej, uogólniają wyniki uzyskane dla semi-afinicznych częściowych przestrzeni prostych w [14]. Z drugiej strony, jak się okazuje, rozważane w tej części rzuty klasyczne (geometryczne) są szczególnymi przypadkami ogólnego pojęcia rzutu w przestrzeni jeżowej (por. 3.56, str. 97).

Rzut pomiędzy podprzestrzeniami odcinkowymi w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ definiuję jako sensowne obcięcie rzutu w kracie do uniwersum $\mathfrak{A}$. Równoważnie rzut taki można zdefiniować jako obcięcie rzutu w grasmanianie, co pozwoliło mi skorzystać z wyników rozdziału drugiego.

Zasadnicze pytanie jakie sobie stawiam w ostatnim rozdziale jest następujące: jakie warunki musi spełniać pęk odcinków w kracie z ustalonym elementem, aby rzut określony na tym pęku dawał się sensownie obciąć do rzutu w przestrzeni jeżowej. Odpowiedzią na to pytanie jest twierdzenie 3.63, str. 101. Dowodzę w nim, że na to aby rzut kratowy wyznaczał rzut w przestrzeni jeżowej potrzeba i wystarczy, aby rzut ten przekształcał "specjalny" element jednego odcinka na "specjalny" element drugiego odcinka. Ten wyróżniany w odcinku element, w podkracie związanej z odcinkiem jest odpowiednikiem ustalonego elementu W w kracie wyjściowej. Związek ten nie jest przypadkowy, gdyż jak to pokazano w [13], podprzestrzenie odcinkowe w przestrzeni jeżowej to izomorficzne obrazy pewnych przestrzeni jeżowych, a wyróżniony w odcinku element specjalny pełni taką samą rolę jak ustalony w kracie wyjściowej element W. W twierdzeniu 3.69, str. 109, charakteryzuję rzuty w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ odwołując się do związanych z $\mathfrak{A}$, a wprowadzonych w [19], przestrzeni "śladów" i "kośladów".

Interesującym jest jak kryteria na obcinanie rzutu kratowego do uniwersum przestrzeni jeżowej zmieniają się, gdy o rzutowanych podprzestrzeniach odcinkowych dodatkowo założymy, że są podprzestrzeniami afinicznymi lub rzutowymi. Stosowne warunki konieczne i dostateczne formułuję w twierdzeniu 3.77, str. 116.

Dostarczony przez przestrzenie jeżowe aparat pozwolił mi też scharakteryzować uogólnione rzuty środkowe w grasmanianie jako sumy zwykłych rzutów środkowych w pewnych przestrzeniach rzutowych (por. 3.84, str. 120).

Aparat teorio-kratowy, jakiego konsekwentnie używam w rozprawie, wydaje się być bardzo wygodny. Pozwala na czytelne formułowanie związków zachodzących w badanych obiektach, a jednocześnie umożliwia dość swobodne przechodzenie pomiędzy różnymi strukturami geometrycznymi zanurzonymi w jednej kracie. W dużej mierze te same wyniki można by prawdopodobnie uzyskać stosując inne narzędzia, jak na przykład teorię przekształceń liniowych w strukturze liniowych uzupełnień, a w przypadku grasmanianu potęgę zewnętrzną.

Rozdział 1

Krata podprzestrzeni przestrzeni wektorowej

Punktem wyjścia do rozważań różnych struktur geometrycznych w tej pracy jest krata podprzestrzeni przestrzeni wektorowej. Okazuje się bowiem, że albo znaczna część własności przysługujących tym geometriom jest w gruncie rzeczy konsekwencją własności kraty, nad którą geometria jest skonstruowana, albo zastosowanie aparatu teorio-kratowego wydatnie wspomaga badanie geometrii.

1.1 Pojęcia wstępne

Niech V będzie dowolną przestrzenią wektorową nad, niekoniecznie przemiennym, ciałem K. Przez $\mathrm{Sub}(V)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich podprzestrzeni przestrzeni V. Rozważania, które prowadzimy w tej pracy oparte są o pojęcie kraty podprzestrzeni przestrzeni V. Możliwe są dwie definicje tej kraty: jako częściowo uporządkowanego zbioru $\mathfrak{L}^{\mathrm{p}}(V) = \langle \mathrm{Sub}(V), \subseteq \rangle$, w którym określone są operacje $\inf\{U,W\}$ i $\sup\{U,W\}$ dla wszystkich $U,W \in \mathrm{Sub}(V)$, albo też, jako algebry $\mathfrak{L}^{\mathrm{a}}(V) = \langle \mathrm{Sub}(V), \cap, + \rangle$. Obie definicje są równoważne (twierdzenie prawdziwe jest dla dowolnej kraty, por. [4, Roz. I.1]) ze względu na fakt, że w $\mathfrak{L}^{\mathrm{p}}(V)$ można określić operacje $U \cap W := \inf\{U,W\}$, $U + W := \sup\{U,W\}$, oraz w $\mathfrak{L}^{\mathrm{a}}(V)$ relację porządku: $U \subseteq W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U \cap W = U$ (lub równoważnie $U + W = W$). Dalej, dla oznaczenia kraty podprzestrzeni przestrzeni V, piszemy krótko $\mathfrak{L}(V)$.

Z literatury (por. [4, Roz. IV.5]) wiadomo, że krata $\mathfrak{L}(V)$ jest arguesowską, modularną kratą geometryczną. Kraty geometryczne są to pół-modularne kraty zupełne, w których każdy element jest kresem górnym atomów oraz atomy są zwarte, natomiast kraty arguesowskie są to kraty spełniające odpowiednik (rzutowego) twierdzenia Desarguesa wyrażony w terminach teorii krat. Twierdzenie odwrotne, że arguesowska, modularna krata geometryczna L wyznacza pewną przestrzeń wektorową jest prawdziwe przy założeniu, że L jest nierozkładalna i ma długość co najmniej 3. Równoważnie, zamiast kraty $\mathfrak{L}(V)$ można rozważać kratę podprzestrzeni pewnej Desarguesowskiej przestrzeni rzutowej.

Poprzez Θ oznaczać będziemy najmniejszy element kraty $\mathfrak{L}(V)$, innymi słowy, podprzestrzeń zerową V. Mówimy, że elementy U,W są *porównywalne* w $\mathfrak{L}(V)$ jeśli $U \subseteq W$ lub $W \subseteq U$. *Łańcuch* w $\mathfrak{L}(V)$ jest to podkrata $\mathfrak{L}(V)$, w której każde dwa elementy są porównywalne. Długość łańcucha $\mathcal{C}$ to $|\mathcal{C}| - 1$.

Mówimy, że element Z jest *poprzednikiem* Y lub element Y jest *następnikiem* Z w $\mathfrak{L}(V)$, oraz piszemy odpowiednio $Z \prec Y$ lub $Y \succ Z$, gdy $Z \subseteq Y$ i nie istnieje element U taki, że $Z \subsetneq U \subsetneq Y$. Używamy też oznaczenia $Z \preceq Y$ (względnie $Y \succeq Z$), gdy $Z \prec Y$ lub $Z = Y$. Piszemy czasem również $Z \prec\!\!\prec Y$ lub $Y \succ\!\!\succ Z$, gdy $Z \subseteq Y$ i jeśli $Z \subsetneq U_1 \subseteq U_2 \subsetneq Y$, to $U_1 = U_2$. Zanotujemy kilka podstawowych faktów dotyczących bezpośredniego następstwa w kracie $\mathfrak{L}(V)$, na które często się powołujemy w rozprawie.

FAKT 1.1. (Grätzer [4, Tw. 4, Roz. IV.1]) *Niech H, U, W, B będą elementami $\mathfrak{L}(V)$. Jeśli $H \preceq U$, to $H + W \preceq U + W$. Dualnie, jeśli $U \preceq B$, to $U \cap W \preceq B \cap W$.*

Zanotujmy również prosty, aczkolwiek użyteczny wniosek z powyższego faktu:

WNIOSEK 1.2. *Niech H, U, W, B będą elementami $\mathfrak{L}(V)$. Jeśli $H \preceq U$ i $H \subseteq W$, to $W \preceq U + W$. Dualnie, jeśli $U \preceq B$ i $W \subseteq B$, to $U \cap W \preceq W$.*

LEMAT 1.3. *Niech H, U_1, U_2, B będą elementami kraty $\mathfrak{L}(V)$, takimi, że $U_1 \neq U_2$. Jeśli $H \prec U_1, U_2$, to*

(i) $U_1 \cap U_2 = H$, (ii) $U_1, U_2 \prec U_1 + U_2$.

Jeśli $U_1, U_2 \prec B$, to

(iii) $U_1 + U_2 = B$, (iv) $U_1 \cap U_2 \prec U_1, U_2$.

DOWÓD. Załóżmy, że $H \prec U_1, U_2$.

(i) Ponieważ, $H \prec U_1$, to na mocy 1.1 mamy $H \cap U_2 \preceq U_1 \cap U_2$, a więc $H \preceq U_1 \cap U_2$ z założenia $H \prec U_2$. Gdyby $H \neq U_1 \cap U_2$, to mielibyśmy $H \subsetneq U_1 \cap U_2 \subsetneq U_1$, co jest sprzeczne z założeniem, że $H \prec U_1$.

(ii) Z faktu, że $H \prec U_i$ na mocy 1.1 mamy $U_{3-i} = H + U_{3-i} \preceq U_1 + U_2$ dla $i = 1, 2$. Gdyby $U_i = U_1 + U_2$ dla $i = 1$ lub $i = 2$ to U_1, U_2 musiałyby być porównywalne, co przeczy posiadaniu przez nie wspólnego poprzednika H.

Teraz zakładamy, że $U_1, U_2 \prec B$. (iii) i (iv) dowodzi się dualnie do, odpowiednio, (i) i (ii). □

Z powyższego lematu wynika, że

WNIOSEK 1.4. *Jeśli dwa różne elementy kraty $\mathfrak{L}(V)$ posiadają wspólny poprzednik, to posiadają również wspólny następnik i odwrotnie.*

FAKT 1.5. *Jeśli $Z \subsetneq Y$, to istnieją H, B, takie, że $Z \prec H \subseteq Y$ i $Z \subseteq B \prec Y$.*

FAKT 1.6. *Jeśli $Z \prec\!\!\prec Y$ oraz $Z \prec U \subseteq Y$ lub $Z \subseteq U \prec Y$, to $Z \prec U \prec Y$.*

LEMAT 1.7. *Jeśli $U \preceq B_0 \subsetneq Y$, to istnieje B, takie, że $U \prec B \subseteq Y$ i $B_0 \subseteq B$. Dualnie, jeśli $Z \subsetneq H_0 \preceq U$, to istnieje H, takie, że $Z \subseteq H \prec U$ i $H \subseteq H_0$.*

DOWÓD. Możliwe są dwa przypadki: $U \prec B_0$ lub $U = B_0$. W pierwszym bierzemy $B = B_0$. W drugim przypadku mamy $U \subsetneq Y$, więc na mocy 1.5, istnieje B takie, że $U \prec B \subseteq Y$, a stąd mamy już $B_0 = U \subseteq B$.

Dla $Z \subsetneq H_0 \preceq U$ dowód biegnie dualnie. □

Definicja 1.8. Elementy U, W w kracie $\mathfrak{L}(V)$ są *sąsiednie*, co zapisujemy $U \sim W$, gdy posiadają wspólny poprzednik lub następnik. Dla sąsiednich i różnych U, W definiujemy *prostą* przez U, W jako zbiór

$$\overline{U, W} := \{X \in \mathrm{Sub}(V) \colon U \cap W \prec X \prec U + W\}. \tag{1.1}$$

Przyjmujemy, że $\overline{U, U} = \{U\}$.

Lemat 1.3 mówi, że poprzednik i następnik sąsiednich i różnych elementów kraty $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczone są jednoznacznie, odpowiednio przez kres dolny i górny. Zauważmy, że w przypadku sąsiednich i różnych U, W mamy $U \cap W \prec\!\!\prec U + W$.

Następny lemat mówi o tym, że wierzchołki niezdegenerowanego trójkąta utworzonego z elementów kraty $\mathfrak{L}(V)$ mają wspólny poprzednik lub następnik.

Lemat 1.9. *Jeśli U_1, U_2, U_3 są parami sąsiednimi elementami $\mathfrak{L}(V)$, to posiadają one albo wspólny poprzednik, albo następnik.*

Dowód. Zauważmy, że gdy którekolwiek dwa elementy spośród U_1, U_2, U_3 są sobie równe, to z założenia wynika, że istnieje żądany wspólny poprzednik lub następnik. Możemy więc przyjąć, że U_1, U_2, U_3 są parami różne. Z 1.3 i 1.4 mamy zatem

$$U_i \cap U_j \prec U_i, U_j \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 3. \tag{1.2}$$

Oznaczmy $Z := U_1 \cap U_2 \cap U_3$ oraz $H_1 = U_2 \cap U_3$, $H_2 = U_1 \cap U_3$, $H_3 = U_1 \cap U_2$. W przypadku, gdy $H_i = H_j$ dla pewnych $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, to mamy wspólny poprzednik i dowód jest zakończony.

Rozważmy więc przypadek gdy H_1, H_2, H_3 są parami różne. Z (1.2) element U_{6-i-j} jest wspólnym następnikiem pary H_i, H_j dla $1 \leqslant i < j \leqslant 3$. Z 1.3 każda taka para H_i, H_j posiada również wspólny poprzednik

$$Z := H_i \cap H_j = U_1 \cap U_2 \cap U_3.$$

Zauważmy, że Z jest wspólnym poprzednikiem H_1, H_2, H_3.

Możemy zatem przyjąć, że $H_i = Z \oplus \langle u_i \rangle$, gdzie $u_i \in H_i \setminus Z$, $i = 1, 2, 3$. Ponieważ H_i są parami różne, to u_i są parami liniowo niezależne nad Z. Przypuśćmy, że u_3 jest liniowo zależny nad Z od u_1, u_2. Wtedy

$$U_1 = H_2 + H_3 = Z + \langle u_2, u_3 \rangle = Z + \langle u_1, u_3 \rangle = H_1 + H_3 = U_2,$$

co przeczy założeniom lematu. Otrzymujemy więc że u_i są liniowo niezależne nad Z. Ponieważ

$$U_i + U_j = Z \oplus \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 3,$$

więc U_1, U_2, U_3 mają wspólny następnik. □

Lemat 1.10. *Niech U, W będą elementami kraty $\mathfrak{L}(V)$. Jeśli $U \sim W$ i $U \subseteq W$, to $U = W$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $U \neq W$. Z definicji sąsiedniości elementów kraty $\mathfrak{L}(V)$ oraz 1.4 istnieje H takie, że $H \prec U, W$. Z 1.3(i) mamy $H = U \cap W$. Z założenia, że $U \subseteq W$ dostajemy $H = U$, co przeczy własności H. □

LEMAT 1.11. *Niech W_1, U_1, U_2 będą elementami kraty $\mathfrak{L}(V)$. Jeśli $W_1, U_1 \sim U_2$ oraz $U_1 \subseteq W_1$, to $W_1 = U_1$.*

DOWÓD. Jeśli $W_1 = U_2$, to $U_1 \sim W_1$ oraz jeśli $U_1 = U_2$, to również $U_1 \sim W_1$. W obu przypadkach zatem z 1.10 otrzymujemy $W_1 = U_1$.

Rozważmy więc sytuację, gdy $W_1 \neq U_2$ i $U_1 \neq U_2$. Ponieważ $W_1 \sim U_2$ i $U_1 \sim U_2$, więc z 1.4 zarówno W_1, U_2 posiadają wspólny następnik, jak i U_1, U_2. Z 1.3(iii) mamy zatem

$$W_1, U_2 \prec W_1 + U_2 \qquad \text{oraz} \qquad U_1, U_2 \prec U_1 + U_2. \tag{1.3}$$

Zauważmy, że $U_2 \prec W_1 + U_2, U_1 + U_2$. Z uwagi na 1.3(i) oznacza to, że albo

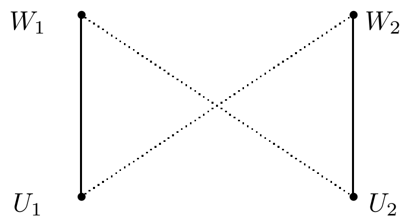
$$W_1 + U_2 = U_1 + U_2 \qquad \text{albo} \qquad U_2 = (W_1 + U_2) \cap (U_1 + U_2).$$

W pierwszym przypadku z (1.3) elementy W_1, U_1 posiadają wspólny następnik. Na podstawie 1.10, z założenia, że $U_1 \subseteq W_1$ uzyskujemy $W_1 = U_1$.

Z założeń mamy $U_1 + U_2 \subseteq W_1 + U_2$, więc w drugim przypadku $U_2 = U_1 + U_2$. Stąd $U_1 \subseteq U_2$. Ponieważ $U_1 \sim U_2$, więc z 1.10 mamy $U_1 = U_2$ i otrzymujemy sprzeczność. □

LEMAT 1.12. *Niech U_i, W_i, gdzie $i = 1, 2$, będą elementami kraty $\mathfrak{L}(V)$ takimi, że $U_1 \neq W_2$ lub $U_2 \neq W_1$. Jeśli $U_i \subseteq W_i$ oraz $U_i \sim W_{3-i}$ dla $i = 1, 2$, to $W_1 = U_1$ i $W_2 = U_2$.*

DOWÓD. Przypuśćmy, że $W_i = U_{3-i}$ dla $i = 1$ lub $i = 2$. Wtedy $U_i \subseteq W_{3-i}$. Z faktu, że $U_i \sim W_{3-i}$ oraz 1.10, otrzymujemy $U_i = W_{3-i}$, co przeczy założeniom. Możemy zatem założyć dalej, że $U_1 \neq W_2$ i $U_2 \neq W_1$.



Rysunek 1.1

Ponieważ $W_1 \sim U_2$, więc z 1.3 mamy $W_1 \cap U_2 \prec W_1$. Stąd i z 1.1

$$U_1 \cap U_2 = U_1 \cap W_1 \cap U_2 \preceq W_1 \cap U_1 = U_1.$$

Gdyby $U_1 \cap U_2 = U_1$, to mielibyśmy $U_1 \subseteq U_2$, a stąd $U_1 \subseteq W_2$. Ponieważ jednak mamy $U_1 \sim W_2$, więc z 1.10 dostalibyśmy równość $U_1 = W_2$, która przeczy naszym założeniom. Zatem $U_1 \cap U_2 \prec U_1$.

Rozumując analogicznie można wykazać, że $U_1 \cap U_2 \prec U_2$, co w konsekwencji daje $U_1 \sim U_2$.

Na mocy 1.11 zastosowanego dla W_1, U_1, U_2 otrzymamy $U_1 = W_1$, natomiast dla U_1, U_2, W_2 dostaniemy $U_2 = W_2$. □

1.2 Odcinki kraty

Odcinkiem (domkniętym) kraty $\mathfrak{L}(V)$ nazywamy zbiór postaci

$$[Z, Y] := \{U \in \mathrm{Sub}(V) \colon Z \subseteq U \subseteq Y\}. \tag{1.4}$$

Każdemu odcinkowi $\mathcal{X} = [Z, Y]$ przyporządkowujemy jego *długość* $l(\mathcal{X})$ w następujący sposób: $l(\mathcal{X})$ jest to długość maksymalnego łańcucha zawartego w $\mathcal{X}$, o ile istnieje taki łańcuch skończonej długości, lub $l(\mathcal{X}) = \infty$ w przeciwnym razie. Poprawność definicji usprawiedliwia fakt, że odcinki $\mathfrak{L}(V)$ są kratami modularnymi, a co za tym idzie każde dwa maksymalne łańcuchy w $\mathcal{X}$ mają tę samą długość (por. [4, Roz. IV.2]). *Wysokość* elementu U w kracie $\mathfrak{L}(V)$, oznaczana przez $h(U)$, to długość odcinka $[\Theta, U]$. Zauważmy, że $\dim U = h(U)$, natomiast $\operatorname{codim} U$ to długość odcinka $[U, V]$. Dla odcinka $\mathcal{X} = [Z, Y]$ mamy $l(\mathcal{X}) = \dim Y/Z$, jeśli tylko $Z \subseteq Y$.

W rozprawie rozważamy także *odcinki otwarte*, tzn. zbiory

$$]Z, Y[:= \{U \in \mathrm{Sub}(V) \colon Z \subsetneq U \subsetneq Y\}, \tag{1.5}$$

odcinki półotwarte

$$]Z, Y] := \{U \in \mathrm{Sub}(V) \colon Z \subsetneq U \subseteq Y\}, \quad [Z, Y[:= \{U \in \mathrm{Sub}(V) \colon Z \subseteq U \subsetneq Y\}, \tag{1.6}$$

a także *k-odcinki*

$$[Z, Y]_k := \{U \in \mathrm{Sub}_k(V) \colon Z \subseteq U \subseteq Y\}, \tag{1.7}$$

gdzie $\mathrm{Sub}_k(V)$ to zbiór wszystkich elementów o wysokości k w kracie $\mathfrak{L}(V)$.

Mówimy, że odcinek domknięty, półotwarty, otwarty lub k-odcinek jest *niezdegenerowany* jeśli zawiera co najmniej dwa różne elementy. Zauważmy, że niepusty odcinek domknięty lub otwarty jest niezdegenerowany. Odcinek nazywamy *nietrywialnym* jeśli zawiera co najmniej trzy różne elementy. Niezdegenerowane odcinki otwarte, półotwarte i k-odcinki są nietrywialne.

Fakt 1.13. *Niech Z, Y będą elementami kraty $\mathfrak{L}(V)$. Jeśli $\mathcal{X} = [Z, Y]$ jest niezdegenerowanym odcinkiem, domkniętym, otwartym, półotwartym lub k-odcinkiem, o wierzchołku Z i podstawie Y, to*

$$\bigcap \mathcal{X} = Z \qquad i \qquad \bigcup \mathcal{X} = Y.$$

Tak więc odcinki w kracie $\mathfrak{L}(V)$ jednoznacznie wyznaczają swoje końce. Koniec Z odcinka nazywamy *wierzchołkiem*, natomiast koniec Y – *podstawą*. Możemy więc utożsamiać niepusty odcinek $[Z, Y]$ z parą (Z, Y) lub *ułamkiem* Y/Z rozważanym w [4, Roz. III.1].

Odcinki domknięte są przykładami wypukłych podkrat kraty $\mathfrak{L}(V)$, natomiast odcinki półotwarte i otwarte są wypukłymi zbiorami w $\mathfrak{L}(V)$ (por. [4, Roz. I.3]). Własność tę wykorzystuje poniższe twierdzenie.

Stwierdzenie 1.14. *Niech $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$, $i = 1, 2$ będą odcinkami kraty $\mathfrak{L}(V)$.*

(i) $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = [Z_1 + Z_2, Y_1 \cap Y_2]$,

(ii) $\langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle = [Z_1 \cap Z_2, Y_1 + Y_2]$,

gdzie $\langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle$ jest najmniejszym odcinkiem domkniętym zawierającym $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$.

Dowód. (i) $\subseteq$: Wystarczy zauważyć, że dla każdego $U \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ spełnione są inkluzje $Z_1, Z_2 \subseteq U \subseteq Y_1, Y_2$, czyli $Z_1 + Z_2 \subseteq U \subseteq Y_1 \cap Y_2$.

$\supseteq$: Niech $U \in [Z_1 + Z_2, Y_1 \cap Y_2]$. Wtedy $Z_1, Z_2 \subseteq U \subseteq Y_1, Y_2$, czyli $U \in \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$.

(ii) Niech $\mathcal{X}$ będzie dowolnym odcinkiem domkniętym zawierającym $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$. Wówczas $Z_1, Z_2 \in \mathcal{X}$ i $Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}$, a ponieważ $\mathcal{X}$ jest podkratą to $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{X}$ i $Y_1 + Y_2 \in \mathcal{X}$. Stąd $[Z_1 \cap Z_2, Y_1 + Y_2] \subseteq \mathcal{X}$, gdyż $\mathcal{X}$ jest podkratą wypukłą. $\square$

Dla wygody wprowadzamy funktor $\mathrm{Int}([Z, Y]) = \,]Z, Y[$ oraz na mocy 1.13 funktor $\mathrm{Cl}(]Z, Y[) = [Z, Y]$. Przyjmujemy, że $\mathrm{Sub}_k([Z, Y]) := [Z, Y] \cap \mathrm{Sub}_k(V) = [Z, Y]_k$.

Jeśli U, W wyznaczają prostą, to $\overline{U, W} = \,]U \cap W, U + W[$, oraz długość odcinka $[U \cap W, U + W]$ wynosi 2.

Lemat 1.15. *Niech p będzie dowolną prostą w kracie $\mathfrak{L}(V)$, wówczas*

(i) $p = \overline{U_1, U_2}$ *dla dowolnych $U_1, U_2 \in p$, takich, że $U_1 \neq U_2$,*

(ii) $p \subseteq [Z, Y]$ *wtw., gdy $p \subseteq \,]Z, Y[$,*

(iii) *jeśli $U_1, U_2 \in p \cap [Z, Y]$ i $U_1 \neq U_2$, to $p \subseteq \,]Z, Y[$.*

Dowód. (i) Niech, na mocy definicji prostej, $p = \overline{U, W}$. Ponieważ

$$U \cap W \prec U_1, U_2 \prec U + W,$$

to z 1.3(i), (iii) mamy odpowiednio $U \cap W = U_1 \cap U_2$ i $U + W = U_1 + U_2$, a wtedy

$$\overline{U, W} = \,]U \cap W, U + W[\, = \,]U_1 \cap U_2, U_1 + U_2[\, = \overline{U_1, U_2}.$$

(ii)

$\Rightarrow$: Z (i) możemy przyjąć, że $p = \overline{U_1, U_2}$ dla pewnych $U_1, U_2 \in [Z, Y]$. Weźmy $U \in p$. Ponieważ odcinek $[Z, Y]$ jest podkratą to

$$Z \subseteq U_1 \cap U_2 \prec U \prec U_1 + U_2 \subseteq Y.$$

Zatem $U \in \,]Z, Y[$.

$\Leftarrow$: Zauważmy, że $]Z, Y[\, \subset [Z, Y]$.

(iii) Z (i) mamy $p = \overline{U_1, U_2}$. Weźmy $U \in p$. Ponieważ odcinek $[Z, Y]$ jest wypukłą podkratą to

$$Z \subseteq U_1 \cap U_2 \prec U \prec U_1 + U_2 \subseteq Y,$$

co oznacza, że $U \in \,]Z, Y[$. $\square$

Lemat 1.16. *Niech p będzie prostą oraz U_1, U_2 elementami w kracie $\mathfrak{L}(V)$ takimi, że $p = \overline{U_1, U_2}$.*

(i) *Jeśli $W \subseteq U_1, U_2$, to dla każdego $U \in p$ mamy $W \subseteq U$.*

(ii) *Jeśli $U_1, U_2 \subseteq W$, to dla każdego $U \in p$ mamy $U \subseteq W$.*

Dowód. (i) Zgodnie z definicją prostej w kracie $\mathfrak{L}(V)$ mamy $p = \,]U_1 \cap U_2, U_1 + U_2[$. Dla każdego $U \in p$ zachodzi więc $U_1 \cap U_2 \subseteq U$. Z założenia natomiast wynika, że $W \subseteq U_1 \cap U_2$, zatem z przechodniości inkluzji $W \subseteq U$.

(ii) Dualnie. $\square$

Dowiedziemy teraz kilka faktów wiążących relację sąsiedniości z własnościami odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$.

LEMAT 1.17. *Niech U, W_1, W_2 będą elementami, a $\mathcal{X}$ odcinkiem $\mathfrak{L}(V)$ takimi, że $U \sim W_1, W_2$, $W_1 \neq W_2$ i $W_1, W_2 \in \mathcal{X}$. Jeśli W_1, W_2 nie są sąsiednie, to $U \in \mathcal{X}$.*

DOWÓD. Niech $\mathcal{X} = [Z, Y]$. W przypadku gdy $U = W_1$ lub W_2 dowód jest skończony. Załóżmy więc że $U \neq W_1, W_2$. Mamy wtedy

$$U \cap W_i \prec U, W_i \prec U + W_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2. \tag{1.8}$$

Gdyby $U \cap W_1 = U \cap W_2$, to z powyższego W_1, W_2 miałyby wspólny poprzednik, co przeczy założeniu, że W_1, W_2 nie są sąsiednie. Gdy natomiast $U + W_1 \neq U + W_2$, to W_1, W_2 miałyby wspólny następnik i również uzyskujemy sprzeczność. Zatem

$$U \cap W_1 \neq U \cap W_2, \quad \text{i} \quad U + W_1 \neq U + W_2. \tag{1.9}$$

Z (1.8), (1.9) i 1.3 otrzymujemy

$$(U \cap W_1) + (U \cap W_2) = U = (U + W_1) \cap (U + W_2).$$

W konsekwencji, ponieważ $Z \subseteq W_i \subseteq Y$, to $Z \subseteq U \subseteq Y$, co kończy dowód. □

LEMAT 1.18. *Niech U, W_1, W_2 będą elementami, a $\mathcal{X} = [Z, Y]$ odcinkiem $\mathfrak{L}(V)$ takimi, że $U \sim W_1, W_2$, $W_1 \neq W_2$ i $W_1, W_2 \in \mathcal{X}$. Jeśli $W_1 \sim W_2$, to $Z \subseteq U$ lub $U \subseteq Y$.*

DOWÓD. Jeśli $U = W_1$ lub $U = W_2$, to $U \in \mathcal{X}$ i teza jest natychmiastowa. Załóżmy więc, że $U \neq W_1$ i $U \neq W_2$,

Elementy U, W_1, W_2 spełniają założenia 1.9, posiadają więc wspólny poprzednik bądź następnik. Zatem z 1.3 odpowiednio

$$\text{(i)} \quad U \cap W_1 = U \cap W_2, \quad \text{lub} \quad \text{(ii)} \quad U + W_1 = U + W_2.$$

W pierwszym przypadku mamy $U \prec U + W_i$ dla $i = 1, 2$ z 1.3(ii). Zatem z 1.3(i)

$$U = (U + W_1) \cap (U + W_2),$$

natomiast z założenia, że $W_1, W_2 \in \mathcal{X}$ mamy

$$Z \subseteq W_1 \cap W_2 \subseteq (U + W_1) \cap (U + W_2),$$

co razem daje $Z \subseteq U$.

W drugim przypadku dualnie wykazuje się, że

$$U = (U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq Y.$$

□

Zgodnie z ogólna teorią, podprzestrzeń kowymiaru 1 to maksymalna, właściwa podprzestrzeń. W przypadku odcinków $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$, $i = 1, 2$ kraty $\mathfrak{L}(V)$ mówimy, że odcinek $\mathcal{X}_1$ jest *kowymiaru* 1 w odcinku $\mathcal{X}_2$ jeśli albo $Z_1 = Z_2$ i $Y_1 \prec Y_2$, albo $Z_1 \succ Z_2$ i $Y_1 = Y_2$, czyli gdy $\mathcal{X}_2$ jest maksymalnym i właściwym pododcinkiem $\mathcal{X}_1$.

Mówimy, że odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są *komplementarne* lub *uzupełniają się* względem odcinka $\mathcal{X}$ jeśli $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset$ i $\langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle = \mathcal{X}$.

Lemat 1.19. *Niech $\mathcal{X} = [Z, Y]$ będzie dowolnym odcinkiem kraty $\mathfrak{L}(V)$. Jeśli $\mathcal{Y}_1$ jest odcinkiem o wierzchołku Z lub podstawie Y, takim, że $\mathcal{Y}_1 \subsetneq \mathcal{X}$, to istnieje odcinek $\mathcal{Y}_2$ komplementarny z $\mathcal{Y}_1$ względem $\mathcal{X}$.*

Dowód. Możemy założyć, że $\mathcal{Y}_1 = [Z, Y_1]$, gdyż w drugim przypadku rozumowanie jest dualne. Ponieważ w kracie $\mathfrak{L}(V)$ istnieją względne uzupełnienia (por. [4, Tw. 4, Roz IV.3]), rozważmy uzupełnienie Y_1 w odcinku $\mathcal{X}$, czyli element Z_2 taki, że $Z_2 \cap Y_1 = Z$ i $Z_2 + Y_1 = Y$. Połóżmy $\mathcal{Y}_2 = [Z_2, Y]$. Zgodnie z 1.14(i)

$$\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = [Z + Z_2, Y_1 \cap Y] = [Z_2, Y_1].$$

Gdyby $Z_2 \subseteq Y_1$, to mielibyśmy $Y = Z_2 + Y_1 = Y_1$, co przeczy założeniom o $\mathcal{Y}_1$. Z 1.14(ii) mamy

$$\langle \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \rangle = [Z \cap Z_2, Y_1 + Y] = [Z, Y] = \mathcal{X},$$

co kończy dowód. □

Lemat 1.20. *Niech $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ będą komplementarnymi odcinkami kowymiaru 1 w odcinku $\mathcal{X} = [Z, Y]$ kraty $\mathfrak{L}(V)$.*

(i) *Jeśli $\mathcal{Y}_1 = [Z, Y_1]$, to istnieje Z_2 takie, że $Z \prec Z_2$ i Z_2 jest względnym uzupełnieniem Y_1 w odcinku $\mathcal{X}$, czyli $Z_2 \cap Y_1 = Z$ i $Z_2 + Y_1 = Y$, oraz $\mathcal{Y}_2 = [Z_2, Y]$.*

(ii) *Jeśli $\mathcal{Y}_1 = [Z_1, Y]$, to istnieje Y_2 takie, że $Y_2 \prec Y$ i Y_2 jest względnym uzupełnieniem Z_1 w odcinku $\mathcal{X}$, czyli $Z_1 \cap Y_2 = Z$ i $Z_1 + Y_2 = Y$, oraz $\mathcal{Y}_2 = [Z, Y_2]$.*

Dowód. (i) Ponieważ $\mathcal{Y}_2$ jest kowymiaru 1 w $\mathcal{X}$, więc albo $\mathcal{Y}_2 = [Z, Y_2]$ dla pewnego Y_2 takiego, że $Y_2 \prec Y$, albo $\mathcal{Y}_2 = [Z_2, Y]$ dla pewnego Z_2 takiego, że $Z \prec Z_2$. W pierwszym przypadku jednak $Z \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ i odcinki $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ nie są komplementarne. W drugim zaś musi być $Z_2 \not\subseteq Y_1$, gdyż w przeciwnym razie

$$\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = [Z_2, Y_1] \neq \emptyset$$

zgodnie z 1.14(i). Pokażemy, że Z_2 jest względnym uzupełnieniem Y_1 w odcinku $\mathcal{X}$.

Z definicji odcinka kowymiaru 1 dla $\mathcal{Y}_1$ mamy $Y_1 \prec Y$. Stąd, ponieważ $Z_2 \subseteq Y$ i $Z_2 \not\subseteq Y_1$, więc $Y_1 \cap Z_2 \prec Z_2$ z 1.2. Zatem z faktu $Z \subseteq Y_1 \cap Z_2$ wynika, że $Z = Y_1 \cap Z_2$.

Podobnie $Z \prec Z_2$, $Z \subseteq Y_1$ i $Z_2 \not\subseteq Y_1$ daje z 1.2 $Y_1 \prec Y_1 + Z_2$. Wówczas, ze względu na $Y_1 \prec Y$, inkluzja $Y_1 + Z_2 \subseteq Y$ daje równość $Y = Y_1 + Z_2$.

(ii) Rozumowanie w tym przypadku jest dualne do (i). □

Lemat 1.21. *Niech $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ będą komplementarnymi odcinkami kowymiaru 1 w odcinku $\mathcal{X}$ kraty $\mathfrak{L}(V)$.*

(i) *Dla każdego $U_1 \in \mathcal{Y}_1$ istnieje $U_2 \in \mathcal{Y}_2$ sąsiedni z U_1.*

(ii) *Każda prosta przez $U_1 \in \mathcal{Y}_1$ przecina $\mathcal{Y}_2$ w dokładnie jednym elemencie lub nie przecina $\mathcal{Y}_2$ wcale.*

Dowód. (i) Niech $\mathcal{X} = [Z, Y]$, $\mathcal{Y}_i = [Z_i, Y_i]$. Ponieważ $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ są odcinkami komplementarnymi kowymiaru 1 w $\mathcal{X}$ możemy założyć, bez utraty ogólności, że

$$Z_1 = Z \prec Z_2, \qquad Y_1 \prec Y = Y_2, \qquad Z_2 \not\subseteq Y_1. \tag{1.10}$$

Niech $U_1 \in \mathcal{Y}_1$. Nie może być $Z_2 \subseteq U_1$ gdyż jest to sprzeczne z $Z_2 \nsubseteq Y_1$. Stąd $U_1 \prec Z_2 + U_1$ z 1.2. Oznaczmy $B := Z_2 + U_1$. Zauważmy, że $B \subseteq Y_2$ ze względu na (1.10), a ponadto $Z_2 \neq B$. Weźmy U_2 taki, że $Z_2 \subseteq U_2 \prec B$. Element U_2 leży w $\mathcal{Y}_2$ i jest sąsiedni z U_1, zatem dowód jest zakończony.

(ii) Załóżmy nie wprost, że U_1, U_2, U_3 leżą na jednej prostej p oraz $U_1 \in \mathcal{Y}_1$, $U_2, U_3 \in \mathcal{Y}_2$ i U_2, U_3 są różne. Zatem $p \subseteq \mathcal{Y}_2$ z 1.15. W konsekwencji $U_1 \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$, co nie jest możliwe bo $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ są komplementarne. □

Lemat 1.22. *Niech $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ będą komplementarnymi odcinkami kowymiaru 1 w odcinku $\mathcal{E}$ kraty $\mathfrak{L}(V)$. Jeśli $\mathcal{Y}_1$ jest odcinkiem kowymiaru 1 w odcinku $\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$ i $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cap \mathcal{Y}_1$, to istnieje odcinek $\mathcal{Y}_2$ kowymiaru 1 w $\mathcal{X}$, komplementarny z $\mathcal{Y}_1$ względem $\mathcal{X}$ taki, że $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E} \cap \mathcal{Y}_2$.*

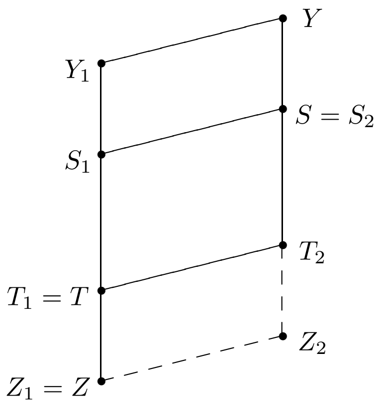
Dowód. Niech $\mathcal{E} = [T, S]$, $\mathcal{E}_i = [T_i, S_i]$, dla $i = 1, 2$, oraz $\mathcal{X} = [Z, Y]$, $\mathcal{Y}_1 = [Z_1, Y_1]$. Odcinki $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ są odcinkami komplementarnymi kowymiaru 1 w $\mathcal{X}$, przyjmijmy więc

$$T_1 = T \prec T_2, \qquad S_1 \prec S = S_2, \qquad T_2 \nsubseteq S_1. \tag{1.11}$$

Ponieważ $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cap \mathcal{Y}_1$ i $\mathcal{Y}_1$ jest kowymiaru 1 w $\mathcal{X}$, to

$$Z_1 = Z \qquad \text{i} \qquad Y_1 \prec Y, \tag{1.12}$$

gdyż w przeciwnym razie, tzn, gdy $Z \prec Z_1$ i $Y_1 = Y$, mielibyśmy $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cap \mathcal{Y}_1 = [T + Z_1, S \cap Y] = [T + Z_1, S]$, a w szczególności $S_1 = S$, co przeczy (1.11). Krata $\mathfrak{L}(V)$ jest komplementarna, rozważmy więc element Z_2 będący uzupełnieniem T w odcinku $[Z, T_2]$.



Rysunek 1.2

Wówczas

$$Z_2 \cap T = Z \qquad \text{i} \qquad Z_2 + T = T_2. \tag{1.13}$$

Weźmy $\mathcal{Y}_2 := [Z_2, Y]$. Ponieważ $T \prec T_2$ z (1.11), to z 1.1 i (1.13) mamy

$$Z = T \cap Z_2 \preceq T_2 \cap Z_2 = Z_2.$$

Gdyby $Z = Z_2$, to z (1.13) mielibyśmy $T = Z + T = T_2$, co przeczy (1.11). Tak więc $Z \prec Z_2$ i $\mathcal{Y}_2$ jest kowymiaru 1 w $\mathcal{X}$.

Aby $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ były komplementarne wystarczy sprawdzić, że $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = \emptyset$, czyli $Z_2 \nsubseteq Y_1$. Przypuśćmy, że $Z_2 \subseteq Y_1$. Wtedy

$$Y_1 = Z_2 + Y_1 = Z_2 + (T + Y_1) = (Z_2 + T) + Y_1 = T_2 + Y_1 = T_2 + S_1 + Y_1, \tag{1.14}$$

z faktu, że $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{Y}_1$ i (1.13). Ponieważ $S_1 \subseteq T_2 + S_1 \subseteq S$, to z (1.11) mamy $T_2 + S_1 = S$. Tak więc z (1.14) otrzymujemy $S \subseteq Y_1$, a stąd $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{Y}_1$, co przeczy założeniu, że $\mathcal{E} \cap \mathcal{Y}_1 = \mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}$.

Z (1.13) oraz (1.11) mamy

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{Y}_2 = [T + Z_2, S \cap Y] = [T_2, S] = \mathcal{E}_2,$$

co kończy dowód. □

LEMAT 1.23. *Jeśli $Z \prec Z_0 \subseteq Y$, $Z \subseteq Y_0 \prec Y$ oraz $Z_0 \cap Y_0 = Z$ lub $Z_0 + Y_0 = Y$, to odcinki $[Z, Y_0]$, $[Z_0, Y]$ są komplementarne, kowymiaru 1 względem odcinka $[Z, Y]$.*

DOWÓD. Niech $\mathcal{Y}_1 = [Z, Y_0]$ i $\mathcal{Y}_2 = [Z_0, Y]$. Z założenia odcinki $\mathcal{Y}_1, Y_2$ są kowymiaru 1 w odcinku $[Z, Y]$. Należy wykazać, że są one komplementarne.

W oparciu o 1.14(i) uzyskujemy

$$\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = [Z + Z_0, Y_0 \cap Y] = [Z_0, Y_0].$$

Gdyby $Z_0 \subseteq Y_0$, to $Z_0 \cap Y_0 = Z_0$ i $Z_0 + Y_0 = Y_0$, co przeczy naszym założeniom, więc $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = \emptyset$. Z 1.14(ii) mamy

$$\langle \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \rangle = [Z \cap Z_0, Y_0 + Y] = [Z, Y],$$

co kończy dowód. □

1.3 Pęki odcinków

W geometrii rozważa się pęki podprzestrzeni przestrzeni rzutowej. Tutaj badamy pęki odcinków kraty. Do określenia takiego pęku potrzebujemy pojęcia *sąsiednich odcinków.* Mówimy, że odcinki $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$, $i = 1, 2$ są sąsiednie jeśli sąsiednie są ich wierzchołki Z_1, Z_2 oraz podstawy Y_1, Y_2. Jeśli odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są różne i sąsiednie, to zbiór postaci

$$\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2} := \{[Z, Y] \colon Z \in \overline{Z_1, Z_2}, \quad Y \in \overline{Y_1, Y_2}, \quad Z \subseteq Y\} \tag{1.15}$$

nazywamy *quasi-pękiem odcinków.* Jeśli $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ jest takim quasi-pękiem, to zbiór

$$\mathrm{Int}\,\mathsf{G} := \{\mathrm{Int}\,\mathcal{X} \colon \mathcal{X} \in \mathsf{G}\} \tag{1.16}$$

nazywamy *quasi-pękiem odcinków otwartych quasi-pęku* G, natomiast dla ustalonej liczby naturalnej k, zbiór

$$\mathrm{Sub}_k(\mathsf{G}) := \{\mathrm{Sub}_k(\mathcal{X}) \colon \mathcal{X} \in \mathsf{G}\}. \tag{1.17}$$

nazywamy *quasi-pękiem k-odcinków quasi-pęku* G.

W dalszej części pracy rozważamy nietrywialne, domknięte odcinki $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$, $i = 1, 2, \cdots$, oraz stosujemy następujące oznaczenia:

$$Z' = Z_1 \cap Z_2, \quad Z'' = Z_1 + Z_2, \quad Y' = Y_1 \cap Y_2, \quad Y'' = Y_1 + Y_2, \tag{1.18}$$

$$\mathcal{X}' = \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = [Z'', Y'], \qquad \mathcal{X}'' = \langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle = [Z', Y'']. \tag{1.19}$$

Rozważając quasi-pęki zakładamy, że są one niepuste.

LEMAT 1.24. *Niech* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *będzie dowolnym quasi-pękiem odcinków i* $\mathcal{X}$ *odcinkiem kraty* $\mathfrak{L}(V)$*. Jeśli* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \subseteq \mathcal{X}$*, to wszystkie elementy* G *zawarte są w* $\mathcal{X}$*.*

DOWÓD. Zauważmy, że $Z' = Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{X}$ oraz $Y'' = Y_1 + Y_2 \in \mathcal{X}$, gdyż $\mathcal{X}$ jest podkratą. Ponieważ $\mathcal{X}$ jest podkratą wypukłą oraz dla każdego odcinka $[Z, Y] \in \mathsf{G}$ zachodzi $Z' \subseteq Z$ i $Y \subseteq Y''$, to $[Z, Y] \subseteq \mathcal{X}$. □

LEMAT 1.25. *Jeśli odcinki* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *są sąsiednie i* $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$*, to* $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$*.*

DOWÓD. Ponieważ $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są sąsiednie, więc $Z_1 \sim Z_2$ i $Y_1 \sim Y_2$. Natomiast z założenia $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$ wynika, że $Z_2 \subseteq Z_1$ i $Y_1 \subseteq Y_2$. Stosując 1.10 dla par Z_1, Z_2 i Y_1, Y_2, otrzymujemy odpowiednio $Z_1 = Z_2$ i $Y_1 = Y_2$. □

LEMAT 1.26. *Niech* G *będzie dowolnym quasi-pękiem odcinków. Jeśli* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *są odcinkami takimi, że* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$*, to* $\bigcap \mathsf{G} = \mathcal{X}'$*.*

DOWÓD. Niech $U \in \bigcap \mathsf{G}$. W szczególności $U \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}'$.

Na odwrót, niech $U \in \mathcal{X}'$, czyli $Z'' \subseteq U \subseteq Y'$. Weźmy dowolny $\mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$. Ponieważ $Z_3 \subseteq Z''$ i $Y' \subseteq Y_3$, to mamy $U \in \mathcal{X}_3$. □

Niech

$$\Sigma := \{[Z, Y] \colon Z \subseteq Y,\ Z, Y \in \mathrm{Sub}(V)\} \tag{1.20}$$

będzie rodziną wszystkich domkniętych odcinków kraty $\mathfrak{L}(V)$. Przez $\mathrm{Sub}(\Sigma)$ oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru Σ. Określamy operację

$$\boxtimes \colon \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathrm{Sub}(\Sigma)$$

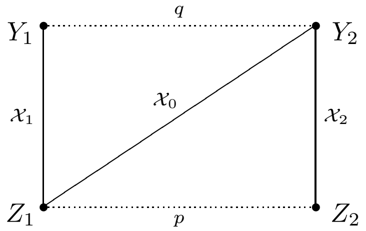
w następujący sposób: niech $\mathcal{Z}, \mathcal{Y} \in \Sigma$ wówczas

$$\mathcal{Z} \boxtimes \mathcal{Y} = \{[Z, Y] \in \Sigma \colon Z \in \mathcal{Z}, Y \in \mathcal{Y}\}. \tag{1.21}$$

Operację $\boxtimes$ można rozszerzyć dopuszczając odcinki otwarte w miejscu odcinków $\mathcal{Z}, \mathcal{Y}$. Jeśli p, q są prostymi w kracie $\mathfrak{L}(V)$, względnie p albo q jest singletonem elementu kraty $\mathfrak{L}(V)$, to $p \boxtimes q$ jest quasi-pękiem. Na odwrót, każdy quasi-pęk można przedstawić jako $\boxtimes$ produkt pewnych odcinków.

Nie każde dwa, różne elementy quasi-pęku wyznaczają ten sam quasi-pęk.

PRZYKŁAD 1.27. Rozważmy dwa różne i sąsiednie odcinki $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$, $i = 1, 2$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$ takie, że $Z_1 \subseteq Y_2$. Oznaczmy odcinek $\mathcal{X}_0 = [Z_1, Y_2]$ i proste $p = \overline{Z_1, Z_2}$, $q = \overline{Y_1, Y_2}$ (rys. 1.3).



Rysunek 1.3

Zauważmy, że mamy tutaj trzy różne quasi-pęki: $\mathsf{G}_0 = p \boxtimes q$, $\mathsf{G}_1 = \{Z_1\} \boxtimes q$ oraz $\mathsf{G}_2 = p \boxtimes \{Y_2\}$, spełniające inkluzje $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2 \subsetneq \mathsf{G}_0$. Odcinki $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są parami różnymi elementami G, ale $\mathsf{G}_0 = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$, $\mathsf{G}_1 = \overline{\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1}$ i $\mathsf{G}_2 = \overline{\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_2}$. □

Quasi-pęk G odcinków nazywamy *tranzytywnym*, gdy $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ dla dowolnych, różnych $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathsf{G}$. W powyższym przykładzie quasi-pęk G_0 nie jest tranzytywny, natomiast quasi-pęki G_1 i G_2 tak. Ta własność przysługuje wyłącznie minimalnym, w sensie relacji bycia podzbiorem, quasi-pękom.

Twierdzenie 1.28. *Quasi-pęk jest tranzytywny wtw., gdy jest minimalny.*

Dowód. $\Rightarrow$: Niech G będzie tranzytywnym quasi-pękiem. Załóżmy, że G nie jest minimalny, czyli istnieje quasi-pęk G_0 taki, że $\mathsf{G}_0 \subsetneq \mathsf{G}$. Na podstawie definicji quasi-pęku rozważmy odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ takie, że $\mathsf{G}_0 = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$. Ponieważ $G_0 \subset \mathsf{G}$ to z określenia tranzytywności $\mathsf{G}_0 = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ i otrzymujemy sprzeczność.

$\Leftarrow$: Zauważmy, że w dowolnym quasi-pęku G dwa różne elementy wyznaczają quasi-pęk nie większy niż G, w sensie relacji bycia podzbiorem. Jeśli więc G jest minimalny, to każda para różnych elementów G wyznacza G jednoznacznie. $\square$

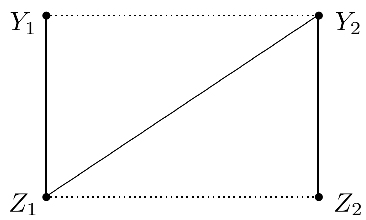
Twierdzenie 1.29. *Niech* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *będzie quasi-pękiem odcinków w* $\mathfrak{L}(V)$. *Quasi-pęk* G *jest minimalny wtw., gdy zachodzi jeden z następujących warunków:*

(i) $Z_1 = Z_2$ *lub* $Y_1 = Y_2$,

(ii) $Z_1 \nsubseteq Y_2$ *i* $Z_2 \nsubseteq Y_1$.

Dowód. Oznaczmy $p := \overline{Z_1, Z_2}$ i $q := \overline{Y_1, Y_2}$.

$\Rightarrow$: Załóżmy, że G jest minimalnym quasi-pękiem i nie zachodzi (i), tzn. $Z_1 \neq Z_2$ i $Y_1 \neq Y_2$. Przypuśćmy ponadto, że $Z_1 \subseteq Y_2$.



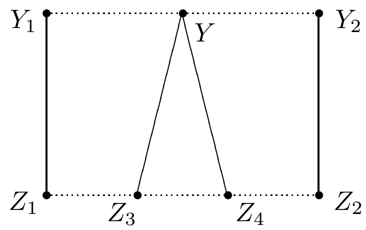
Rysunek 1.4

Zauważmy, że $\{Z_1\} \boxtimes q$, jak również $p \boxtimes \{Y_1\}$, są quasi-pękami zawartymi w G różnymi od G, co przeczy minimalności G (por. przykład 1.27). Analogicznie, w przypadku, gdy $Z_2 \subseteq Y_1$, uzyskamy sprzeczność. Wykazaliśmy zatem, że spełniony jest warunek (ii).

$\Leftarrow$: (i) Załóżmy, że $Z_1 = Z_2 = Z$. Wówczas $\mathsf{G} = \{Z\} \boxtimes q$. Niech $\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4 \in \mathsf{G}$ i $\mathcal{X}_3 \neq \mathcal{X}_4$. Zauważmy, że $Y_3, Y_4 \in q$ i $Y_3 \neq Y_4$, więc z 1.15 $q = \overline{Y_3, Y_4}$, a tym samym $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4}$, co oznacza, że G jest tranzytywny. Z 1.28 quasi-pęk G jest minimalny.

W sytuacji, gdy $Y_1 = Y_2$ dowód biegnie analogicznie.

(ii) Niech $\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4 \in \mathsf{G}$ i $\mathcal{X}_3 \neq \mathcal{X}_4$. Pokażemy, że $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4}$. Ponieważ $\mathsf{G} = p \boxtimes q$, wystarczy więc dowieść równości $p = \overline{Z_3, Z_4}$ i $q = \overline{Y_3, Y_4}$. Z uwagi na to, że $Z_3, Z_4 \in p$ oraz $Y_3, Y_4 \in q$ dowód sprowadza się do wykazania różności $Z_3 \neq Z_4$ i $Y_3 \neq Y_4$.



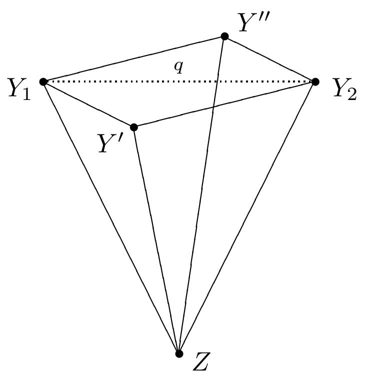
Rysunek 1.5

Przypuśćmy, że $Y_3 = Y_4 = Y$ (rys. 1.5). Wówczas $Z_3 \neq Z_4$ bo $\mathcal{X}_3 \neq \mathcal{X}_4$. Tak więc z 1.15(i) mamy $p = \overline{Z_3, Z_4}$. Z 1.16(ii) natomiast $Z_1, Z_2 \subseteq Y$. Jeśli $Y_1 = Y$, to $Z_2 \subseteq Y_1$ i otrzymujemy sprzeczność z założeniami. Gdy $Y_1 \neq Y$, to $q = \overline{Y_1, Y}$. Ponadto $Z_1 \subseteq Y_1, Y$ i z 1.16(i) dostaniemy $Z_1 \subseteq Y_2$, co przeczy założeniom. W stosunku do pary Y, Y_2 można zastosować analogiczne rozumowanie i otrzymać sprzeczność. Ostatecznie, nasze przypuszczenie jest fałszywe, czyli $Y_3 \neq Y_4$.

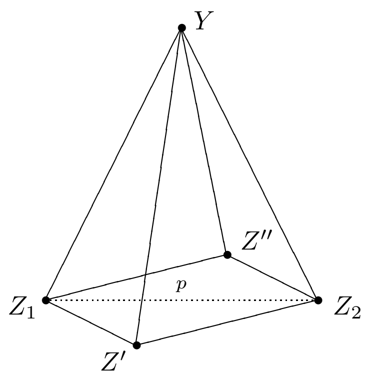
Dualnie można dowieść, że $Z_3 \neq Z_4$. □

Definicja 1.30. Niech $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ będzie quasi-pękiem odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Jeśli quasi-pęk G jest minimalny, to nazywamy go *pękiem odcinków* w kracie $\mathfrak{L}(V)$.

Jeśli $Z_1 = Z_2$, to G nazywamy *pękiem właściwym typu gwiazda* (rys. 1.6), jeśli natomiast $Y_1 = Y_2$, to G nazywamy *pękiem właściwym typu układ* (rys. 1.7). Mówimy krótko, że G jest pękiem właściwym, gdy G jest pękiem właściwym typu gwiazda lub układ.



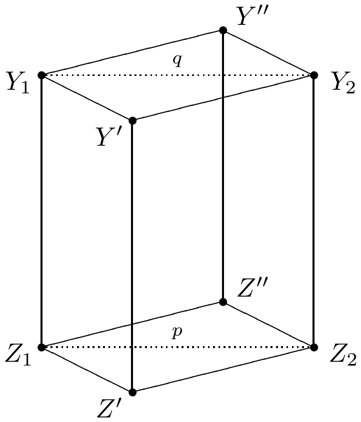
Rysunek 1.6



Rysunek 1.7

Odcinek $\mathcal{X}' = \bigcap \mathsf{G}$ nazywamy *wierzchołkiem* pęku odcinków G, natomiast odcinek $\mathcal{X}'' = \langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle$ jego *podstawą*.

Pęk odcinków G nazywamy *waflem* jeśli $Z_1 \nsubseteq Y_2$ i $Z_2 \nsubseteq Y_1$ (rys. 1.8).



Rysunek 1.8

Zauważmy, że wierzchołek pęku właściwego G jest odcinkiem kowymiaru 1 w każdym z elementów G oraz każdy element G jest kowymiaru 1 w podstawie G. Pęki właściwe są postaci $\{Z\} \boxtimes q$ lub $p \boxtimes \{Y\}$, gdzie p, q są prostymi w $\mathfrak{L}(V)$. Wafle natomiast są postaci $p \boxtimes q$.

Fakt 1.31. *W każdym pęku odcinków* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *zachodzą następujące związki*

$$Z' \subseteq Y', \qquad Z'' \subseteq Y''.$$

Gdy G *jest waflem, to ponadto*

$$\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset, \qquad Z_i \nsubseteq Y', \qquad Z'' \nsubseteq Y_i, \qquad Z'' \nsubseteq Y'.$$

Lemat 1.32. *Niech* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *będą odcinkami kraty* $\mathfrak{L}(V)$ *rozpinającymi pęk właściwy.*

(i) *Jeśli* $Y_1 = Y_2 = Y$, $U \in \mathcal{X}_1$ *i* $Z'' \nsubseteq U$, *to istnieją* W_1, W_2 *takie, że* $W_i \prec Y$, *odcinki* $[Z_i, W_i] \subset \mathcal{X}_i$ $(i = 1, 2)$ *rozpinają wafel, oraz* $U \in [Z_1, W_1]$.

(ii) *Jeśli* $Z_1 = Z_2 = Z$, $U \in \mathcal{X}_1$ *i* $U \nsubseteq Y'$, *to istnieją* W_1, W_2 *takie, że* $Z \prec W_i$, *odcinki* $[W_i, Y_i] \subset \mathcal{X}_i$ $(i = 1, 2)$ *rozpinają wafel, oraz* $U \in [W_1, Y_1]$.

Dowód. Dowód prowadzimy dla przypadku (i), gdyż dowód (ii) przebiega dualnie. Zakładamy więc, że $Y_1 = Y_2 = Y$, $U \in \mathcal{X}_1$ i $Z'' \nsubseteq U$. Ponieważ $Z_i \prec Z''$ to istnieją $z_i \in Z'' \setminus Z_i$ dla $i = 1, 2$. W odcinku $[U, Y]$ możemy wybrać W_1 takie, że $W_1 \prec Y$ i $z_1 \notin W_1$. Podobnie możemy wybrać podprzestrzeń W_2 w $[Z_2, Y]$, tak aby $W_2 \prec Y$ i $z_2 \notin W_2$.

Zauważmy, że $Z_1 \nsubseteq W_2$ i $Z_2 \nsubseteq W_1$, gdyż w przeciwnym razie $Z'' \subseteq W_i$ dla $i = 1$ lub 2, co przeczy konstrukcji W_i. Oznacza to, że odcinki $[Z_i, W_i]$ wyznaczają wafel. □

Powyższy lemat, w szczególności, pozwoli dla dowolnego pęku właściwego skonstruować wafel taki, że każdy element wafla leży w odcinku należącym do wyjściowego pęku właściwego.

Mówimy, że podzbiór $\mathcal{X}_1$ kraty $\mathfrak{L}(V)$ *przylega słabo* do podzbioru $\mathcal{X}_2$ i piszemy $\mathcal{X}_1 \lhd\!| \; \mathcal{X}_2$ lub $\mathcal{X}_2 \; |\!\rhd \mathcal{X}_1$, gdy dla każdego $U_1 \in \mathcal{X}_1$ istnieje $U_2 \in \mathcal{X}_2$ sąsiedni (współliniowy) z U_1. Mówimy, że zbiory $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *przylegają* do siebie, co zapisujemy $\mathcal{X}_1 \lhd\!|\!\rhd \mathcal{X}_2$, jeśli $\mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_2$ przylega słabo do $\mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}_1$ i odwrotnie.

Znajdziemy teraz zależności pomiędzy relacjami przylegania i sąsiedniości odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$.

Stwierdzenie 1.33. *Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą sąsiednimi odcinkami kraty $\mathfrak{L}(V)$. Albo $\mathcal{X}' \neq \emptyset$ i $\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ nie jest pękiem właściwym, albo $\mathcal{X}_1 \lhd|\rhd \mathcal{X}_2$.*

Dowód. Oznaczmy $\mathsf{G} := \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$. Niech $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_2$. Ponieważ $\mathcal{X}' = [Z'', Y']$, to mamy albo $Z'' \nsubseteq U_1$, albo $U_1 \nsubseteq Y'$. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $Z'' \nsubseteq U_1$, gdyż w drugim przypadku dowód biegnie dualnie. Wtedy $Z_1 \neq Z_2$. Zatem mamy $Z_1 \prec Z''$ i oczywiście $Z_1 \subseteq U_1$, co razem dzięki 1.2 daje $U_1 \prec U_1 + Z''$. Niech $B := U_1 + Z''$. Ponieważ $Y_2 \preceq Y''$ i $B \subseteq Y''$, z 1.2 mamy $Q := Y_2 \cap B \preceq B$. Zauważmy, że $Q = B$ tylko gdy $Z_1 \subseteq Y_2$. Zatem, gdy G jest waflem, czyli $Z_1 \nsubseteq Y_2$, to Q jest szukanym U_2. Gdy G nie jest pękiem właściwym i jednocześnie $\mathcal{X}' = \emptyset$ to za U_2 bierzemy Q lub dowolny jego poprzednik z odcinka $[Z_2, Q]$, w zależności od tego czy $Q \prec B$, czy też $Q = B$.

Pozostał przypadek gdy G jest pękiem właściwym, czyli $Y_1 = Y_2 = Y$. Wtedy z 1.32(i) mamy odcinki $\mathcal{X}_i' = [Z_i, W_i]$ $(i = 1, 2)$ o tej własności, że $W_i \prec Y$, $U \in \mathcal{X}_1'$, $\mathcal{X}_i' \subseteq \mathcal{X}_i$ oraz $\mathcal{X}_i'$ rozpinają wafel. Z wcześniejszych rozważań istnieje $U_2 \in \mathcal{X}_2' \setminus \mathcal{X}_1'$ sąsiedni z U_1. Stąd $U_2 \in \mathcal{X}_2$. Gdyby $U_2 \in \mathcal{X}_1$ to $U_2 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_1'$ czyli $U_2 = Y$ z określenia $\mathcal{X}_1'$, co z kolei oznaczałoby, że $U_2 \notin \mathcal{X}_2'$. Ostatecznie $U_2 \in \mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}_1$. $\square$

Dwa odcinki $[Z_i, Y_i]$ kraty $\mathfrak{L}(V)$ są *podobne* gdy Z_1, Z_2 mają tę samą wysokość i Y_1, Y_2 mają te samą skończoną wysokość. Zauważmy, że elementy o skończonej wysokości jeśli są sąsiednie to mają tę samą wysokość.

Stwierdzenie 1.34. *Jeśli $\mathcal{X}_1 \lhd|\rhd \mathcal{X}_2$, to odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są sąsiednie.*

Dowód. Z założenia i definicji przylegania zbiór $\mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_2$ przylega słabo do $\mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}_1$ i na odwrót.

Jeśli $Z_1 \in \mathcal{X}_2$ i $Z_2 \in \mathcal{X}_1$, to odpowiednio $Z_2 \subseteq Z_1$ i $Z_1 \subseteq Z_2$, skąd $Z_1 = Z_2$, a więc $Z_1 \sim Z_2$.

Jeśli $Z_1 \in \mathcal{X}_2$ i $Z_2 \in \mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}_1$, to odpowiednio $Z_2 \subseteq Z_1$ i istnieje $Z_1' \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_2$ taki, że $Z_1' \sim Z_2$. Mamy wówczas $Z_2 \subseteq Z_1 \subseteq Z_1'$, więc z 1.11 dostajemy $Z_2 = Z_1'$, skąd $Z_1 = Z_2$, a więc $Z_1 \sim Z_2$. Rozumowanie przebiega analogicznie, gdy $Z_2 \in \mathcal{X}_1$ i $Z_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_2$.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy $Z_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_2$ oraz $Z_2 \in \mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}_1$. Wtedy w $\mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}_1$ istnieje element Z_2' sąsiedni z Z_1 i na odwrót, w $\mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_2$ istnieje Z_1' sąsiedni z Z_2. Gdyby $Z_i' = Z_{3-i}$ dla $i = 1$ lub $i = 2$, to mielibyśmy $Z_i' \in \mathcal{X}_{3-i}$, co nie jest możliwe. Zatem z 1.12 mamy $Z_1' = Z_1$ i $Z_2' = Z_2$, i w konsekwencji $Z_1 \sim Z_2$.

Dualnie dowodzi się, że Y_1, Y_2 są sąsiednie. $\square$

Stwierdzenie 1.35. *Jeśli $\mathcal{X}_1 \lhd|\rhd \mathcal{X}_2$, to* $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1 \lhd|\rhd \operatorname{Int} \mathcal{X}_2$.

Dowód. Niech $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$ i $\mathcal{X}_i' = \operatorname{Int} \mathcal{X}_i$, $i = 1, 2$. Ponieważ z 1.34 odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są sąsiednie, zatem

$$Z_1 \sim Z_2 \quad \text{i} \quad Y_1 \sim Y_2. \tag{1.22}$$

Weźmy $U_1 \in \mathcal{X}_1' \setminus \mathcal{X}_2'$. Należy wskazać $U_2 \in \mathcal{X}_2' \setminus \mathcal{X}_1'$ taki, że $U_1 \sim U_2$. Zauważmy, że

$$\mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}_2' = \{Z_2, Y_2\}. \tag{1.23}$$

Gdyby więc $U_1 \in \mathcal{X}_2$, to $U_1 = Z_2$ lub $U_1 = Y_2$. W pierwszym przypadku $Z_2 \in \mathcal{X}_1'$, a więc $Z_1 \subsetneq Z_2$, co razem z (1.22) i 1.10 prowadzi do sprzeczności. Podobnie dla $U_1 = Y_2$ uzyskać można sprzeczność. W konsekwencji $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_2$ i z założenia o przyleganiu $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ istnieje $U_2 \in \mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}_1$ taki, że $U_1 \sim U_2$.

Teraz wystarczy dowieść, że $U_2 \in \mathcal{X}_2'$, czyli zgodnie z (1.23) $U_2 \neq Z_2$ i $U_2 \neq Y_2$. Przypuśćmy, że $U_2 = Z_2$. Z (1.22) otrzymujemy $U_2 \sim Z_1, U_1$. Następnie z 1.11 mamy $U_1 = Z_1$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem, że $U_1 \in \mathcal{X}_1' \setminus \mathcal{X}_2'$. W analogiczny sposób można wykazać, że równość $U_2 = Y_2$ nie jest możliwa. □

Stwierdzenie 1.36. *Jeśli* $]Z_1, Y_1[\ \lhd|\rhd \ ]Z_2, Y_2[$, *to dla każdego* k *takiego, że* $\dim Z_1 < k < \dim Y_1$ *mamy* $[Z_1, Y_1]_k \lhd|\rhd [Z_2, Y_2]_k$.

Dowód. Weźmy $U_1 \in [Z_1, Y_1]_k \setminus [Z_2, Y_2]_k$. Wtedy $U_1 \in \ ]Z_1, Y_1[\setminus]Z_2, Y_2[$. Z założenia istnieje $U_2 \in \ ]Z_2, Y_2[\setminus]Z_1, Y_1[$ taki, że $U_1 \sim U_2$. Ponieważ U_1 jest skończonej wysokości k, to $\dim U_2 = k$, co kończy dowód. □

Stwierdzenie 1.37. *Niech* $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_k$, $i = 1, 2$, *będą nietrywialnymi, podobnymi* k*-odcinkami w* $\mathfrak{L}(V)$. *Jeśli* $\mathcal{X}_1 \lhd|\rhd \mathcal{X}_2$, *to albo* $Z_1 = Z_2 = Z$ *i* $\dim Z = k-1$, *albo* $Y_1 = Y_2 = Y$ *i* $\dim Y = k+1$, *albo* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *są sąsiednie.*

Dowód. Wykażemy, że albo $Y_1 \sim Y_2$, albo $Z_1 = Z_2 = Z$ i $\dim Z = k - 1$. Załóżmy więc, że $Y_1 \nsim Y_2$, czyli, że istnieje podprzestrzeń D przestrzeni V taka, że

$$\dim D = 2, \quad D \subseteq Y_1 \quad \text{oraz} \quad D \cap Y_2 = \Theta. \tag{1.24}$$

Przypuśćmy, że istnieje $U_1 \in \mathcal{X}_1$ takie, że $D \subseteq U_1$. Z założenia rozważmy U_2 z $\mathcal{X}_2$ sąsiedni z U_1. Ponieważ $U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 \cap Y_2$ oraz $\dim U_1 \cap U_2 = k - 1$, to $k - 1 \leqslant \dim U_1 \cap Y_2$. Zauważmy, że $(U_1 \cap Y_2) + D \subseteq U_1$. Ze względu na ograniczenia wymiarowe $D \cap (U_1 \cap Y_2) \neq \Theta$, a to z kolei oznacza, że $D \cap Y_2 \neq \Theta$ i uzyskujemy sprzeczność.

Zatem nie ma takiego $U_1 \in \mathcal{X}_1$, że $D \subseteq U_1$. W konsekwencji $\dim Z_1 = k-1$, gdyż w przeciwnym razie, tzn. gdy $\dim Z_1 \leqslant k-2$, istniałaby k wymiarowa podprzestrzeń $U_1 \in \mathcal{X}_1$ zawierająca $Z_1 + D$. Z tego samego powodu

$$D \cap Z_1 = \Theta. \tag{1.25}$$

Natomiast z podobieństwa $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ mamy $\dim Z_2 = k-1$. Zauważmy zatem, że każde dwa elementy w $\mathcal{X}_1$, jak również każde dwa elementy w $\mathcal{X}_2$, są sąsiednie.

Rozważmy liniowo niezależne wektory $d_1, d_2 \in D$, oraz odpowiadające im elementy $U_1 := Z_1 + \langle d_1 \rangle$, $W_1 := Z_1 + \langle d_2 \rangle$ z $\mathcal{X}_1$. Gdyby $U_1 \in \mathcal{X}_2$, lub $W_1 \in \mathcal{X}_2$ to odpowiednio $d_1 \in Y_2$ lub $d_2 \in Y_2$, co nie jest możliwe. Zatem $U_1, W_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_2$. Z założenia o przyleganiu $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, w $\mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}_1$ istnieją U_2, W_2 takie, że $U_1 \sim U_2$ i $W_1 \sim W_2$.

Weźmy dowolny $z \in Z_1 \setminus \Theta$. Gdyby z był kombinacją liniową wektorów d_1, d_2, to $z \in D$ i mielibyśmy sprzeczność z (1.25). Tak więc układ z, d_1, d_2 jest liniowo niezależny. Ponadto

$$(U_1 \cap U_2), \langle z, d_1 \rangle \subseteq U_1 \quad \text{oraz} \quad (W_1 \cap W_2), \langle z, d_2 \rangle \subseteq U_2.$$

Stąd oraz z faktu, że $\dim U_1 \cap U_2 = k - 1 = \dim W_1 \cap W_2$ i $\dim U_i = k = \dim W_i$ dla $i = 1, 2$, uzyskujemy

$$(U_1 \cap U_2) \cap \langle z, d_1 \rangle \neq \Theta \quad \text{oraz} \quad (W_1 \cap W_2) \cap \langle z, d_2 \rangle \neq \Theta.$$

Istnieją więc $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ takie, że

$$u = z + \alpha_1 d_1 \in U_2, \qquad w = z + \alpha_2 d_2 \in W_2. \tag{1.26}$$

Rozważmy teraz
$$d := u - w = \alpha_1 d_1 - \alpha_2 d_2.$$
Zauważmy, że d jest liniową kombinacją d_1, d_2, więc $d \in D$. Z drugiej strony mamy $u - w \in U_2 + W_2$ z (1.26). Ponieważ $U_2 + W_2 \subseteq Y_2$, więc $d \in D \cap Y_2$ i z (1.24) ostatecznie $d = \theta$. Stąd $u = w$, i z (1.26) mamy
$$\alpha_1 d_1 = \alpha_2 d_2.$$
Powyższa równość zachodzi jedynie dla $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$. W rezultacie $u = w = z$. Z dowolności wyboru z otrzymujemy $Z_1 \subseteq U_2 \cap W_2$.

Ponieważ $Z_1 + Z_2 \subseteq U_2$, więc ze względu na wymiary Z_1, Z_2 i U_2 mamy albo $Z_1 + Z_2 = U_2$, gdy $Z_1 \neq Z_2$, albo $Z_1 = Z_2$. Pokazaliśmy zatem, że albo $Z_1 = Z_2$, albo istnieje $U_2 \in \mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}_1$ taki, że $U_2 = Z_1 + Z_2$.

Stosując to samo rozumowanie w stosunku do podprzestrzeni D przestrzeni V takiej, że $D \subseteq Y_2$, $D \cap Y_1 = \Theta$ i $\dim D = 2$ otrzymamy, że albo $Z_1 = Z_2$, albo istnieje $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_2$ taki, że $U_1 = Z_1 + Z_2$. W rezultacie, gdyby $Z_1 = Z_2$, to
$$Z_1 + Z_2 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_2,\ \mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}_1,$$
co nie jest możliwe, a więc ostatecznie $Z_1 = Z_2$.

Dowiedliśmy, że albo $Y_1 \sim Y_2$, albo $Z_1 = Z_2 = Z$ i $\dim Z = k - 1$. Rozumując dualnie można wykazać, że albo $Z_1 \sim Z_2$, albo $Y_1 = Y_2 = Y$ i $\dim Y = k + 1$. □

W dalszej części tej sekcji ustalamy geometryczną charakteryzację pęków odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$.

Lemat 1.38. *Niech* G *będzie pękiem odcinków w kracie* $\mathfrak{L}(V)$ *i* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathsf{G}$.

(i) *Jeśli* $Z_1 \neq Z_2$, *to dla każdego* $Z \in \overline{Z_1, Z_2}$ *istnieje dokładnie jeden element* $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$ *taki, że* $[Z, Y] \in \mathsf{G}$. *Ponadto, prawdziwy jest wzór* $Y = Z + Y'$.

(ii) *Jeśli* $Y_1 \neq Y_2$, *to dla każdego* $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$ *istnieje dokładnie jeden element* $Z \in \overline{Z_1, Z_2}$ *taki, że* $[Z, Y] \in \mathsf{G}$. *Ponadto, prawdziwy jest wzór* $Z = Y \cap Z''$.

Dowód. (i) Jeśli G jest pękiem właściwym, to $Y_1 = Y_2 = Y' = Y''$. Niech $Y := Y_1$. Wówczas $\overline{Y_1, Y_2} = \{Y\}$, a zatem $[Z, Y] \in \mathsf{G}$ i Y jest wyznaczony jednoznacznie. Równość $Y = Z + Y'$ jest prawdziwa, gdyż $Z \subseteq Y'$ i $Y = Y'$.

W przypadku, gdy G jest waflem, to $Z' \prec Z$, więc z 1.1 mamy $Z' + Y' \preceq Z + Y'$. Ze względu na inkluzję $Z' \subseteq Y'$ otrzymujemy $Y' \preceq Z + Y'$. Gdyby $Y' = Z + Y'$, to mielibyśmy $Z \subseteq Y'$, a co za tym idzie $Z \subseteq Y$ dla każdego $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$. Jest to sprzeczne z definicją wafla 1.30. Tak więc $Y' \prec Z + Y'$. Oznaczmy $Y := Z + Y'$. Ponieważ $Z, Y' \subseteq Y''$, więc $Y \subseteq Y''$ i z 1.6 mamy $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$.

Gdyby istniał $Y_0 \neq Y$ taki, że $[Z, Y_0] \in \mathsf{G}$, to mielibyśmy dwa różne odcinki $[Z, Y_0]$ i $[Z, Y]$ o wspólnym wierzchołku, wyznaczające G, co nie jest możliwe z definicji wafla 1.30.

(ii) Rozumowanie biegnie dualnie do (i). □

Mówimy, że prosta p przecina odcinek $\mathcal{X}$ kraty $\mathfrak{L}(V)$, jeśli $p \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$.

Lemat 1.39. *Niech* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *będzie quasi-pękiem i* $p = \,]H, B[$ *prostą w* $\mathfrak{L}(V)$.

(i) *Jeśli prosta p przecina odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, w różnych elementach U_1, U_2, to*

$$Z' \subseteq H \subseteq Y' \quad i \quad Z'' \subseteq B \subseteq Y''. \tag{1.27}$$

(ii) *Przy założeniach (i) gdy ponadto $U_i \in \operatorname{Int} \mathcal{X}_i$, to zachodzi* (1.27) *oraz*

$$H \neq Y', Z'' \neq B, \text{ jeśli } Z_1 \neq Z_2 \text{ to } Z' \neq H, \text{ jeśli } Y_1 \neq Y_2 \text{ to } B \neq Y''. \tag{1.28}$$

(iii) *Jeśli zachodzi* (1.27)*, to p przecina dowolny odcinek $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$.*

(iv) *Jeśli zachodzi* (1.27) *i* (1.28)*, to p przecina dowolny odcinek $\mathcal{X} \in \operatorname{Int} \mathsf{G}$.*

Dowód. (i) Niech p przecina $\mathcal{X}_i$ w U_i, $i = 1, 2$ i $U_1 \neq U_2$. Wtedy z 1.15(i) mamy $p = \overline{U_1, U_2}$, oraz z 1.3

$$H = U_1 \cap U_2, \quad B = U_1 + U_2, \quad \text{oraz} \quad Z_i \subseteq U_i \subseteq Y_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2. \tag{1.29}$$

Tak więc

$$Z_1 \cap Z_2 \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq Y_1 \cap Y_2 \quad \text{oraz} \quad Z_1 + Z_2 \subseteq U_1 + U_2 \subseteq Y_1 + Y_2, \tag{1.30}$$

co ze względu na (1.18) kończy dowód w tym przypadku.

(ii) Spełnione są założenia (i) więc prawdziwe są również (1.29) i (1.30). Pokażemy teraz, że $H \neq Y'$.

Albo $Y_1 = Y_2 = Y$, albo $Y_1 \neq Y_2$, gdyż odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ rozpinają quasi-pęk. W pierwszym przypadku, gdyby $H = Y'$, to mielibyśmy $Y_i \subseteq U_i$, dla $i = 1, 2$. To z kolei, z (1.29) oznacza, że $U_i = Y_i$ i uzyskujemy sprzeczność z założeniem, że $U_i \in \operatorname{Int} \mathcal{X}_i$.

W drugim przypadku, tzn. gdy $Y_1 \neq Y_2$, mamy prostą $q = \overline{Y_1, Y_2}$ oraz $Y' \prec Y_i$ dla $i = 1, 2$. Ponieważ $H \prec U_i$, więc gdyby $H = Y'$, to mielibyśmy $Y' \prec U_i$. Z uwagi na to, że $U_i \subseteq Y''$ (por. (1.29)), mamy $Y' \prec U_i \subseteq Y''$, co oznacza, że $U_i \in q$. Prowadzi to do sprzeczności, gdyż $U_i \in \mathcal{X}_i$ i musiałoby być $U_i = Y_i$.

Dowiedliśmy więc, że $H \neq Y'$. Dualne rozumowanie można przeprowadzić dla Z_1, Z_2, i otrzymujemy wtedy $Z'' \neq B$.

Teraz pokażemy, że jeśli $Z_1 \neq Z_2$, to $Z' \neq H$. Ponieważ odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ rozpinają quasi-pęk, więc wierzchołki Z_1, Z_2 leżą w tym wypadku na prostej, powiedzmy $q = \overline{Z_1, Z_2}$. Gdyby $Z' = H$, to mielibyśmy $Z' \prec U_i$, gdyż U_1, U_2 leżą na prostej i $H \prec U_i$. Zauważmy, że $q =]Z', Z''[$. Tak więc $Z' \prec Z_i, U_i$, czyli Z_i, U_i są sąsiednie. Ze względu na (1.29) oraz 1.10 mamy $Z_i = U_i$, co przeczy założeniu, że $U_i \in \operatorname{Int} \mathcal{X}_i$.

(iii) Niech $\mathcal{X} = [Z, Y] \in \mathsf{G}$. Wtedy $Z + H \subseteq Y \cap B$. Ponieważ $Z' \preceq Z$ i $Z' \subseteq H$, to z 1.2 $H \preceq Z + H$. Podobnie $Y \preceq Y''$ i $B \subseteq Y''$ daje z 1.2 $Y \cap B \preceq B$. Ostatecznie:

$$H \preceq Z + H \subseteq Y \cap B \preceq B,$$

czyli mamy cztery przypadki: $H \prec Z + H$ lub $H = Z + H$ i jednocześnie $Y \cap B \prec B$ lub $Y \cap B = B$. Ponieważ $H \not\prec B$, to w każdym z nich możemy wybrać U takie aby $H \prec U \prec B$ i $Z + H \subseteq U \subseteq Y \cap B$, a więc i $Z \subseteq U \subseteq Y$.

(iv) Niech $\mathcal{X} =]Z, Y[\in \operatorname{Int} \mathsf{G}$. Ponieważ spełnione jest (1.27), więc z (iii) istnieje U takie, że

$$H \prec U \prec B \quad \text{i} \quad Z \subseteq U \subseteq Y. \tag{1.31}$$

Gdyby $U = Z$, to po wstawieniu do (1.27) i (1.31) mielibyśmy $Z' \subseteq H \prec Z$. Ponieważ $Z' \preceq Z$, więc musi być $Z' = H$ oraz $Z' \prec Z$. Z uwagi na to, że Z, Z_1, Z_2 są sąsiednie i, przypomnijmy, $Z' = Z_1 \cap Z_2$, warunek $Z' \prec Z$ implikuje $Z_1 \neq Z_2$. Zatem $Z_1 \neq Z_2$ i jednocześnie $Z' = H$. Sprzeczne to jest z (1.28). Tak więc $Z \subsetneq U$.

Stosując analogiczne rozumowanie można wykazać, że $U \subsetneq Y$. Z (1.31) prosta p przecina $\mathcal{X}$. □

Lemat 1.40. *Niech* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *będzie waflem. Wtedy*

(i) *jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1$, *to* $U_2 = (U_1 + Z_2) \cap Y_2$ *jest jedyny w* $\mathcal{X}_2$ *sąsiedni z* U_1,

(ii) $Z' \prec U \cap Z'' \prec Z''$ *i* $Y' \prec U + Y' \prec Y''$ *dla wszystkich* $U \in \bigcup \mathsf{G}$.

Dowód. (i) Z określenia $U_2 \in \mathcal{X}_2$. Wykażemy, że $U_1 \sim U_2$, tzn. U_1, U_2 posiadają wspólny poprzednik, a mianowicie $U_1 \cap Y_2$. Ponieważ $\mathcal{X}_2$ jest elementem wafla G, więc Y_2 leży na prostej $]Y', Y''[$. Stąd $Y_2 \prec Y''$. Z 1.1 mamy $U_1 \cap Y_2 \preceq U_1 \cap Y''$, ale $U_1 \cap Y'' = U_1$, zatem $U_1 \cap Y_2 \preceq U_1$. Gdyby $U_1 \cap Y_2 = U_1$, to $U_1 \subseteq Y_2$, a tym samym $Z_1 \subseteq Y_2$, co przeczy definicji wafla 1.30. Pokazaliśmy więc, że $U_1 \cap Y_2 \prec U_1$.

Ponieważ $Z' \prec Z_2$, więc z 1.1 mamy $U_1 + Z' \preceq U_1 + Z_2$. Jeśli uwzględnimy równość $U_1 = U_1 + Z'$, to $U_1 \preceq U_1 + Z_2$. Po przemnożeniu obustronnie przez Y_2, z 1.1 otrzymujemy $U_1 \cap Y_2 \preceq (U_1 + Z_2) \cap Y_2$, ale prawa strona to U_2, więc $U_1 \cap Y_2 \preceq U_2$. Gdyby $U_1 \cap Y_2 = U_2$, to po przemnożeniu obu stron przez Z_2 mielibyśmy

$$U_1 \cap Z_2 = U_1 \cap Y_2 \cap Z_2 = U_2 \cap Z_2 = Z_2,$$

czyli $Z_2 \subseteq U_1 \subseteq Y_1$, co przeczy definicji wafla. Zatem $U_1 \cap Y_2 \prec U_2$ i ostatecznie U_1 jest sąsiedni z U_2.

Przypuśćmy teraz, że U_2 nie jest jedyny o żądanej własności tzn., że istnieje $U_2' \in \mathcal{X}_2$ taki, że $U_2' \neq U_2$ i $U_2 \sim U_1$. Albo $U_2' \nsim U_2$, albo $U_2' \sim U_2$. W pierwszym przypadku dostaniemy $U_1 \in \mathcal{X}_2$ z 1.17, co nie jest możliwe. W drugim $Z_2 \subseteq U_1 \subseteq Y_1$ lub $Z_1 \subseteq U_1 \subseteq Y_2$ z 1.18, co z kolei przeczy definicji wafla. Zatem U_2 jest dokładnie jeden.

(ii) Bez utraty ogólności możemy założyć, że $U \in \mathcal{X}_1$, czyli $Z_1 \subseteq U \subseteq Y_1$. Ponieważ mamy inkluzje $Z' \subseteq U \cap Z'' \subseteq Z''$ oraz $Z' \prec\!\!\prec Z''$, więc aby dowieść pierwszy człon koniunkcji wystarczy wykazać, że $Z' \neq U \cap Z'' \neq Z''$.

Gdyby $Z' = U \cap Z''$, to po obustronnym pomnożeniu przez Z_1 dostalibyśmy

$$Z' = Z' \cap Z_1 = U \cap Z'' \cap Z_1 = U \cap Z_1 = Z_1,$$

co przeczy temu, że $\mathcal{X}_1$ jest elementem wafla G.

Jeśli natomiast $U \cap Z'' = Z''$, czyli $Z'' \subseteq U$, to $Z_2 \subseteq U \subseteq Y_1$, co przeczy definicji wafla 1.30.

Fakt $Y' \prec U + Y' \prec Y''$ dowodzi się dualnie. □

Stwierdzenie 1.41. *Niech* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *będą sąsiednimi, różnymi odcinkami kraty* $\mathfrak{L}(V)$. *Następujące warunki są równoważne*

(1) *odcinki* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *rozpinają wafel,*

(2) $Z'' \cap Y' = Z'$ *i* $Z' \neq Z''$,

(3) $Y' + Z'' = Y''$ *i* $Y' \neq Y''$.

Dowód. (1) $\implies$ (2) Przypomnijmy, że $Z'' \cap Y' = (Z_1 + Z_2) \cap (Y_1 \cap Y_2)$. Ponieważ jedynym sąsiednim z Z_1 elementem w $\mathcal{X}_2$ jest Z_2, to z 1.40(i) otrzymujemy $Z_2 = (Z_1 + Z_2) \cap Y_2$. Stąd $Z'' \cap Y' = Z_2 \cap Y_1$. Ponieważ $Z' \prec Z_2$, więc z 1.1 mamy $Z' \cap Y_1 \preceq Z_2 \cap Y_1$, ale $Z' \subseteq Y_1$, zatem $Z' \preceq Z_2 \cap Y_1$. Gdyby $Z' \prec Z_2 \cap Y_1$, to ze względu na to, że $Z' \prec Z_2$ i $Z_2 \cap Y_1 \subseteq Z_2$, mielibyśmy $Z_2 \cap Y_1 = Z_2$, czyli $Z_2 \subseteq Y_1$, co kłóci się z definicją wafla 1.30. Tak więc $Z' = Z_2 \cap Y_1 = Z'' \cap Y'$.

Wprost z definicji wafla $Z' \neq Z''$.

(2) $\implies$ (1) Załóżmy, nie wprost, że (a) $Z'' \cap Y' = Z'$, (b) $Z' \neq Z''$ i (c) $Z_1 \subseteq Y_2$. Z założenia (b) mamy $Z_1 \neq Z_2$. Gdyby $Y' = Y''$, to po wstawieniu do (a) mielibyśmy $Z' = Z'' \cap Y'' = Z''$, co przeczy (b). Tak więc $Y_1 \neq Y_2$. Z założenia (c) mamy $Z_1 + Z_2 \subseteq Y_2$, zatem

$$(Z_1 + Z_2) \cap Y_1 = (Z_1 + Z_2) \cap Y_2 \cap Y_1 = Z_1 \cap Z_2.$$

Stąd, po pomnożeniu obu stron przez Z_1 otrzymamy $Z_1 = Z_1 \cap Z_2$, czyli $Z_1 \subseteq Z_2$, co jest niemożliwe.

(1) $\iff$ (3) Dowód przebiega dualnie. □

Lemat 1.42. *Niech $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ będzie quasi-pękiem odcinków.*

(i) *Jeśli $\mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$ i prosta p przecina $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, to p przecina $\mathcal{X}_3$.*

(ii) *Jeśli $\mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$, to dla każdego $U_3 \in \mathcal{X}_3$ istnieje prosta p przez U_3 przecinająca $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$.*

(iii) *Jeśli prosta p przecina $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ w różnych elementach i $U_3 \in p$, to istnieje odcinek $\mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$ taki, że $U_3 \in \mathcal{X}_3$.*

(iv) *Jeśli prosta p przecina $\mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}', \mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}'$, to $p \cap \mathcal{X}' = \emptyset$.*

Dowód. (i) Niech $U_i \in p \cap \mathcal{X}_i$ dla $i = 1, 2$. Jeśli $U_1 \neq U_2$, to z 1.39 mamy tezę. W przeciwnym razie, $U_1 = U_2 \in \mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}_3$ z 1.26.

(ii) Niech $U_3 \in \mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$ i $\mathcal{X}_3 = [Z_3, Y_3]$. Ponieważ $Y' \preceq Y_3$ i $U_3 \subseteq Y_3$, więc z 1.2 uzyskujemy

$$U_3 \cap Y' \preceq U_3. \tag{1.32}$$

Ponadto $Z' \subseteq U_3 \cap Y'$. Jeśli $Z' \neq U_3 \cap Y'$, to z 1.7 istnieje H takie, że

$$Z' \subseteq H \prec U_3 \quad \text{i} \quad H \subseteq U_3 \cap Y'. \tag{1.33}$$

Natomiast w przypadku, gdy $Z' = U_3 \cap Y'$, to z (1.32) mamy $Z' \preceq U_3$. Jeśli $Z' = U_3$, to z uwagi na inkluzje $Z' \subseteq Z_3 \subseteq U_3$ mamy $Z' = Z_3$, czyli musi być $Z' = Z''$, a tym samym $U_3 = Z''$, co oznacza, że $U_3 \in \mathcal{X}'$ i każda prosta przez U_3 przecina $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$. Gdy z kolei $Z' \prec U_3$, to dla $H := Z'$ prawdziwe jest (1.33).

Dualnie wykazać można, że istnieje B o własnościach

$$U_3 \prec B \subseteq Y'' \quad \text{i} \quad U_3 + Z'' \subseteq B.$$

Skonstruowaliśmy więc prostą $]H, B[$ przez U_3, która z 1.39(iii) przecina $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$.

(iii) Niech $p =]H, B[$. Z 1.39(i) mamy $Z' \subseteq H \subseteq Y'$ i $Z'' \subseteq B \subseteq Y''$.

Rozważmy przypadek, gdy $Z'' \nsubseteq U_3$. Ponieważ $U_3 \prec B$ i $Z'' \subseteq B$, więc z 1.2 otrzymujemy

$$Z_3 := U_3 \cap Z'' \prec Z''.$$

W rezultacie $Z' \subseteq Z_3$. Ponadto, w tym przypadku $Z' \lessdot Z''$, co razem z 1.6 oznacza, że Z_3 leży na prostej wyznaczonej przez wierzchołki Z_1, Z_2 odcinków $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$.

Gdy natomiast $Z'' \subseteq U_3$, to bierzemy $Z_3 := Z_1$.

W obu przypadkach $Z_3 \subseteq U_3$.

Dualnie, kładziemy albo $Y_3 := U_3 + Y'$ albo $Y_3 := Y_1$ w zależności od tego czy odpowiednio, $U_3 \nsubseteq Y'$, czy też $U_3 \subseteq Y'$. W każdym razie $\mathcal{X}_3 := [Z_3, Y_3]$ spełnia nasze wymagania.

(iv) Niech $U_i \in p \cap \mathcal{X}_i \setminus \mathcal{X}'$ dla $i = 1, 2$. Załóżmy, że $U \in p \cap \mathcal{X}'$. Mamy $U \neq U_i$, więc $p = \overline{U, U_i}$, a ponieważ $U \in \mathcal{X}_i$, to z 1.15 mamy $p \subseteq \mathcal{X}_i$ dla $i = 1, 2$. Zatem $p \subseteq \mathcal{X}'$ i w szczególności $U_1, U_2 \in \mathcal{X}'$ co przeczy naszym założeniom. □

Powyższy lemat jest zapowiedzią geometrycznej charakteryzacji pęków odcinków. Mówimy, że zbiory D_1, D_2, D_3 elementów kraty $\mathfrak{L}(V)$ spełniają:

($*_1$) jeśli każda prosta p przecinająca D_1 i D_2 przecina również D_3,

($*_2$) gdy dla każdego $U_3 \in D_3 \setminus (D_1 \cap D_2)$ istnieje prosta p przez U_3 przecinająca D_1, D_2 w różnych elementach.

Lemat 1.42 mówi, że quasi-pęki spełniają ($*_1$) i ($*_2$) w słabszej postaci.

LEMAT 1.43. *Jeśli $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ jest pękiem odcinków i $\mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$, to $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ spełniają ($*_1$) i ($*_2$).*

DOWÓD. Niech $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$, $i = 1, 2, 3$. Na podstawie 1.42(i) warunek ($*_1$) jest spełniony.

Teraz wykażemy, że spełnione jest ($*_2$). Niech więc $U_3 \in \mathcal{X}_3 \setminus \mathcal{X}'$. Ponieważ G jest albo waflem i $\mathcal{X}' = \emptyset$, albo pękiem właściwym, więc z 1.33 istnieje $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_3$ sąsiedni z U_3. Z tranzytywności pęku G mamy $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3}$. Ponieważ $\mathcal{X}_2 \in \mathsf{G}$, więc na mocy ($*_1$), prosta $\overline{U_1, U_3}$ przecina $\mathcal{X}_2$ w pewnym punkcie U_2. Gdyby $U_2 = U_1$, to mielibyśmy $U_1 \in \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}'$, co na podstawie 1.26 oznacza, że $U_1 \in \mathcal{X}_3$ i dostalibyśmy sprzeczność. □

LEMAT 1.44. *Niech $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ będzie pękiem odcinków.*

(i) *Jeśli $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ spełniają ($*_1$), to $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1, \operatorname{Int} \mathcal{X}_2, \operatorname{Int} \mathcal{X}_3$ spełniają ($*_1$).*

(ii) *Jeśli $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ spełniają ($*_2$), to $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1, \operatorname{Int} \mathcal{X}_2, \operatorname{Int} \mathcal{X}_3$ spełniają ($*_2$).*

(iii) *Jeśli $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1, \operatorname{Int} \mathcal{X}_2, \operatorname{Int} \mathcal{X}_3$ spełniają ($*_1$), to k-odcinki $\operatorname{Sub}_k(\mathcal{X}_i)$ dla $i = 1, 2, 3$ spełniają ($*_1$).*

(iv) *Jeśli $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1, \operatorname{Int} \mathcal{X}_2, \operatorname{Int} \mathcal{X}_3$ spełniają ($*_2$), to k-odcinki $\operatorname{Sub}_k(\mathcal{X}_i)$ dla $i = 1, 2, 3$ spełniają ($*_2$).*

DOWÓD. (i) Niech p przecina $\operatorname{Int} \mathcal{X}_i$ w U_i, dla $i = 1, 2$. Wtedy p przecina również $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$. Zatem z założonego warunku ($*_1$) dla $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ prosta p przecina $\mathcal{X}_3$, powiedzmy w U_3. Przypuśćmy, że $U_3 \notin \operatorname{Int} \mathcal{X}_3$, czyli $U_3 = Z_3$ lub $U_3 = Y_3$.

Gdy $U_3 = Z_3$, to mamy $U_1, Z_1 \sim Z_3$ i jednocześnie $Z_1 \subseteq U_1$. Z 1.11 musi być $Z_1 = U_1$, co przeczy założeniom o U_1.

W przypadku, gdy $U_3 = Y_3$ rozumujemy podobnie. Mamy wtedy $Y_1, U_1 \sim Y_3$ i jednocześnie $U_1 \subseteq Y_1$. Z 1.11 dostajemy $U_1 = Y_1$, co przeczy założeniom o U_1.

(ii) Niech $U_3 \in \operatorname{Int} \mathcal{X}_3 \setminus (\operatorname{Int} \mathcal{X}_1 \cap \operatorname{Int} \mathcal{X}_2)$. Musimy wskazać prostą przez U_3 przecinającą $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1, \operatorname{Int} \mathcal{X}_2$ w różnych elementach. Ponieważ $U_3 \in \mathcal{X}_3 \setminus \mathcal{X}'$ i odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ spełniają $(*_2)$, więc istnieje prosta p przez U_3 przecinająca $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ w U_1, U_2 i $U_1 \neq U_2$.

Gdyby $U_i = Z_i$ dla $i = 1$ lub $i = 2$, to mielibyśmy $U_3, Z_3 \sim U_i$, co z 1.11 daje $U_3 = Z_3$ i dostajemy sprzeczność z założeniem o U_3.

Podobnie, gdyby $U_i = Y_i$ dla $i = 1$ lub $i = 2$, to mielibyśmy $Y_3, U_3 \sim U_i$, co z 1.11 daje $U_3 = Y_3$ i uzyskujemy sprzeczność.

Tak więc $U_i \in \operatorname{Int} \mathcal{X}_i$, dla $i = 1, 2$, co kończy dowód.

(iii) Niech prosta p przecina $\operatorname{Sub}_k(\mathcal{X}_1)$ i $\operatorname{Sub}_k(\mathcal{X}_2)$. Wtedy p jest k-pękiem, i z $(*_1)$ dla $\operatorname{Int} \mathcal{X}_i$ prosta p przecina również $\operatorname{Sub}_k(\mathcal{X}_3)$.

(iv) Aby wykazać $(*_2)$ weźmy $U_3 \in \operatorname{Sub}_k(\mathcal{X}_3) \setminus \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$. Z $(*_2)$ dla $\operatorname{Int} \mathcal{X}_i$ istnieje prosta p przez U_3 przecinająca $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1, \operatorname{Int} \mathcal{X}_2$. Prosta p jest k-pękiem, co kończy rozumowanie. □

Lemat 1.45. *Niech* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *będzie pękiem odcinków.*

(i) *Jeśli* $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1, \operatorname{Int} \mathcal{X}_2, \operatorname{Int} \mathcal{X}_3$ *spełniają* $(*_1)$, *to* $Z_3 \subseteq Z''$ *i* $Y' \subseteq Y_3$.

(ii) *Jeśli* $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1, \operatorname{Int} \mathcal{X}_2, \operatorname{Int} \mathcal{X}_3$ *spełniają* $(*_2)$, *to* $Z' \subseteq Z_3$ *i* $Y_3 \subseteq Y''$.

Dowód. (i) Pokażemy, że $Z_3 \subseteq Z''$. Odcinki rozpinające G są nietrywialne, więc odcinek $]Z'', Y''[$ jest niepusty. Weźmy zatem $B \in]Z'', Y''[$ takie, że $B \prec Y''$. Ponieważ mamy $Y' \prec\!\!\!\prec Y''$ lub $Y' = Y''$, to $Y' = Y' + B$, $Y' \prec Y' + B$ lub $Y' \prec\!\!\!\prec Y' + B$. Stąd odpowiednio

$$\text{(a)}\quad Y' \cap B = B \quad \text{lub} \quad \text{(b)}\quad Y' \cap B \prec B \quad \text{lub} \quad \text{(c)}\quad Y' \cap B \prec\!\!\!\prec B. \tag{1.34}$$

Rozważmy przypadek gdy $Z_1 \neq Z_2$. Zauważmy, że wtedy $Z' \prec\!\!\!\prec Z'' \subsetneq B$. Zatem, w każdym z trzech przypadków (1.34) w odcinku $]Z', Y' \cap B]$ istnieje H taki, że $H \prec\!\!\!\prec B$.

Teraz rozważmy przypadek $Z_1 = Z_2 = Z$. Wówczas $Y_1 \neq Y_2$ i $Y' \prec\!\!\!\prec Y''$. Zauważmy, że odcinek $[Z, B]$ ma długość co najmniej 2. Zatem, w każdym z przypadków (1.34), w odcinku $[Z, Y' \cap B]$ istnieje H taki, że $H \prec\!\!\!\prec B$.

W obu przypadkach skonstruowaliśmy prostą $p =]H, B[$, która spełnia (1.27) w 1.39. Gdyby $H = Y'$, wówczas $Y' \subseteq Y' \cap B$, a zatem $Y' \cap B = Y' = H$. Z (1.34) mielibyśmy $Y' \prec\!\!\!\prec B$, co przeczy $B \prec Y''$. Stąd prosta p spełnia również (1.28) w 1.39. Z uwagi na 1.39(iv) prosta p przecina $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1$ i $\operatorname{Int} \mathcal{X}_2$. Z $(*_1)$ istnieje $U_3 \in p \cap \mathcal{X}_3$, a więc $Z_3 \subseteq U_3 \subseteq B$. Pokazaliśmy zatem, że

$$Z_3 \subseteq \bigcap \Big\{ B \in]Z'', Y''[\colon B \prec Y'' \Big\} = Z''.$$

Dowód dla $Y' \subseteq Y_3$ biegnie dualnie.

(ii) Wykażemy, że $Z' \subseteq Z_3$. Niech $U_3 \in]Z_3, Y_3[$. Z $(*_2)$ istnieje prosta $p =]H, B[$ przecinająca $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1, \operatorname{Int} \mathcal{X}_2$ w różnych elementach. Z 1.39(ii) mamy $Z' \subseteq H \subseteq U_3$. Ponieważ U_3 jest dowolny to mamy $Z' \subseteq \bigcap \{U_3 \colon U_3 \in]Z_3, Y_3[\}$, zatem na mocy 1.13 mamy $Z' \subseteq Z_3$.

Dowód $Y_3 \subseteq Y''$ jest dualny. □

Bezpośrednim wnioskiem z 1.44(i), (ii) i 1.45 jest

Wniosek 1.46. *Niech* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *będzie pękiem odcinków.*

(i) *Jeśli* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ *spełniają* $(*_1)$, *to* $Z_3 \subseteq Z''$ *i* $Y' \subseteq Y_3$.

(ii) *Jeśli* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ *spełniają* $(*_2)$, *to* $Z' \subseteq Z_3$ *i* $Y_3 \subseteq Y''$.

LEMAT 1.47. *Jeśli* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *jest pękiem oraz* $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1$, $\operatorname{Int} \mathcal{X}_2$, $\operatorname{Int} \mathcal{X}_3$ *spełniają* $(*_1)$, $(*_2)$, *to* $\operatorname{Int} \mathcal{X}_3 \in \operatorname{Int} \mathsf{G}$.

DOWÓD. Z 1.45 mamy

$$Z' \subseteq Z_3 \subseteq Z'' \quad \text{i} \quad Y' \subseteq Y_3 \subseteq Y''. \tag{1.35}$$

Załóżmy, że $Z_1 \neq Z_2$. Przypuśćmy jednocześnie, że $Z' = Z_3$. Rozważmy U_3 taki, że $Z' \prec U_3 \subseteq Y'$. Zauważmy, że $U_3 \sim Z_1, Z_2$, oraz $U_3 \in \operatorname{Int} \mathcal{X}_3$. Gdyby $U_3 \in \operatorname{Int} \mathcal{X}_1 \cap \operatorname{Int} \mathcal{X}_2$ to $Z_1 = U_3 = Z_2$. Zatem z $(*_2)$ istnieją U_i takie, że $Z_i \subseteq U_i$ i $U_i \sim U_3$, $i = 1, 2$. Z 1.11 otrzymujemy sprzeczność.

Przypuśćmy teraz, że $Z_3 = Z''$, przy założeniu $Z_1 \neq Z_2$. W odcinku $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1$ weźmy takie U_1 aby $Z_1 \prec U_1$ i $U_1 \notin \operatorname{Int} \mathcal{X}_2$. Takie U_1 istnieje gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $Z_2 \subseteq \bigcap \{U_1 \in \operatorname{Int} \mathcal{X}_1 \colon Z_1 \prec U_1\} = Z_1$. Z 1.33 w $\operatorname{Int} \mathcal{X}_2 \setminus \operatorname{Int} \mathcal{X}_1$ istnieje U_2 sąsiedni z U_1, czyli istnieje prosta $p =]H, B[$ przecinająca $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1$, $\operatorname{Int} \mathcal{X}_2$ w różnych elementach. Z 1.39(i) mamy więc $Z' \subseteq H$, z $(*_1)$ istnieje natomiast $U_3 \in p \cap \operatorname{Int} \mathcal{X}_3$. Zauważmy, że $Z' \prec Z_1 \prec U_1$ i zarazem $Z' \subseteq H \prec U_1$. Stąd $Z' \prec H$ i dalej

$$Z' \prec H \prec U_3 \prec B, \quad \text{oraz} \quad Z' \not\prec Z'' = Z_3 \subsetneq U_3 \prec B,$$

co prowadzi do sprzeczności. Ostatecznie

$$\text{albo} \quad Z_1 = Z_2, \quad \text{albo} \quad Z' \prec Z_3 \prec Z''. \tag{1.36}$$

Dualnie

$$\text{albo} \quad Y_1 = Y_2, \quad \text{albo} \quad Y' \prec Y_3 \prec Y''. \tag{1.37}$$

Z (1.35) oraz (1.36) i (1.37) mamy $\operatorname{Int} \mathcal{X}_3 \in \operatorname{Int} \mathsf{G}$. □

TWIERDZENIE 1.48. *Niech* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *będzie pękiem odcinków. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$,

(2) *odcinki* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ *spełniają* $(*_1)$, $(*_2)$,

(3) *odcinki* $\operatorname{Int} \mathcal{X}_1$, $\operatorname{Int} \mathcal{X}_2$, $\operatorname{Int} \mathcal{X}_3$ *spełniają* $(*_1)$, $(*_2)$,

(4) $\operatorname{Int} \mathcal{X}_3 \in \operatorname{Int} \mathsf{G}$.

DOWÓD. (1) $\Longrightarrow$ (2) Bezpośredni wniosek z 1.43.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Wynika z 1.44.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Wynika z 1.47.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Wniosek z określenia $\operatorname{Int} \mathsf{G}$ w (1.16). □

Twierdzenie 1.49. *Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą różnymi, sąsiednimi odcinkami domkniętymi kraty $\mathfrak{L}(V)$.*

(i) *$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ wyznaczają pęk właściwy wtw., gdy $Z_1 = Z_2$ lub $Y_1 = Y_2$.*

(ii) *$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ wyznaczają wafel wtw., gdy dla każdego $U_1 \in \mathcal{X}_1$ istnieje dokładnie jeden $U_2 \in \mathcal{X}_2$ sąsiedni z U_1, i na odwrót.*

(iii) *Jeśli $\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ jest pękiem, to $\mathcal{X}_3 \in \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ wtw., gdy $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ spełniają $(*_1)$ i $(*_2)$.*

Dowód. (i) Z definicji pęku właściwego.

(ii) $\Rightarrow$: Konsekwencja 1.40(i).

$\Leftarrow$: Załóżmy, przeciwnie do definicji wafla, że $Z_1 \subseteq Y_2$. Wtedy $Z_1 \subseteq Y'$. Rozważmy U_1 takie, że $Z_1 \subseteq U_1 \subseteq Y'$. Ponieważ $U_1 \in \mathcal{X}_1$ to istnieje $U_2 \in \mathcal{X}_2$ sąsiedni z U_1. Niech $U_1, U_2 \in p =]H, B[$. Zauważmy, że $B \subseteq Y_2$, czyli $[Z_2, B] \subseteq \mathcal{X}_2$. Ponadto $Z_2 \neq B$, czyli istnieje $U_2' \in [Z_2, B]$ taki, że $U_2' \prec B$ i $U_2' \neq U_2$. To jednak oznacza, że $U_1 \sim U_2, U_2'$, co przeczy jednoznaczności wyboru.

W przypadku $Z_2 \subseteq Y_1$ dowód biegnie dualnie.

(iii) Bezpośredni wniosek z 1.48. □

1.4 Przesunięcia kratowe

W przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}(V)$ rzut centralny o środku C z prostej K na prostą L można określić wzorem $U \leadsto (U + C) \cap L$ dla $U \in K$. W pracy [10] zostały przedstawione rzuty miedzy podprzestrzeniami przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}(V)$. Jeśli X_1, X_2, C są podprzestrzeniami w $\mathbf{P}(V)$ takimi, że $\dim X_1 = \dim X_2$, $X_1 \subseteq C + X_2$, wtedy, zgodnie z definicją, rzut o środku C z X_1 na X_2, symbolicznie $\begin{smallmatrix} X_1 \\ C \\ X_2 \end{smallmatrix}$, to przekształcenie $U \leadsto (U + C) \cap X_2$ dla $U \subseteq X_1$. Z punktu widzenia kraty $\mathfrak{L}(V)$, w obu przypadkach, mamy do czynienia ze złożeniem dwóch standardowych *przesunięć*, tzn. transformacji zbioru $\mathrm{Sub}(V)$ postaci

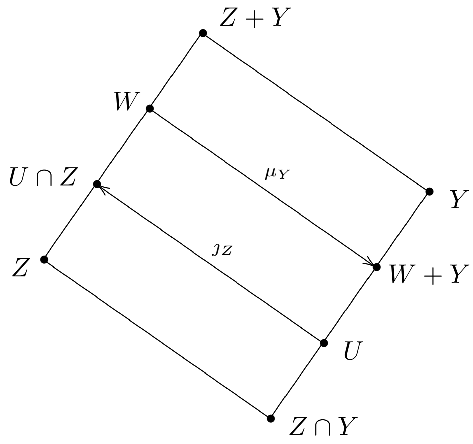
$$\mu_W \colon U \leadsto U \cap W, \tag{1.38}$$

$$\jmath_W \colon U \leadsto U + W. \tag{1.39}$$

Zasadnicza ich własność to bezpośredni wniosek z twierdzenia o izomorfizmie:

Twierdzenie 1.50. (Grätzer [4, Tw. 2, Roz IV.1]) *Niech Z, Y będą elementami kraty $\mathfrak{L}(V)$. Wtedy μ_Y jest izomorfizmem odcinka $[Z, Z+Y]$ i $[Z \cap Y, Y]$. Odwrotnym izomorfizmem jest $\jmath_Z$. W konsekwencji, dla dowolnych $U, W \in [Z \cap Y, Y]$ mamy*

$$Z + (U \cap W) = (Z + U) \cap (Z + W).$$



Rysunek 1.9

Przypomnijmy, że bijekcja zachowująca porządek w kracie jest jej izomorfizmem. Oczywiście, przesunięcia μ_W, $\jmath_W$ zachowują porządek, nie zawsze jednak są bijekcjami. Kryterium rozstrzygające tę kwestię daje poniższy lemat.

Lemat 1.51. *Niech Z, Y będą elementami kraty $\mathfrak{L}(V)$ takimi, że $\mathcal{X} = [Z, Y]$ jest niepustym odcinkiem skończonej długości. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mu_W|\mathcal{X}$ ($\jmath_W|\mathcal{X}$) *jest bijekcją,*

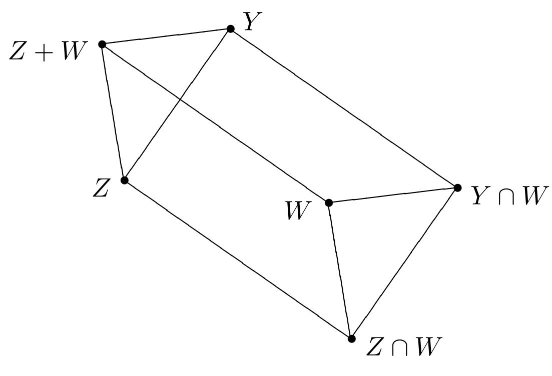
(2) $\mu_W|\mathcal{X}$ ($\jmath_W|\mathcal{X}$) *zachowuje długość odcinków zawartych w* $\mathcal{X}$*,*

(3) $Z + W = Y + W$ ($Z \cap W = Y \cap W$).

Dowód. Przedstawimy dowód tylko dla $\mu_W|\mathcal{X}$, gdyż rozumowanie w przypadku $\jmath_W|X$ przebiega dualnie.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Oczywiste z uwagi na to, że $\mu_W|\mathcal{X}$ zachowuje porządek, a więc jest izomorfizmem.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Odcinki $\mathcal{X}$ oraz $\mu_W(\mathcal{X}) = [Z \cap W, Y \cap W]$ są tej samej długości. Z 1.50 odwzorowanie $\mu_{Y \cap W}$ jest izomorfizmem odcinków $\mathcal{X}_1 := [Z, Z + (Y \cap W)]$ i $\mathcal{X}_2 := [Z \cap (Y \cap W), Y \cap W]$ (por. diagram 1.10). Zauważmy, że $\mathcal{X}_2 = [Z \cap W, Y \cap W] = \mu_W(\mathcal{X})$, a ponadto $Z + (Y \cap W) \subseteq Y$. Tak, więc $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}$, a jednocześnie $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}_1$ mają tę samą długość. Daje to $Y = Z + (Y \cap W)$. Dodając do obu stron W otrzymujemy żądaną równość.



Rysunek 1.10

(3) $\Rightarrow$ (1) : Z modularności $\mathfrak{L}(V)$, oraz z naszych założeń mamy $Z+(Y\cap W)=(Z+W)\cap Y=Y$. Zauważmy, że $U\cap W=U\cap(Y\cap W)$ dla dowolnego $U\in\mathcal{X}$. Stąd $\mu_W|\mathcal{X}=\mu_{Y\cap W}|\mathcal{X}$. Uwzględniwszy wcześniej uzyskaną równość oraz 1.50 widzimy, że $\mu_{Y\cap W}$ jest izomorfizmem odcinków $\mathcal{X}$ i $[Z\cap W, Y\cap W]$, co kończy dowód. $\square$

Lemat 1.52. *Dla dowolnego niepustego odcinka $\mathcal{X}=[Z,Y]$ i elementu W kraty $\mathfrak{L}(V)$ zachodzi*

$$\mu_W(\mathcal{X})=\big[\mu_W(Z),\mu_W(Y)\big] \qquad \textit{oraz} \qquad \jmath_W(\mathcal{X})=\big[\jmath_W(Z),\jmath_W(Y)\big].$$

Dowód. Wykażemy pierwszą równość. Prawdziwość drugiej dowodzi się w oparciu o prawo dualności.

$\subseteq$: Jeśli $Q\in\mu_W(\mathcal{X})$, to istnieje $U\in\mathcal{X}$ takie, że $Q=\mu_W(U)$. Ponieważ przesunięcia zachowują porządek kraty, więc $\mu_W(Z)\subseteq\mu_W(U)\subseteq\mu_W(Y)$, co kończy dowód tej inkluzji.

$\supseteq$: Niech teraz $Q\in\big[\mu_W(Z),\mu_W(Y)\big]$ i niech $W_0:=Z+(W\cap Y)$. Ponieważ $\mathcal{X}\neq\emptyset$, więc $Z\subseteq Y$ i stąd $W_0\in\mathcal{X}$. Rozważmy względne uzupełnienie U elementu W_0 w odcinku $\mathcal{X}$. Prawdziwe są następujące inkluzje

$$Z\subseteq Q+U\subseteq Y,$$

innymi słowy $Q+U\in\mathcal{X}$. Pokażemy, że $\mu_W(Q+U)=Q$. Ponieważ U i W_0 uzupełniają się w $\mathcal{X}$, więc w szczególności $Z=U\cap W_0$. Po obustronnym pomnożeniu przez W i wykorzystaniu modularności kraty otrzymamy

$$Z\cap W=U\cap W_0\cap W=U\cap(Z+W)\cap Y\cap W=U\cap W.$$

Wówczas z modularności kraty oraz faktu, że $Q\subseteq W$ mamy

$$(Q+U)\cap W=Q+(Q\cap W)=Q+(Z\cap W)=Q+\mu_W(Z)=Q,$$

co kończy dowód. $\square$

Definicja 1.53. Niech $\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2$ będą odcinkami kraty $\mathfrak{L}(V)$. Mówimy, że odwzorowanie $f\colon\mathcal{X}_1\longrightarrow\mathcal{X}_2$ jest *μ-rzutem* (*$\jmath$-rzutem*), gdy istnieje element W kraty $\mathfrak{L}(V)$ taki, że $f=\mu_W|\mathcal{X}_1$ ($f=\jmath_W|\mathcal{X}_1$) jest bijekcją.

Zgodnie z terminologią [4, Roz. III.1] μ-rzut jest *dolną perspektywą*, natomiast $\jmath$-rzut jest *górną perspektywą*.

Lemat 1.54. *Niech $\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2$ będą odcinkami kraty $\mathfrak{L}(V)$ i niech $f\colon\mathcal{X}_1\longrightarrow\mathcal{X}_2$. Odwzorowanie f jest*

(i) *μ-rzutem wtw., gdy $f=\mu_Y|\mathcal{X}_1$ oraz $\mathcal{X}_1=[Z,Z+Y]$, $\mathcal{X}_2=[Z\cap Y,Y]$,*

(ii) *$\jmath$-rzutem wtw., gdy $f=\jmath_Z|\mathcal{X}_1$ oraz $\mathcal{X}_1=[Z\cap Y,Y]$, $\mathcal{X}_2=[Z,Z+Y]$,*

dla pewnych Z,Y.

Dowód. (i) $\Rightarrow$: Załóżmy, że f jest μ-rzutem μ_W odcinka $\mathcal{X}_1=[P,Q]$ na pewien odcinek $\mathcal{X}_2$. Wówczas zgodnie z 1.52 mamy $\mathcal{X}_2=[P\cap W,Q\cap W]$. Pokażemy, że $f,\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2$ są postaci takiej jak w tezie.

Połóżmy, $Z:=P$, $Y:=Q\cap W$. Z modularności kraty $Z+Y=(P+W)\cap Q$, natomiast z 1.51 mamy $P+W=Q+W$. Stąd $Z+Y=(Q+W)\cap Q=Q$.

Jednocześnie $Z \cap Y = P \cap Q \cap W = P \cap W$. Zauważmy, że dla dowolnego $U \in [P, Q]$ mamy

$$\mu_Y(U) = U \cap Y = U \cap Q \cap W = U \cap W = \mu_W(U),$$

co kończy dowód.

$\Leftarrow$: Bezpośredni wniosek z 1.50 i definicji 1.53.

(ii) Dowód przebiega dualnie. □

LEMAT 1.55. *Niech f będzie izomorfizmem odcinków $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$, $i = 1, 2$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Wtedy dla $U \in \mathcal{X}_1$,*

(i) $\dim f(U) = \dim U - \dim Z_1 + \dim Z_2$,

(ii) $\dim f(U) = \dim Y_2 - \dim Y_1 + \dim U$.

DOWÓD. (i) Ponieważ f zachowuje wysokość elementów w kracie $\mathcal{X}_1$, więc mamy $\dim f(U) - \dim Z_2 = \dim U - \dim Z_1$, co daje żądaną równość.

(ii) Podobnie f zachowuje wysokość elementów w kracie $\mathcal{X}_2$ z odwróconym porządkiem. Stąd $\dim Y_2 - \dim f(U) = \dim Y_1 - \dim U$. □

STWIERDZENIE 1.56. *Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą odcinkami kraty $\mathfrak{L}(V)$ i $f\colon \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2$ μ-rzutem lub $\jmath$-rzutem. Jeśli $\mathcal{E}_1$ jest odcinkiem takim, że $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}_1$, to $f|\mathcal{E}_1$ jest odpowiednio μ-rzutem lub $\jmath$-rzutem odcinka $\mathcal{E}_1$ na pewien odcinek $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{X}_2$.*

DOWÓD. Załóżmy, że f jest μ-rzutem. Wówczas z 1.54 istnieją Z, Y takie, że $f = \mu_Y|\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_1 = [Z, Z+Y]$ i $\mathcal{X}_2 = [Z \cap Y, Y]$. Niech $\mathcal{E}_1 = [P, Q]$. Z założenia, że $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}_1$ mamy

$$Z \subseteq P \subseteq Q \subseteq Z + Y. \tag{1.40}$$

Weźmy dowolne $U \in \mathcal{E}_1$, czyli takie, że $P \subseteq U \subseteq Q$. Zauważmy, że

$$f|\mathcal{E}_1(U) = f(U) = U \cap Y = U \cap (Y \cap Q).$$

Oznaczmy $W := Y \cap Q$. Mamy $f|\mathcal{E}_1 = \mu_W|\mathcal{E}_1$. Pokażemy, że μ_W jest bijekcją na $\mathcal{E}_1$. Z (1.40) mamy

$$Q + Y \subseteq Z + Y + Y = Z + Y \subseteq P + Y \quad \text{oraz} \quad P + Y \subseteq Q + Y,$$

zatem $P + Y = Q + Y$. Stąd i z modularności kraty mamy następującą równość

$$P + W = P + (Y \cap Q) = (P + Y) \cap Q = (Q + Y) \cap Q = Q + (Y \cap Q) = Q + W,$$

co, z uwagi na 1.51, mówi, że μ_W jest bijekcją. Zatem z 1.53 $f|\mathcal{E}_1$ jest μ-rzutem.

Dla $\jmath$-rzutów rozumowanie jest dualne. □

STWIERDZENIE 1.57. *Jeśli f, g są μ-rzutami ($\jmath$-rzutami) takimi, że* $\mathrm{dm}(g) = \mathrm{rg}(f)$*, to gf jest μ-rzutem ($\jmath$-rzutem).*

DOWÓD. Przypuśćmy, że $f\colon \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2$, $g\colon \mathcal{X}_2 \longrightarrow \mathcal{X}_3$ są μ-rzutami, odpowiednio $f = \mu_W|\mathcal{X}_1$ i $g = \mu_Y|\mathcal{X}_2$. Wtedy dla dowolnego $U \in \mathcal{X}_1$ mamy

$$gf(U) = g(U \cap W) = (U \cap W) \cap Y = U \cap (W \cap Y) = \mu_{W \cap Y}(U).$$

Zgodnie z definicją 1.53 f, g są bijekcjami, a z założenia ich złożenie jest sensowne, więc jest bijekcją na $\mathcal{X}_1$, co kończy dowód.

W przypadku $\jmath$-rzutów rozumowanie jest analogiczne. □

1.5 Perspektywy

1.5.1 Rzuty z prostej na pęk odcinków

Niech G będzie pękiem odcinków kraty $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczonym przez odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$. Z uwagi na 1.42(iii) jeśli prosta p przecina $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ w różnych elementach U_1, U_2, to dla każdego $U \in p$ istnieje odcinek $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$ taki, że $U \in \mathcal{X}$. W przypadku gdy p nie przecina $\mathcal{X}'$, odcinek $\mathcal{X}$ jest wyznaczony jednoznacznie, ponieważ w przeciwnym razie mielibyśmy $U \in \mathcal{X}'$. Na odwrót, z 1.42(i) dla każdego odcinka $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$ istnieje U na p taki, że $U \in \mathcal{X}$. Zauważmy, że podobnie jak wcześniej, jeśli tylko p nie przecina $\mathcal{X}'$, to U jest zdeterminowany jednoznacznie, gdyż w przeciwnym razie $p \subseteq \mathcal{X}$, a zatem $U_1, U_2 \in \mathcal{X}$, czyli $U_1 \in \mathcal{X}'$ lub $U_2 \in \mathcal{X}'$, co prowadzi do sprzeczności.

Z powyższych rozważań wynika, że dla dowolnego pęku G i prostej p przecinającej elementy G i nie przecinającej $\bigcap \mathsf{G}$, relacja $\xi \subseteq \mathsf{G} \times p$ dana warunkiem

$$\mathcal{X} \;\xi\; U, \quad \text{wtw., gdy} \quad U \in \mathcal{X}, \quad \text{dla } \mathcal{X} \in \mathsf{G}, U \in p. \tag{1.41}$$

jest wzajemnie jednoznaczna. Następująca definicja jest zatem poprawna.

Definicja 1.58. Niech G będzie pękiem odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$ i p prostą przecinającą elementy G i nie przecinającą $\bigcap \mathsf{G}$. Odwzorowanie $\xi_p^{\mathsf{G}} \colon \mathsf{G} \longrightarrow p$ dane warunkiem

$$\xi_p^{\mathsf{G}}(\mathcal{X}) \in \mathcal{X} \cap p \quad \text{dla} \quad \mathcal{X} \in \mathsf{G},$$

nazywamy *perspektywą* z pęku odcinków G na prostą p.

Ponieważ $h = \xi_p^{\mathsf{G}}$ jest bijekcją, to istnieje h^{-1}. Stosujemy oznaczenia $h^{-1} = (\xi_p^{\mathsf{G}})^{-1} = \xi_{\mathsf{G}}^p$. Dla każdego $U \in p$ mamy

$$U \in h^{-1}(U) \in \mathsf{G}. \tag{1.42}$$

Lemat 1.59. *Niech $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ będzie pękiem odcinków oraz p prostą w $\mathfrak{L}(V)$ przecinającą $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ taką, że $p \cap \mathcal{X}' = \emptyset$.*

(i) *Jeśli $Y_1 \neq Y_2$, to $\jmath_{Y'}|p$ jest $\jmath$-rzutem z prostej p na $\overline{Y_1, Y_2}$.*

(ii) *Jeśli $Z_1 \neq Z_2$, to $\mu_{Z''}|p$ jest μ-rzutem z prostej p na $\overline{Z_1, Z_2}$.*

Dowód. (i) Przyjmijmy, że $p =]H, B[$. Z założenia $p \cap \mathcal{X}' = \emptyset$ prosta p przecina $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ w różnych elementach. To pozwala użyć 1.39(i), skąd w szczególności

$$\text{(i)} \quad H \subseteq Y', \qquad \text{(ii)} \quad B \subseteq Y''. \tag{1.43}$$

Zaczniemy od wykazania, że

$$\text{jeśli } U \in p \ \text{ to, } U \nsubseteq Y'. \tag{1.44}$$

Załóżmy, że tak nie jest tzn. istnieje U takie, że $U \in p$ i $U \subseteq Y'$. Jeśli G jest pękiem właściwym, to z założenia $Y_1 \neq Y_2$ musi być $Z_1 = Z_2 = Z$. Wtedy $Z \subseteq U$, bo $Z \subseteq H$ z 1.39(i), a więc $U \in \mathcal{X}'$, co przeczy temu, że prosta p nie przecina $\mathcal{X}'$.

Jeśli natomiast G jest waflem, to z 1.42(iii) istnieje odcinek $\mathcal{X}_3 = [Z_3, Y_3] \in \mathsf{G}$ taki, że $U \in \mathcal{X}_3$. Wówczas $Z_3 \subseteq U \subseteq Y' \subseteq Y_1, Y_2$. Ponieważ $\mathcal{X}_3$ nie może być jednocześnie równy $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$, więc $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3}$ lub $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3}$, ale w obu przypadkach dostajemy sprzeczność z definicją wafla 1.30. Tak więc zdanie (1.44) jest prawdziwe.

Teraz wykażemy, że $f := \jmath_{Y'}|p$ jest $\jmath$-rzutem. Zauważmy, że $H \prec\!\!\!\prec B$ oraz z (1.43)(i) mamy $H \subseteq B \cap Y' \subseteq B$. Przypuśćmy, że $H \neq B \cap Y'$. Z 1.5 istnieje U taki, że $H \prec U \subseteq B \cap Y'$. Stąd po pierwsze $U \in p$, po drugie $U \subseteq Y'$, ale zgodnie z (1.44) to nie jest możliwe, zatem $H = B \cap Y'$. Stąd, z uwagi na (1.43)(i), otrzymujemy $H \cap Y' = B \cap Y'$. Z 1.51 odwzorowanie f jest więc bijekcją, co zgodnie z 1.53 oznacza, że f jest $\jmath$-rzutem.

Wykażemy teraz, że $f(p) = \overline{Y_1, Y_2}$. Niech $U \in p$. Wtedy $H \prec U$ i z 1.1 dostajemy $H + Y' \preceq U + Y'$. Z (1.43)(i) mamy więc $Y' \preceq U + Y'$. Gdyby $Y' = U + Y'$, czyli $U \subseteq Y'$, to dostalibyśmy sprzeczność z (1.44). Zatem $Y' \prec U + Y'$. Ponieważ $U \subseteq B$, więc z (1.43)(ii) uzyskujemy $U + Y' \subseteq Y''$. Jednocześnie $Y' \prec\!\!\!\prec Y''$, zatem $f(U)$ leży na prostej $\overline{Y_1, Y_2}$, co kończy dowód z uwagi na fakt, że f jest $\jmath$-rzutem.

(ii) Rozumowanie biegnie dualnie do (i). □

Lemat 1.60. *Niech $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ będzie pękiem właściwym odcinków oraz p prostą w $\mathfrak{L}(V)$ taką, że $h = \xi^p_{\mathsf{G}}$ jest perspektywą.*

(i) *Jeśli $Z_1 = Z_2 = Z$, to $f := \jmath_{Y'}|p$ jest $\jmath$-rzutem i dla każdego $U \in p$ zachodzi $h(U) = [Z, f(U)]$.*

(ii) *Jeśli $Y_1 = Y_2 = Y$, to $g := \mu_{Z''}|p$ jest μ-rzutem i dla każdego $U \in p$ zachodzi $h(U) = [g(U), Y]$.*

Dowód. (i) Przyjmijmy, że $p = \,]H, B[$. Z 1.59(i) odwzorowanie f jest $\jmath$-rzutem z prostej p na $\overline{Y_1, Y_2}$. Niech $U \in p$. Z powyższego $f(U)$ leży na prostej $\overline{Y_1, Y_2}$. Zatem odcinek $\mathcal{X} := [Z, f(U)]$ jest elementem pęku G. Ponadto, $Z \subseteq H$ zgodnie z 1.39(i), więc $Z \subseteq U$. Stąd $U \in \mathcal{X}$, a co za tym idzie $h(U) = \mathcal{X}$.

(ii) Rozumowanie biegnie dualnie do (i). □

Lemat 1.61. *Niech $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ będzie waflem oraz p prostą w $\mathfrak{L}(V)$ przecinającą $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$. Wtedy $f := \jmath_{Y'}|p$ jest $\jmath$-rzutem, $g := \mu_{Z''}|p$ jest μ-rzutem i dla każdego $U \in p$ mamy $\xi^p_{\mathsf{G}}(U) = [g(U), f(U)]$.*

Dowód. Ponieważ $\mathcal{X}' = \emptyset$, więc mamy sensowną perspektywę $h = \xi^p_{\mathsf{G}}$. Niech $U \in p$. Z 1.40(ii) mamy odcinek $\mathcal{X} := [U \cap Z'', U + Y']$ taki, że $U \in \mathcal{X} \in \mathsf{G}$. Zatem $h(U) = \mathcal{X} = [g(U), f(U)]$. Z 1.59(i) f jest $\jmath$-rzutem, natomiast z 1.59(ii) g jest μ-rzutem. □

Lemat 1.62. *Niech $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ będzie pękiem odcinków, t, s prostymi przecinającymi $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ odpowiednio w T_i, S_i $(i = 1, 2)$, oraz $h_t = \xi^{\mathsf{G}}_t$, $h_s = \xi^{\mathsf{G}}_s$ perspektywami. Jeśli $T_1 \neq T_2$, $S_1 \neq S_2$ oraz $T_i \subseteq S_i$ $(i = 1, 2)$, to dla $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$ mamy $h_t(\mathcal{X}) \subseteq h_s(\mathcal{X})$.*

Dowód. Niech $\mathcal{X} = [Z, Y] \in \mathsf{G}$. Oznaczmy $T := h_t(\mathcal{X})$ oraz $S := h_s(\mathcal{X})$.

Niech najpierw G będzie pękiem właściwym typu gwiazda, tzn. niech $Z_1 = Z_2 = Z$. Wtedy zgodnie z 1.60(i) mamy

$$[Z, f_1(T)] = \xi^t_{\mathsf{G}}(T) = \mathcal{X} = \xi^s_{\mathsf{G}}(S) = [Z, f_2(S)],$$

gdzie $Y = f_1(T) = f_2(S)$, $f_1 = \jmath_{Y'}|t$, $f_2 = \jmath_{Y'}|s$ i f_1, f_2 są $\jmath$-rzutami.

Gdy G jest waflem, z 1.61 mamy

$$[g_1(T), f_1(T)] = \xi^t_{\mathsf{G}}(T) = \mathcal{X} = \xi^s_{\mathsf{G}}(S) = [g_2(S), f_2(S)],$$

gdzie

(a) $Z = g_1(T) = g_2(S)$, $g_1 = \mu_{Z''}|t$, $g_2 = \mu_{Z''}|s$ i g_1, g_2 są μ-rzutami, oraz

(b) $Y = f_1(T) = f_2(S)$, $f_1 = \jmath_{Y'}|t$, $f_2 = \jmath_{Y'}|s$ i f_1, f_2 są $\jmath$-rzutami.

Zauważmy, że w obu przypadkach

$$f_1 \colon t \longrightarrow p, \quad t = \overline{T_1, T_2} =]T', T''[, \quad p = \overline{Y_1, Y_2} =]Y', Y''[, \tag{1.45}$$

$$f_2 \colon s \longrightarrow p, \quad s = \overline{S_1, S_2} =]S', S''[, \quad p = \overline{Y_1, Y_2} =]Y', Y''[\tag{1.46}$$

gdzie $T' = T_1 \cap T_2$, $T'' = T_1 + T_2$, $S' = S_1 \cap S_2$, $S'' = S_1 + S_2$ zgodnie z 1.3.

Na mocy 1.53 odwzorowanie f_1 jest bijekcją, więc $T = f_1^{-1}(Y)$. Z (1.45), 1.54(ii) i 1.50 mamy $f_1^{-1} = \mu_{T''}$, a więc $T = Y \cap T''$. Analogicznie, z 1.53 f_2 jest bijekcją, więc $S = f_2^{-1}(Y)$. Z (1.46), 1.54(i) i 1.50 mamy $f_2^{-1} = \mu_{S''}$, a więc $S = Y \cap S''$. Ponieważ $T'' \subseteq S''$, więc $T \subseteq S$, co było do okazania.

W przypadku, gdy G jest pękiem właściwym typu układ, tzn. gdy $Y_1 = Y_2$, dowód biegnie dualnie w oparciu o 1.60(ii). □

Już w 1.38 została ustalona wzajemnie jednoznaczna zależność między elementami prostych p i q wyznaczających wafel $p \boxtimes q$. Poniższy lemat daje bardziej precyzyjny opis zależności między p, q.

LEMAT 1.63. *Niech p, q będą prostymi, takimi, że $p \boxtimes q$ jest quasi-pękiem. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Quasi-pęk $p \boxtimes q$ jest waflem.*

(2) *Istnieje μ-rzut f taki, że $p = f(q)$.*

(3) *Istnieje $\jmath$-rzut g taki, że $q = g(p)$.*

DOWÓD. (1) $\Longrightarrow$ (2) Niech $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ będzie waflem, oraz $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ różnymi odcinkami w G. Zauważmy, że prosta q przecina $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$. Z 1.61, dla każdego $Y \in q$ mamy $\xi^q_{\mathsf{G}}(Y) = [f(Y), Y]$, gdzie $f = \mu_{Z''}|q$ jest μ-rzutem.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Ponieważ f jest bijekcją, to z 1.50 i 1.54 $g = f^{-1}$ jest szukanym $\jmath$-rzutem.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Niech, zgodnie z 1.53, $g = \jmath_W|p$ będzie $\jmath$-rzutem takim, że $q = g(p)$, i niech $Z_1, Z_2 \in p$, takie, że $Z_1 \neq Z_2$. Ponieważ $g(Z_i) = Z_i + W$, to $Z_i \subseteq g(Z_i)$. Mamy więc odcinki $\mathcal{X}_i := [Z_i, Y_i]$, gdzie $Y_i = g(Z_i)$. Odwzorowanie g jest bijekcją, więc $Y_1 \neq Y_2$. Ponadto $W \subseteq Y_1 \cap Y_2 = Y'$. Z 1.54(ii) mamy

$$p = [W \cap Z'', Z''] = [Z', Z''] \quad \text{oraz} \quad q = [W, W + Z''] = [Y', Y''],$$

czyli w szczególności $W = Y'$ i $Z'' \cap Y' = Z'$. Ponieważ $Z' \neq Z''$, to z 1.41 odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ rozpinają wafel. □

1.5.2 Rozszerzanie pęków odcinków

W tej sekcji rozważamy nietrywialne odcinki $\mathcal{E}_i = [T_i, S_i]$, dla $i = 1, 2, \ldots$, oraz stosujemy następujące oznaczenia

$$T' = T_1 \cap T_2, \quad T'' = T_1 + T_2, \quad S' = S_1 \cap S_2, \quad S'' = S_1 + S_2, \tag{1.47}$$

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = [T'', S'] \quad \text{i} \quad \mathcal{E}'' = \langle \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \rangle = [T', S'']. \tag{1.48}$$

Definicja 1.64. Mówimy, że pęk odcinków G *rozszerza* pęk E jeśli dla każdego $\mathcal{E} \in \mathsf{E}$ istnieje $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$ taki, że $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$, i na odwrót, dla każdego $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$ istnieje $\mathcal{E} \in \mathsf{E}$ taki, że $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$. Pęk G rozszerza pęk E *jednoznacznie*, gdy powyższa zależność pomiędzy elementami G i E jest wzajemnie jednoznaczna. Rozszerzenie pęku E do pęku G jest *zgodne* gdy oba pęki są albo waflami, albo pękami właściwymi typu gwiazda, albo pękami właściwymi typu układ.

Innymi słowy, rozszerzenie pęku $\mathsf{E} = \overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$ do pęku $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ jest zgodne jeśli $T_1 = T_2$ jest równoważne $Z_1 = Z_2$ oraz $S_1 = S_2$ jest równoważne $Y_1 = Y_2$.

Rozszerzenie jednoznaczne nie zawsze musi być zgodne. W twierdzeniu 1.74 dowiedziemy, że każdy wafel można rozszerzyć do pęku właściwego, tak, że rozszerzenie jest jednoznaczne. Z definicji rozszerzenie to nie może być zgodne.

Stwierdzenie 1.65. *Jeśli pęk* G *rozszerza pęk* E *jednoznacznie, to albo:*

(i) G *i* E *są pękami właściwymi i rozszerzenie jest zgodne, albo*

(ii) G *jest pękiem właściwym, natomiast* E *jest waflem, albo*

(iii) G *i* E *są waflami.*

Dowód. Niech $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ i $\mathsf{E} = \overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$ oraz $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}_i$ $i = 1, 2$. Spośród czterech możliwych kombinacji na typy pęków G i E musimy wyeliminować tę, gdzie G jest waflem, a E pękiem właściwym, oraz wykazać zgodność rozszerzenia w (i).

Gdyby E był pękiem właściwym a G waflem, to mielibyśmy albo $T_1 = T_2 = T$, albo $S_1 = S_2 = S$. Wówczas odpowiednio $T \in \mathcal{X}'$ lub $S \in \mathcal{X}'$, co jest sprzeczne z definicją wafla.

W przypadku (i), gdyby $T_1 = T_2 = T$ i jednocześnie $Y_1 = Y_2 = Y$, to mielibyśmy

$$Z_i \subseteq T \subseteq S_j \subseteq Y, \quad \text{dla} \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

W szczególności zatem $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{X}_1$, co przeczyłoby jednoznaczności rozszerzenia. W przypadku gdy $S_1 = S_2$ i $Z_1 = Z_2$ rozumowanie biegnie dualnie. □

Twierdzenie 1.66. *Niech pęk* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *rozszerza pęk* $\mathsf{E} = \overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$.

(i) *Rozszerzenie jest jednoznaczne wtw., gdy* $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{X}'$.

(ii) *Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Rozszerzenie jest zgodne i jednoznaczne.*

(2) *Dla każdego* $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$ *odcinek* $\mathcal{X} \cap \mathcal{E}''$ *jest elementem* E.

(3) $\mathcal{E}'' \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}'$.

Dowód. (i) $\Rightarrow$: Jednoznaczność rozszerzenia pozwala na założenie że $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}_i$ dla $i = 1, 2$. Zgodnie z 1.65 są trzy przypadki do rozpatrzenia.

Jeśli G jest waflem, to $\mathcal{X}' = \emptyset$ i równość w tezie jest prawdziwa.

Rozważmy przypadek, gdy E jest waflem, a G pękiem właściwym. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $Z_1 = Z_2 = Z$. Wykażemy, że $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{X}' = \emptyset$. W tym celu przypuśćmy, że $U \in \mathcal{E}_i \cap \mathcal{X}'$. Ponieważ $\mathcal{E}_i = [T_i, S_i]$ oraz $\mathcal{X}' = [Z, Y']$, to $U \in [T_i + Z, S_i \cap Y']$, czyli

$$T_i \subseteq T_i + Z \subseteq U \subseteq S_i \cap Y' \subseteq Y'. \tag{1.49}$$

Zgodnie z 1.40(ii) mamy $S' \prec T_i + S' \prec S''$, czyli $T_i + S' \in \overline{S_1, S_2}$. Z 1.38(i) mamy $S_i = T_i + S'$ i ponieważ $S' = S_1 \cap S_2 \subseteq Y_1 \cap Y_2 = Y'$, więc z (1.49) mamy $S_i \subseteq Y'$. Zatem

$$Z \subseteq T_i \subseteq S_i \subseteq Y',$$

co oznacza, że $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}'$ i uzyskujemy sprzeczność z jednoznacznością rozszerzenia pęku E do G. W ostateczności $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}' = \emptyset = \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{X}'$.

Pozostaje przypadek, gdy E, G są pękami właściwymi i rozszerzenie jest zgodne. W tej sytuacji możemy założyć, że $Z_1 = Z_2 = Z$ i $T_1 = T_2 = T$. Wówczas

$$\mathcal{E}_i \cap \mathcal{X}' = [T, S_i \cap Y']. \tag{1.50}$$

Zauważmy, że $S' \subseteq S_i \cap Y' \subseteq S_i$ oraz jednocześnie $S' \prec S_i$. Zatem albo $S' = S_i \cap Y'$, albo $S_i \cap Y' = S_i$. W drugim przypadku $S_i \subseteq Y'$ i stąd $Z \subseteq T \subseteq S_i \subseteq Y'$, a więc $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}'$, co przeczy jednoznaczności rozszerzenia E do G. Dlatego też $S' = S_i \cap Y'$ i w konsekwencji, zgodnie z (1.50) mamy $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}' = [T, S'] = \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{X}'$.

$\Leftarrow$: Przypuśćmy, że istnieje odcinek $\mathcal{E} \in \mathsf{E}$ taki, że $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$ dla pewnych, różnych odcinków $\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4 \in \mathsf{G}$. Wtedy, zgodnie z 1.26 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}'$. Gdyby $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$, to mielibyśmy $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{X}'$, czyli $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$, co nie jest możliwe z uwagi na 1.25. Zatem $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_1$ i podobnie można wykazać, że $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_2$. Wówczas

$$\mathsf{E} = \overline{\mathcal{E}, \mathcal{E}_i} \qquad \text{oraz} \qquad \mathcal{E}_{3-i} \subseteq \langle \mathcal{E}, \mathcal{E}_i \rangle \subseteq \mathcal{X}_i,$$

dla $i = 1, 2$, a zatem $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{X}'$. Tak więc

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}_2$$

i dostajemy sprzeczność.

Teraz przypuśćmy, że istnieją różne odcinki $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4 \in \mathsf{E}$ takie, że $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4 \subseteq \mathcal{X}$ dla pewnego $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$. W tej sytuacji

$$\mathsf{E} = \overline{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4} \qquad \text{oraz} \qquad \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}'' \subseteq \mathcal{X},$$

Nie może być jednocześnie $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X} = \mathcal{X}_2$, możemy więc założyć, że $\mathcal{X} \neq \mathcal{X}_1$. Wtedy $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X} = \mathcal{X}'$. Podobnie jak we wcześniejszym rozumowaniu dostajemy $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{X}'$, a stąd $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ i sprzeczność ze względu na 1.25.

(ii) (1) $\Longrightarrow$ (2) Jednoznaczność rozszerzenia pozwala założyć, że $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}_i$ dla $i = 1, 2$.

Niech $\mathcal{X} = [Z, Y]$. Ponieważ $\mathcal{E}'' = [T', S'']$, więc zgodnie z 1.14(i) musimy pokazać, że odcinek $[Z + T', Y \cap S'']$ jest elementem E, czyli $Z + T' \in \overline{T_1, T_2}$ oraz $Y \cap S'' \in \overline{S_1, S_2}$. Wykażemy pierwsze należenie; drugie dowodzi się dualnie.

W przypadku, gdy $T_1 = T_2 = T$, to ze zgodności rozszerzenia mamy $Z_1 = Z_2 = Z$ i wtedy $Z + T' = Z + T$, a ponieważ $Z \subseteq T$, to $Z + T' = T \in \overline{T, T}$.

Teraz rozważmy przypadek gdy $T_1 \neq T_2$. Istnieje odcinek $\mathcal{E} = [T, S] \in \mathsf{E}$ taki, że $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$. Zatem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{E}''$, czyli $Z + T' \subseteq T$. Tak więc

$$T' \subseteq Z + T' \subseteq T \qquad \text{oraz} \qquad T' \prec T$$

i albo $T' = Z + T'$, albo $Z + T' = T$. Druga równość daj nam żądaną tezę. Jeśli zachodzi pierwsza z nich, to $Z \subseteq T'$. Ponieważ ze zgodności rozszerzenia nie może być $Z_1 = Z = Z_2$, więc $Z_i \subseteq T' \subseteq T_{3-i} \subseteq Y_{3-i}$ dla $i = 1$ lub $i = 2$. Tak więc w tej sytuacji G jest pękiem właściwym i ze zgodności rozszerzenia $Y_1 = Y_2 = Y$ oraz $S_1 = S_2 = S$. W konsekwencji

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{E}'' = [T', S] = \mathcal{E}'',$$

a w szczególności $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{X}$, co przeczy jednoznaczności rozszerzenia.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Zawsze możemy przyjąć, że $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}_1$, a wtedy $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{E}''$. Ponadto, z założenia $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{E}''$ jest elementem pęku E, więc odcinki $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{E}''$ są sąsiednie. Zatem z 1.25 mamy $\mathcal{E}_1 = \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{E}''$.

Gdyby odcinek $\mathcal{E}_2$ rozszerzał się do odcinka $\mathcal{X}_1$, to mielibyśmy $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{E}'' = \mathcal{E}_1$, co prowadzi do sprzeczności, jako że $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ rozpinają E. Tak więc $\mathcal{E}_2$ rozszerza się do odcinka różnego od $\mathcal{X}_1$ i bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{X}_2$. Analogicznie jak dla $\mathcal{E}_1$ mamy $\mathcal{E}_2 = \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{E}''$. Zatem z 1.26 otrzymujemy

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{E}'' \cap \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{E}'' = \mathcal{E}'' \cap \mathcal{X}'.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) Zauważmy najpierw, że $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{X}' \subseteq \mathcal{E}'' \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}'$ dla $i = 1, 2$. Z założonej równości wynika w szczególności, że $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{X}'$. Zatem

$$\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}_i \cap \mathcal{X}' \subseteq \mathcal{E}'' \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}', \quad i = 1, 2,$$

co razem z (i) daje jednoznaczność rozszerzenia E do G.

Zgodnie z 1.65 do wyeliminowania mamy przypadek, gdy G jest pękiem właściwym, a E waflem. Przypuśćmy nie wprost, że G jest pękiem właściwym i E jest waflem. W takim przypadku mamy $\mathcal{X}' \neq \emptyset$, $\mathcal{E}' = \emptyset$ oraz z 1.14(i)

$$\mathcal{E}'' \cap \mathcal{X}' = [T' + Z'', S'' \cap Y']. \tag{1.51}$$

Ponieważ E jest pękiem, to $T' \subseteq S''$, natomiast z jednoznaczności możemy przyjąć, że $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}_i$ dla $i = 1, 2$, a stąd $T' = T_1 \cap T_2 \subseteq Y_1 \cap Y_2 = Y'$. Tak więc $T' \subseteq S'' \cap Y'$. Ponadto $Z'' = Z_1 + Z_2 \subseteq S_1 + S_2 = S''$, a ponieważ G jest pękiem właściwym to $Z'' \subseteq Y'$. Stąd $Z'' \subseteq S'' \cap Y'$. Ostatecznie $T' + Z'' \subseteq S'' \cap Y'$, co zgodnie z (1.51) oznacza, że $\mathcal{E}' \neq \emptyset$ i uzyskujemy sprzeczność z założeniem, że E jest waflem. □

WNIOSEK 1.67. *Jeśli pęk odcinków* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *rozszerza pęk* $\mathsf{E} = \overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$ *jednoznacznie, to*

(i) *dla dowolnego* $\mathcal{E} \in \mathsf{E}$ *zachodzi* $\mathcal{E} \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}'$,

(ii) *prosta* p *przecinająca* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ *przecina* $\mathcal{E}'$ *wtw., gdy przecina* $\mathcal{X}'$.

DOWÓD. Załóżmy, że $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}_i$ dla $i = 1, 2$.

(i) Niech $\mathcal{E} \in \mathsf{E}$. Zgodnie z 1.26 mamy $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}, \mathcal{E}_i$, a ponieważ $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}_i$, to $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{X}'$ i inkluzja $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E} \cap \mathcal{X}'$ jest prawdziwa.

Aby wykazać inkluzje przeciwną, zauważmy, że nie może być jednocześnie $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2$. Załóżmy więc, ze $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_1$. Wówczas $\mathsf{E} = \overline{\mathcal{E}, \mathcal{E}_1}$ i z 1.66(i) mamy $\mathcal{E} \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}'$. W konsekwencji

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{X}' \subseteq \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}',$$

co było do okazania.

(ii) $\Rightarrow$: Jeśli prosta p przecina $\mathcal{E}'$, to ponieważ

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}',$$

więc p przecina również $\mathcal{X}'$.

$\Leftarrow$: Gdy p przecina $\mathcal{X}'$ weźmy $U \in p \cap \mathcal{X}'$. Ponieważ p przecina $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ to weźmy dodatkowo $U_i \in p \cap \mathcal{E}_i$. Gdy $U_1 = U_2$, to $U_1 \in \mathcal{E}'$ i prosta p przecina $\mathcal{E}'$ w U_1. Gdy natomiast $U_1 \neq U_2$, to z 1.42(iii) istnieje $\mathcal{E} \in \mathsf{E}$ taki, że $U \in \mathcal{E}$. Z (i) mamy $U \in \mathcal{E} \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}'$, co kończy dowód. □

Stwierdzenie 1.68. *Jeśli* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$, $\mathsf{E} = \overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$ *są pękami odcinków i* $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}_i$ $(i = 1, 2)$*, to pęk* G *rozszerza pęk* E.

Dowód. Niech $t = \overline{T_1, T_2}$ i $s = \overline{S_1, S_2}$.

Na początku rozważmy przypadek gdy G jest waflem. Wówczas t, s są prostymi i jednocześnie $\mathcal{X}' = \emptyset$, a zatem możemy rozważać rzuty $f = \xi_t^{\mathsf{G}}$, $g = \xi_s^{\mathsf{G}}$.

Weźmy $\mathcal{X} = [Z, Y] \in \mathsf{G}$. Pokażemy, że istnieje odcinek $\mathcal{E} \in \mathsf{E}$ taki, że $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$. Zgodnie z 1.62 możemy rozważać odcinek $\mathcal{E} := [f(\mathcal{X}), g(\mathcal{X})]$. Ponieważ $f(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X} \cap t$ i $g(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X} \cap s$ z 1.58, więc $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$ i zarazem $\mathcal{E} \in \mathsf{E}$.

Teraz, niech $\mathcal{E} = [T, S] \in \mathsf{E}$. Niech $\mathcal{X}_3 := f^{-1}(T)$ i $\mathcal{X}_4 := g^{-1}(S)$. Z (1.42) mamy $T \in \mathcal{X}_3$ i $S \in \mathcal{X}_4$. Gdyby $\mathcal{X}_3 \neq \mathcal{X}_4$, to ponieważ $Z_3 \subseteq T \subseteq S \subseteq Y_4$, pęk G nie byłby waflem. Zatem $T, S \in \mathcal{X} := \mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_4$ i ponieważ odcinki są wypukłymi podkratami mamy $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X} \in \mathsf{G}$.

Pozostał przypadek, gdy G jest pękiem właściwym. Możemy przyjąć bez utraty ogólności, że $Z_1 = Z_2 = Z$. W przypadku, gdy $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}'$ zauważmy, że $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}_2$. Z założenia $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{X}_2$. Dlatego też dla dowolnego $\mathcal{E} \in \mathsf{E}$ mamy $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}_2$. Z kolei dla każdego $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$, mamy $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$. Zatem przy założeniu, że $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}'$ pęk G rozszerza pęk E i dowód jest zakończony. W ten sam sposób dowodzimy, że jeśli $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{X}'$, to pęk G rozszerza pęk E. Możemy więc dalej założyć, że $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \nsubseteq \mathcal{X}'$.

Ponieważ $Z \subseteq T_1, T_2$, nasze założenie daje $S_1, S_2 \nsubseteq Y'$, czyli

$$S_1, S_2 \notin \mathcal{X}'. \tag{1.52}$$

Eliminuje to przypadek, gdy E jest pękiem właściwym takim, że $S_1 = S_2$, gdyż mielibyśmy wówczas $S_1, S_2 \subseteq Y_1 \cap Y_2 = Y'$. Zatem pęk E jest właściwy lub jest waflem, w obu jednak przypadkach $S_1 \neq S_2$, a więc s jest prostą. Z (1.52) i 1.42(iv) prosta s nie przecina $\mathcal{X}'$, a więc perspektywa $f = \xi_s^{\mathsf{G}}$ ma sens.

Niech $\mathcal{X} = [Z, Y] \in \mathsf{G}$. Weźmy $\mathcal{E} := [T, f(\mathcal{X})]$, gdzie T jest jednoznacznie wyznaczony przez $\xi_s^{\mathsf{G}}(\mathcal{X})$ zgodnie z 1.38. Z określenia rzutu 1.58 mamy w szczególności $f(\mathcal{X}) \in \mathcal{X}$, skąd

$$Z \subseteq T \subseteq f(\mathcal{X}) \subseteq Y,$$

a więc $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$.

Teraz niech $\mathcal{E} = [T, S] \in \mathsf{E}$. Ponieważ $S \in s$, więc możemy rozważać odcinek $\mathcal{X} := f^{-1}(S)$. Zgodnie z (1.42) mamy $S \in \mathcal{X} \in \mathsf{G}$. Pęk G jest pękiem właściwym typu gwiazda, stąd $\mathcal{X} = [Z, Y]$, dla pewnego $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$. Zatem

$$Z \subseteq T_1 \cap T_2 \subseteq T \subseteq S \subseteq Y,$$

a stąd $\mathcal{E} \in \mathcal{X}$. □

Bezpośrednim wnioskiem wynikającym z 1.66 i 1.68 jest

Wniosek 1.69. *Przy założeniach* 1.68*, jeśli dodatkowo* $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{X}'$*, to* G *rozszerza* E *jednoznacznie.*

Stwierdzenie 1.70. *Jeśli* $\mathsf{E} = \overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$ *jest pękiem właściwym, oraz* $\mathcal{X}'$ *odcinkiem takim, że* $\mathcal{E}'' \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}'$*, to odcinki* $\mathcal{X}_i = \langle \mathcal{X}', \mathcal{E}_i \rangle$*, gdzie* $i = 1, 2$ *rozpinają pęk właściwy* G *o wierzchołku* $\mathcal{X}'$*. Pęk* G *rozszerza* E *jednoznacznie i zgodnie.*

Dowód. Niech $\mathcal{X}' = [Z'', Y']$. Załóżmy, że $T_1 = T_2 = T$. Z założeń i z 1.14 mamy

$$[T + Z'', S'' \cap Y'] = \mathcal{E}'' \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}' = [T, S'], \tag{1.53}$$

oraz

$$\mathcal{X}_i = \langle \mathcal{X}', \mathcal{E}_i \rangle = [Z'' \cap T, Y' + S_i]. \tag{1.54}$$

Z (1.53) mamy $T + Z'' = T$, czyli $Z'' \subseteq T$. Oznaczmy $Y_i := Y' + S_i$. Zatem w (1.54) otrzymujemy $\mathcal{X}_i = [Z'', Y_i]$. Wykażemy, że $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ rozpinają pęk.

Rozważmy przesunięcie kratowe $f = \jmath_{Y'} | [S', S'']$. Z (1.53) mamy $S'' \cap Y' = S'$, skąd

$$Y' \cap S' = S' = Y' \cap S'',$$

a więc z uwagi na 1.51 odwzorowanie f jest bijekcją i dalej zgodnie z definicją 1.53 f jest $\jmath$-rzutem. Zatem obrazem prostej $s = \overline{S_1, S_2}$ przy f jest również prosta. Ponieważ $f(S_i) = Y_i$, więc $f(s) = \overline{Y_1, Y_2}$. W rezultacie odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ rozpinają pęk właściwy G typu gwiazda.

Zauważmy, że $Y_1 \cap Y_2 = f(S') = S' + Y' = Y'$, skąd

$$\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = [Z'', Y_1 \cap Y_2] = [Z'', Y'] = \mathcal{X}',$$

a więc z 1.26 wierzchołkiem pęku G jest $\mathcal{X}'$. Z określenia odcinków $\mathcal{X}_i$ wynika, że $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}_i$, a więc z 1.68 pęk G rozszerza pęk E. Zgodnie z 1.66(ii) założenie $\mathcal{E}'' \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}'$ daje jednoznaczność i zgodność rozszerzenia E do G. □

W kolejnych dwu lematach zanotujemy konstrukcje odwrotne do tej z 1.70.

Lemat 1.71. *Niech* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *będzie pękiem właściwym w kracie* $\mathfrak{L}(V)$ *i* $Q \in \mathcal{X}'$*.*

(i) *Jeśli* $Z_1 = Z_2$*, to niech* $\mathcal{E}_i := [Q, Y_i]$*.*

(ii) *Jeśli* $Y_1 = Y_2$*, to niech* $\mathcal{E}_i := [Z_i, Q]$*.*

Odcinki $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ *rozpinają pęk właściwy* E *taki, że pęk* G *rozszerza pęk* E *jednoznacznie i zgodnie.*

Dowód. Załóżmy, że spełniony jest warunek (i), czyli $Z_1 = Z_2 = Z$. Z samego określenia odcinków $\mathcal{E}_i$ mamy pęk właściwy $\mathsf{E} = \overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$. Ponieważ

$$\mathcal{E}_i = [Q, Y_i] \subseteq [Z, Y_i] = \subseteq \mathcal{X}_i,$$

więc z 1.68 pęk G rozszerza pęk E. Zauważmy, że dla $\mathcal{E}'' = \langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rangle$ i $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ z 1.14 zachodzi

$$\mathcal{E}'' \cap \mathcal{X}' = [Q, Y''] \cap [Z, Y'] = [Q, Y'] = \mathcal{E}'.$$

Z uwagi na 1.66(ii) dowód jest zakończony.

W przypadku (ii) rozumowanie jest analogiczne. □

Lemat 1.72. *Niech* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *będzie pękiem odcinków i* p *prostą w kracie* $\mathfrak{L}(V)$ *przecinającą* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *tak, że* $p \cap \mathcal{X}' = \emptyset$*. Quasi-pęki* $\overline{Z_1, Z_2} \boxtimes p$*,* $p \boxtimes \overline{Y_1, Y_2}$ *są pękami odcinków takim, że pęk* G *rozszerza je jednoznacznie.*

Dowód. (i) Niech $\mathsf{E} := p \boxtimes \overline{Y_1, Y_2}$. Jeśli $Y_1 = Y_2$, to E jest pękiem właściwym, jeśli natomiast $Y_1 \neq Y_2$, to z 1.59(i) przesunięcie $\jmath_{Y'}|p$ jest $\jmath$-rzutem z prostej p na prostą $\overline{Y_1, Y_2}$, a więc z 1.63 E jest waflem.

Z założenia prosta p przecina $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, więc weźmy $T_i \in p \cap \mathcal{X}_i$. Rozważmy odcinki $\mathcal{E}_i = [T_i, Y_i]$. Zauważmy, że $T_1 \neq T_2$, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $T_i \in p \cap \mathcal{X}'$. Stąd $p = \overline{T_1, T_2}$, a co za tym idzie $\mathsf{E} = \overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$. Ponieważ $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}_i$, więc z 1.68 pęk G rozszerza pęk E.

Ponieważ prosta p nie przecina $\mathcal{X}'$, możemy więc rozważać rzut $g := \xi^p_{\mathsf{G}}$ z prostej p na pęk G. Zauważmy, że z 1.38 perspektywa $f := \xi^{\mathsf{E}}_p$ z pęku E na prostą p jest również sensowna.

Niech $\mathcal{E} \in \mathsf{E}$. Ponieważ G rozszerza E, więc istnieje $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$ taki, że $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$. Zauważmy, że $f(\mathcal{E}) \in p \cap \mathcal{E}$. Zatem $f(\mathcal{E}) \in \mathcal{X}$ i stąd $\mathcal{X} = gf(\mathcal{E})$, co oznacza, że $\mathcal{X}$ jest wyznaczony jednoznacznie. Na odwrót, jeśli $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$. Wtedy istnieje $\mathcal{E} \in \mathsf{E}$ taki, że $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$. Rozumując jak poprzednio otrzymujemy $gf(\mathcal{E}) = \mathcal{X}$, a stąd $\mathcal{E} = f^{-1}g^{-1}(\mathcal{X})$, czyli $\mathcal{E}$ jest wyznaczony jednoznacznie przez $\mathcal{X}$.

Dla quasi-pęku $\overline{Z_1, Z_2} \boxtimes p$ rozumowanie jest dualne. □

Stwierdzenie 1.73. *Jeśli proste p, q wyznaczają wafel $\mathsf{G} = p \boxtimes q$, to*

(i) *dla dowolnego $\jmath$-rzutu f takiego, że $\mathrm{dm}(f) = q$, $p \boxtimes f(q)$ jest waflem rozszerzającym G, oraz*

(ii) *dla dowolnego μ-rzutu g takiego, że $\mathrm{dm}(g) = p$, $g(p) \boxtimes q$ jest waflem rozszerzającym G.*

Dowód. (i) Z 1.63 mamy $\jmath$-rzut f_0 taki, że $q = f_0(p)$. Z 1.57 złożenie ff_0 jest $\jmath$-rzutem takim, że $f(q) = ff_0(p)$, więc ponownie w oparciu o 1.63 $p \boxtimes f(q)$ jest waflem.

Niech $\mathcal{X} = [Z, Y] \in \mathsf{G}$. Zgodnie z definicją $\jmath$-rzutu 1.53, mamy $Y \subseteq f(Y)$, więc $\mathcal{X} \subseteq [Z, f(Y)] \in p \boxtimes f(q)$. Ponieważ f jest bijekcją, to dla dowolnego odcinka $[Z, Y] \in p \boxtimes f(q)$, mamy $[Z, f^{-1}(Y)] \in \mathsf{G}$. Zatem $p \boxtimes f(q)$ rozszerza G.

(ii) Dowód przebiega analogicznie jak w przypadku (i). □

Stwierdzenie 1.74. *Każdy wafel można rozszerzyć do pęku właściwego typu gwiazda i do pęku właściwego typu układ tak, że rozszerzenie jest jednoznaczne.*

Dowód. Niech $t = \overline{T_1, T_2}$, $s = \overline{S_1, S_2}$ będą prostymi i $\mathsf{E} = \overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2} = t \boxtimes s$ dowolnym waflem. Weźmy $Z := T'$ i rozważmy pęk właściwy $\mathsf{G} := \{Z\} \boxtimes s$. Pęk G jest typu gwiazda i rozszerza pęk E. Z 1.31 mamy $T_i \nsubseteq S'$. W konsekwencji, zgodnie z 1.14 otrzymujemy

$$\mathcal{E}_i \cap \mathcal{X}' = [T_i + Z, S_i \cap Y'] = [T_i, Y'] = \emptyset,$$

dla $i = 1, 2$. Zatem, z uwagi na 1.66(i) rozszerzenie jest jednoznaczne.

Aby uzyskać pęk typu układ należy wziąć $Y := S''$ oraz pęk $\mathsf{G} := t \boxtimes \{Y\}$. Dalsze rozumowanie biegnie jak wyżej. □

1.6 Rzuty pomiędzy odcinkami kraty

1.6.1 Uogólnione rzuty środkowe i ślizgi

W geometrii rzutowej rzutem zwykle jest bijekcja pomiędzy dwiema prostymi. W tej pracy zajmujemy się rzutowaniem odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Używamy oznaczeń przyjętych w (1.18) i (1.19) na stronie 13.

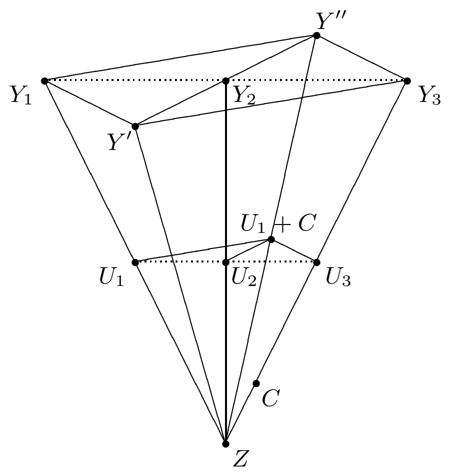
Lemat 1.75. *Niech* G *będzie pękiem właściwym odcinków w* $\mathfrak{L}(V)$, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$, $\mathcal{X}_3 \neq \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}' := \bigcap \mathsf{G}$ *oraz niech* $\mathcal{Y}$ *będzie odcinkiem kowymiaru 1 w* $\mathcal{X}_3$ *takim, że odcinki* $\mathcal{X}', \mathcal{Y}$ *są komplementarne względem* $\mathcal{X}_3$.

(i) *Jeśli* $Z_1 = Z_2 = Z$, *to istnieje* C *takie, że* $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$ *oraz* $Z \prec C \subseteq Y_3$ *i* $Z = Y' \cap C$, $Y_3 = Y' + C$.

(ii) *Jeśli* $Y_1 = Y_2 = Y$, *to istnieje* C *takie, że* $\mathcal{Y} = [Z_3, C]$ *oraz* $Z_3 \subseteq C \prec Y$ *i* $Y = Z'' + C$, $Z_3 = Z'' \cap C$.

(iii) *Dla każdego* $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ *istnieje dokładnie jeden* $U_3 \in \mathcal{Y}$ *sąsiedni z* U_1.

(iv) *Dla* $U_1 \in \mathcal{X}_1$ *istnieje dokładnie jeden* $U_2 \in \mathcal{X}_2$ *sąsiedni z* U_1 *taki, że prosta przez* U_1, U_2 *przecina* $\mathcal{Y}$. *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$, *to* $U_2 \in \mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}'$, *jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}'$, *to* $U_2 = U_1$. *Ponadto, dla* $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$, *jeśli* $Z_1 = Z_2$, *to* $U_2 = (U_1 + C) \cap Y_2$, *jeśli natomiast* $Y_1 = Y_2$, *to* $U_2 = (U_1 \cap C) + Z_2$, *gdzie* C *takie jak w* (i) *lub* (ii) *odpowiednio.*



Rysunek 1.11

Dowód. (i) W tym wypadku mamy $\mathcal{X}' = [Z, Y']$, $\mathcal{X}_3 = [Z, Y_3]$. Element C o żądanych własnościach istnieje z 1.20(i).

(ii) Tutaj $\mathcal{X}' = [Z'', Y]$, $\mathcal{X}_3 = [Z_3, Y]$. Element C o żądanych własnościach istnieje z 1.20(ii).

(iii) Załóżmy, że G jest typu gwiazda, tzn. $Z_1 = Z_2 = Z$. Z (i) istnieje C takie, że $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$ oraz

$$Z \prec C \subseteq Y_3, \qquad Z = Y' \cap C, \qquad Y_3 = Y' + C. \tag{1.55}$$

Niech $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$. Oznaczmy $H := U_1 \cap Y'$. Ponieważ $Y' \prec Y_1$, $U_1 \subseteq Y_1$ i $U_1 \nsubseteq Y'$, to z 1.2 mamy $H \prec U_1$. Weźmy $U_3 := C + H$. Ponieważ $Z \prec C$ z (1.55), więc $Z + H \preceq C + H$ z 1.1. Stąd $H \preceq C + H$, gdyż $Z \subseteq U_1, Y'$. Gdyby $H = C + H$, to mielibyśmy $C \subseteq H$, i stąd $C \subseteq Y'$, co jest sprzeczne z (1.55). Ostatecznie $H \prec U_3$. Zatem U_1, U_3 są sąsiednie.

Odcinki $\mathcal{X}'$ i $\mathcal{Y}$ są komplementarne więc $U_3 \in \mathcal{Y} = \mathcal{Y} \setminus \mathcal{X}'$. Przypuśćmy, że poza U_3 w $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{X}'$ istnieje U_3' różny od U_3' i sąsiedni z U_1. Wówczas $C \subseteq U_1$ lub $U_1 \subseteq Y_3$

z 1.17 oraz 1.18. W pierwszym przypadku $C \subseteq Y'$, w drugim $U_1 \in \mathcal{X}_3$. W obu przypadkach dostajemy sprzeczność.

Dla G typu układ rozumowanie jest dualne.

(iv) Zaczniemy od wykazania, że dla $U_1 \in \mathcal{X}'$ istnieje prosta przez U_1 przecinająca $\mathcal{Y}$ oraz każda prosta przez U_1 przecinająca $\mathcal{Y}$ przecina $\mathcal{X}_2$ jedynie w U_1.

Jeśli, $U_1 \in \mathcal{X}'$, to z 1.21(i) istnieje $U_3 \in \mathcal{Y}$ sąsiedni z U_1. Ponieważ $\mathcal{X}'$ i $\mathcal{Y}$ są komplementarne, więc $U_1 \neq U_3$, a zatem U_1, U_3 wyznaczają prostą $\overline{U_1, U_3}$ w $\mathfrak{L}(V)$.

Jeśli prosta p przez U_1 przecina $\mathcal{Y}$, powiedzmy w U_3, to z 1.21(ii) elementy U_1, U_3 są jedynymi elementami na p z odpowiednio $\mathcal{X}'$ i $\mathcal{Y}$, tzn. $p \cap \mathcal{X}' = \{U_1\}$ i $p \cap \mathcal{Y} = \{U_3\}$. Zauważmy, że prosta p przecina $\mathcal{X}_2$ w U_1. Gdyby prosta p przecinała $\mathcal{X}_2$ w U_2 różnym od U_1, to mielibyśmy $p \subseteq \mathcal{X}_2$ z 1.15(iii), (ii), a stąd $U_3 \in \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{X}_3 = \mathcal{X}'$ z 1.26, co przeczy komplementarności $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{X}'$.

Teraz rozważmy przypadek, gdy $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$. Pokażemy, że istnieje dokładnie jeden $U_2 \in \mathcal{X}_2$ sąsiedni z U_1 taki, że prosta przez U_1, U_2 przecina $\mathcal{Y}$.

Z (iii) istnieje dokładnie jeden $U_3 \in \mathcal{Y}$ sąsiedni z U_1. Ponieważ $U_1 \neq U_3$, więc możemy rozważać prostą $p = \overline{U_1, U_3}$. Z 1.43 istnieje $U_2 \in \mathcal{X}_2$ taki, że $U_2 \in p$. Zauważmy, że $U_3 \in \mathcal{X}_3 \setminus \mathcal{X}'$ i $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3}$, więc z 1.42(iv) mamy $p \cap \mathcal{X}' = \emptyset$, a co za tym idzie $U_2 \notin \mathcal{X}'$.

Gdyby istniał $U_2' \in \mathcal{X}_2$ różny od U_2 taki, że $U_2' \in p$, to z 1.15(iii), (ii) mielibyśmy $p \subseteq \mathcal{X}_2$, skąd $U_1 \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}'$, co przeczy założeniu o wyborze U_1.

Pozostaje wykazać prawdziwość wzorów dla U_2. W mocy pozostaje założenie $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$. Rozważmy przypadek $Z_1 = Z_2 = Z$. Wówczas z (i) istnieje C takie, że $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$ oraz prawdziwe są warunki (1.55). Rozważmy $Q := (U_1 + C) \cap Y_2$. Wykażemy, że (a) $Q \in \mathcal{X}_2$, (b) $Q \sim U_1$ i (c) $\overline{U_1, Q}$ przecina $\mathcal{Y}$. Własność (a) wynika wprost z określenia Q. Aby wykazać prawdziwość (b) znajdziemy wspólny następnik elementów U_1 i Q.

Z (1.55) mamy $Z \prec C$, więc z 1.1

$$U_1 = U_1 + Z \preceq U_1 + C.$$

Gdyby $U_1 = U_1 + C$, to byłoby $C \subseteq U_1$, a stąd $C \subseteq Y_1$ i mielibyśmy $C \in \mathcal{X}_1$, czyli $C \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_3 = \mathcal{X}'$, co jest sprzeczne z komplementarnością $\mathcal{X}'$ i $\mathcal{Y}$. Pokazaliśmy więc, że $U_1 \prec U_1 + C$.

Ponieważ $Y_2 \prec Y''$, więc z 1.1 mamy

$$Q = (U_1 + C) \cap Y_2 \preceq (U_1 + C) \cap Y'' = U_1 + C.$$

Gdyby $Q = U_1 + C$, to mielibyśmy $U_1 + C \subseteq Y_2$, co z uwagi na inkluzję $Z \subseteq C$ w (1.55) oznaczałoby, że $C \in \mathcal{X}_2$. Prowadzi to do sprzeczności z komplementarnością $\mathcal{X}'$ i $\mathcal{Y}$, gdyż mielibyśmy wtedy $C \in \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{X}_3 = \mathcal{X}'$. Zatem $Q \prec U_1 + C$, co daje prawdziwość (b).

Niech teraz $p := \overline{U_1, Q}$. Z definicji prostej w $\mathfrak{L}(V)$ mamy $p =]U_1 \cap Q, U_1 + Q[$. Rozwijając Q otrzymujemy

$$U_1 \cap Q = U_1 \cap (U_1 + C) \cap Y_2 = U_1 \cap Y_2,$$

Natomiast z faktu, że $U_1, Q \prec U_1 + C$ oraz 1.3(iii) mamy $U_1 + Q = U_1 + C$, skąd $p =]U_1 \cap Y_2, U_1 + C[$.

Weźmy $U_3 := (U_1 + C) \cap Y_3$. Zaobserwujmy, że $U_3 \in \mathcal{Y}$. Stosując to samo rozumowanie co dla Q można dowieść, że $U_3 \prec U_1 + C$. Ponieważ

$$U_1 \cap Y_2 \subseteq Y_1 \cap Y_2 = Y' \subseteq Y_3 \quad \text{oraz} \quad U_1 \cap Y_2 \subseteq U_1 + C,$$

więc $U_1 \cap Y_2 \subseteq U_3$, co razem z $U_3 \prec U_1 + C$ wystarczy by twierdzić, że $U_3 \in p$. Ostatecznie prawdziwy jest warunek (c) i z tego, że U_2 jest jedynym elementem spełniającym (a), (b), (c) mamy $U_2 = Q$, co kończy dowód.

W przypadku gdy G jest pękiem typu układ dowód przebiega analogicznie. □

Zauważmy, że jeśli U_1 ma wysokość k w 1.75, to odpowiedni U_2 ma również wysokość k. Przechodzimy teraz do określenia podstawowego dla całej rozprawy pojęcia rzutu.

Definicja 1.76. Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}$ będą odcinkami kraty $\mathfrak{L}(V)$ spełniającymi założenia 1.75. Z uwagi na 1.75(iv) możemy określić odwzorowanie $\overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\downarrow\mathcal{Y}}} \colon \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2$ warunkiem

$$\overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\downarrow\mathcal{Y}}}(U_1) = U_2 \text{ wtw., gdy } U_1, U_2, U_3 \text{ leżą na jednej prostej dla pewnego } U_3 \in \mathcal{Y}, \tag{1.56}$$

gdzie $U_i \in \mathcal{X}_i$. Tak określone przekształcenie nazywamy *uogólnionym rzutem środkowym* z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ o środku $\mathcal{Y}$.

Zauważmy, że $\overset{\mathcal{X}_2}{\underset{\mathcal{X}_1}{\downarrow\mathcal{Y}}}\overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\downarrow\mathcal{Y}}} = \mathrm{id}_{\mathcal{X}_1}$, a więc uogólniony rzut środkowy jest bijekcją. W oparciu o 1.75(iv) wzór analityczny rzutu $f = \overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\downarrow\mathcal{Y}}}$ jest następujący:

$$f(U) = \begin{cases} (U + C) \cap Y_2, & Z_1 = Z_2,\ U \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}' \\ (U \cap C) + Z_2, & Y_1 = Y_2,\ U \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}' \\ U, & U \in \mathcal{X}', \end{cases} \tag{1.57}$$

gdzie C określone jak w 1.75(i) bądź 1.75(ii). Lemat 1.75 wraz z 1.19 mówią, że dla dowolnych odcinków $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ rozpinających pęk właściwy istnieje uogólniony rzut środkowy z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$.

Definicja 1.77. Niech G będzie waflem w kracie $\mathfrak{L}(V)$ i niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą różnymi elementami G. Na mocy 1.40(i) możemy określić odwzorowanie $\zeta^{\mathcal{X}_1}_{\mathcal{X}_2} = \downarrow^{\mathcal{X}_1}_{\mathcal{X}_2} \colon \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2$ warunkiem

$$\downarrow^{\mathcal{X}_1}_{\mathcal{X}_2}(U_1) = U_2 \quad \text{wtw., gdy} \quad U_1, U_2 \text{ są sąsiednie}, \tag{1.58}$$

gdzie $U_i \in \mathcal{X}_i$. Takie odwzorowanie nazywamy *ślizgiem* z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$.

Dla dowolnych $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ rozpinających wafel istnieje ślizg z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$. Zgodnie z 1.40 ślizg jest wyznaczony jednoznacznie przez wafel, a jego wzór analityczny jest następujący:

$$f(U) = (Z_2 + U) \cap Y_2 \quad \text{dla} \quad U \in \mathcal{X}_1. \tag{1.59}$$

Zgodnie z (1.59) i 1.53 ślizg jest złożeniem μ-rzutu μ_{Y_2} i $\jmath$-rzutu $\jmath_{Z_2}$ (z modularności kraty kolejność składania jest obojętna). W terminologii [4, Roz. III.1] ślizg jest więc złożeniem perspektywy dolnej z perspektywą górną, a zatem odcinek, lub ułamek zgodnie z [4, Roz. III.1], $\mathcal{X}_1$ jest *rzutowy względem* $\mathcal{X}_2$. Innymi słowy przedstawione przez nas pojęcie ślizgu odpowiada pojęciu *rzutowości* w [4, Roz. III.1].

Zwróćmy uwagę, że o ile uogólniony rzut środkowy może być identycznością, to ślizg nie. Dalej mówimy krótko *rzut* dla ślizgów i uogólnionych rzutów środkowych.

STWIERDZENIE 1.78. *Rzuty zachowują porządek kraty* $\mathfrak{L}(V)$.

DOWÓD. Niech f będzie rzutem z odcinka $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ i niech $U, W \in \mathcal{X}_1$. Mamy pokazać, że gdy $U \subseteq W$, to $f(U) \subseteq f(W)$.

Jeśli f jest uogólnionym rzutem środkowym, to zgodnie z (1.57) wystarczy rozważyć trzy przypadki: (a) $U, W \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$, (b) $U \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ i $W \in \mathcal{X}'$ oraz (c) $U \in \mathcal{X}'$ i $W \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$. Dowód przeprowadzimy dla pęku typu gwiazda, tzn. gdy $Z_1 = Z_2 = Z$.

W przypadku (a) do obu stron inkluzji $U \subseteq W$ dodajemy C i otrzymujemy $U + C \subseteq W + C$, następnie obie strony mnożymy przez Y_2 i zgodnie ze wzorem (1.59) uzyskujemy $f(U) \subseteq f(W)$.

Rozważmy teraz sytuację (b). Wówczas $W \subseteq Y'$ i stąd $U \subseteq Y' \subseteq Y_2$, co oznacza, że $U \subseteq \mathcal{X}'$ sprzecznie z naszym założeniem.

Przy założeniu (c), mamy $U \subseteq Y' \subseteq Y_2$ i jednocześnie $U \subseteq U + C \subseteq W + C$, więc $U \subseteq (W + C) \cap Y_2$ i zgodnie z (1.57) otrzymujemy $f(U) \subseteq f(W)$.

W przypadku gdy f jest ślizgiem, to do obu stron inkluzji $U \subseteq W$ dodajemy Z_2 i otrzymujemy $Z_2 + U \subseteq Z_2 + W$, następnie obie strony mnożymy przez Y_2 i z (1.59) uzyskujemy $f(U) \subseteq f(W)$. □

Z powyższego faktu wynika, że rzuty są izomorfizmami odpowiednich krat. W takim razie obrazami odcinków przy rzutach są odcinki, co więcej długość odcinka i jego obrazu jest taka sama. Konsekwencją tego faktu jest

STWIERDZENIE 1.79. *Obrazem prostej przy rzucie w kracie* $\mathfrak{L}(V)$ *jest prosta.*

STWIERDZENIE 1.80. *Jeśli* f *jest rzutem z odcinka* $\mathcal{X}_1$ *na* $\mathcal{X}_2$ *w kracie* $\mathfrak{L}(V)$, *to* $f(Z_1) = Z_2$ *i* $f(Y_1) = Y_2$.

DOWÓD. Przypuśćmy nie wprost, że $f(Z_1) \neq Z_2$. Ponieważ $f(Z_1) \in \mathcal{X}_2$, więc prawdziwa jest inkluzja $Z_2 \subsetneq f(Z_1)$. Rzuty są odwracalne, zatem z 1.78 mamy $f^{-1}(Z_2) \subseteq f^{-1}(f(Z_1)) = Z_1$ i jednocześnie $Z_1 \subseteq f^{-1}(Z_2)$ gdyż $f^{-1}(Z_2) \in \mathcal{X}_1$. Stąd $Z_1 = f^{-1}(Z_2)$, a tym samym $f(Z_1) = Z_2$ i otrzymujemy sprzeczność. □

TWIERDZENIE 1.81. *Niech* $\mathcal{X}_i$ *będą odcinkami* $\mathfrak{L}(V)$ *takimi, że* $Z_i \neq \Theta$ *oraz* $Y_i \neq V$, *gdzie* $i = 1, 2$. *Jeśli* $h = \begin{smallmatrix}\mathcal{X}_1 \\ \mathcal{Y} \\ \mathcal{X}_2\end{smallmatrix}$ *jest uogólnionym rzutem środkowym, to istnieją ślizgi* f, g *takie, że* $h = gf$.

DOWÓD. Odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ rozpinają pęk właściwy, zatem mamy dwa przypadki do rozpatrzenia.

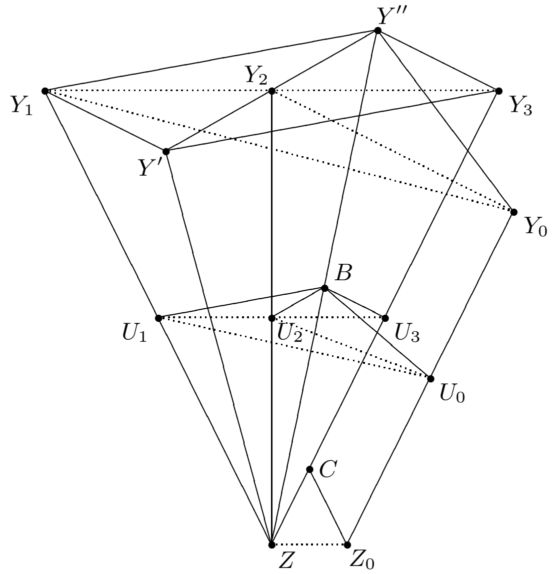
Załóżmy, że $Z_1 = Z_2 = Z$. Skonstruujemy odcinek $\mathcal{X}_0$, który tworzy wafle z $\mathcal{X}_1$ i z $\mathcal{X}_2$. Ponieważ $Z \neq \Theta$, więc istnieje niezerowy wektor $z \in Z$. Wektor z można uzupełnić do bazy $\{e_i\}_{i \in I}$ podprzestrzeni Y''. Wektory bazowe e_i różne od z rozpinają podprzestrzeń Y_0 taką, że

$$Y_0 \prec Y'' \quad \text{i} \quad Z \not\subseteq Y_0. \tag{1.60}$$

Zgodnie z definicją uogólnionego rzutu środkowego i 1.75(i) istnieją Y_3, C takie, że

$$Y_3 \in \overline{Y_1, Y_2}, \quad Y_3 \neq Y_1, Y_2, \quad Z \prec C \subseteq Y_3, \quad Z = Y' \cap C, \quad Y_3 = Y' + C. \qquad (1.61)$$

oraz $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$.



Rysunek 1.12

Weźmy $Z_0 := C \cap Y_0$. Ponieważ $Y_0 \prec Y''$ z (1.60), tak więc z 1.1 otrzymujemy $C \cap Y_0 \preceq C \cap Y''$ i z uwagi na inkluzję $C \subseteq Y''$ dostajemy $Z_0 = C \cap Y_0 \preceq C$. Gdyby $Z_0 = C$, to mielibyśmy $C \subseteq Y_0$. Stąd i z (1.61) $Z \subseteq Y_0$, co przeczy (1.60). Dlatego też $Z_0 \prec C$ i w konsekwencji elementy Z, Z_0 są sąsiednie.

Gdyby $Z_0 \subseteq Y_i$ dla $i = 1$ lub $i = 2$, to ponieważ $Z_0 \subseteq C \subseteq Y_3$ z określenia Z_0 i (1.61), więc $Z_0 \subseteq Y'$. Stąd mielibyśmy $Z_0 \subseteq Y' \cap C$, gdzie $Y' \cap C = Z$ zgodnie z (1.60), czyli $Z_0 \subseteq Z$. Wcześniej pokazaliśmy, że Z, Z_0 są sąsiednie, więc z 1.10 mamy $Z = Z_0$, co przeczy (1.60). Nasze przypuszczenie było fałszywe, tzn. $Z_0 \nsubseteq Y_1, Y_2$.

Teraz bierzemy $\mathcal{X}_0 := [Z_0, Y_0]$. Zauważmy, że $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_i$ spełniają 1.29(ii) zatem wyznaczają wafel dla $i = 1, 2$. Można więc rozważać ślizgi $f := \zeta_{\mathcal{X}_0}^{\mathcal{X}_1}$, $g := \zeta_{\mathcal{X}_2}^{\mathcal{X}_0}$.

Wykażemy, że $h = gf$. Niech $U_1 \in \mathcal{X}_1$ i $U_2 = h(U_1)$. Z definicji uogólnionego rzutu środkowego 1.76 elementy U_1, U_2 leżą na prostej, powiedzmy $p =]H, B[$ przecinającej $\mathcal{Y}$ w pewnym U_3. Zauważmy, że $B = U_1 + U_2$ z 1.3(iii), skąd $B \subseteq Y''$. Z (1.60) mamy $Y_0 \prec Y''$, zatem z 1.1 uzyskujemy

$$B \cap Y_0 \preceq B \cap Y'' = B.$$

Gdyby $B \cap Y_0 = B$, czyli $B \subseteq Y_0$, to ponieważ $Z \subseteq B$, więc mielibyśmy $Z \subseteq Y_0$, co przeczy (1.60). W konsekwencji $U_0 := B \cap Y_0 \prec B$. Zatem U_0, U_1, U_2 mają wspólny następnik B, więc są parami sąsiednie. Ponadto zauważmy, że $C \subseteq U_3$ bo $C \in \mathcal{Y}$ i $U_3 \subseteq B$ bo $U_3 \in p$. Stąd $C \subseteq B$ i dalej $C \cap Y_0 \subseteq B \cap Y_0$, czyli $Z_0 \subseteq U_0$. W rezultacie mamy $U_0 \in \mathcal{X}_0$, skąd $f(U_1) = U_0$, $g(U_0) = U_2$. Ostatecznie $h = gf$ równość jest prawdziwa.

W przypadku $Y_1 = Y_2$ dowód jest dualny. $\square$

W dalszej części używamy oznaczeń jak w (1.47) i (1.48) na stronie 33.

Lemat 1.82. *Niech f będzie rzutem z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ i $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}_1$. Oznaczmy $\mathcal{E}_2 := f(\mathcal{E}_1)$. Wtedy albo $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, albo $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ wyznaczają pęk. Jeśli $\overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$ jest pękiem właściwym typu gwiazda (układ), to $\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ jest pękiem właściwym typu gwiazda (układ).*

Dowód. Jeśli $f = \mathrm{id}$, to $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$. Załóżmy więc, że dalej $f \neq \mathrm{id}$ i $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$. Oznaczmy pęk odcinków $\mathsf{G} := \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$.

Jeśli f jest ślizgiem, to G jest waflem. Zatem, $\mathcal{X}' = \emptyset$ i dla każdego $U_1 \in \mathcal{E}_1$ istnieje dokładnie jeden $U_2 \in \mathcal{E}_2$ sąsiedni z U_1. W konsekwencji, z 1.49(ii) odcinki $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ wyznaczają wafel.

Pozostaje przypadek, gdy f jest uogólnionym rzutem środkowym $f = \begin{smallmatrix}\mathcal{X}_1 \\ \downarrow\mathcal{Y} \\ \mathcal{X}_2\end{smallmatrix}$ i G jest pękiem właściwym. Dowód przeprowadzimy dla pęku typu gwiazda, czyli gdy $Z_1 = Z_2 = Z$. Gdy G jest typu układ, dowód biegnie dualnie.

Z określenia rzutu i 1.75(i) istnieją C, Y_3 takie, że $\mathcal{Y}_3 \in \overline{Y_1, Y_2}$, $Y_3 \neq Y_1, Y_2$ i $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$. Zauważmy, że

$$f(\mathcal{E}_1) = f([T_1, S_1]) = [f(T_1), f(S_1)] = \mathcal{E}_2.$$

Zatem z definicji rzutu mamy $T_1 \sim T_2$ i $S_1 \sim S_2$. Stąd albo $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, albo odcinki $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ rozpinają pewien quasi-pęk E. Pokażemy, że E jest waflem lub pękiem właściwym.

Jeśli E nie jest waflem, to z definicji wafla 1.30 $T_1 \subseteq S_2$ lub $T_2 \subseteq S_1$. Zbadajmy pierwszy przypadek dokładniej. Albo $T_1 \in \mathcal{X}'$ i wtedy $T_2 = T_1$ z (1.57), co oznacza, że E jest pękiem właściwym, albo $T_1 \notin \mathcal{X}'$. Wówczas $T_2 = (T_1 + C) \cap Y_2$ z (1.57). Ponieważ $T_1 \subseteq S_2 \subseteq Y_2$, więc z modularności otrzymujemy $T_2 = T_1 + (C \cap Y_2)$. Z uwagi na to, że $C \subseteq Y_3$ mamy

$$T_2 = T_1 + (C \cap Y_3 \cap Y_2) = T_1 + (C \cap Y').$$

Uwzględniwszy równość $Z = C \cap Y'$ z 1.75(i), dostaniemy ostatecznie $T_2 = T_1 + Z = T_1$, czyli $\mathcal{E}$ jest pękiem właściwym.

W sytuacji gdy $T_2 \subseteq S_1$ rozważmy f^{-1}, tzn. rzut z $\mathcal{X}_2$ na $\mathcal{X}_1$. Rozumujemy analogicznie jak w przypadku poprzednim. Albo $T_2 \in \mathcal{X}'$ i wtedy $T_1 = T_2$ z (1.57), albo $T_2 \notin \mathcal{X}'$. Wówczas $T_1 = (T_2 + C) \cap Y_1$ z (1.57). Kontynuując, uzyskamy $T_1 = T_2$. Także, jeśli E nie jest waflem, to jest pękiem właściwym.

Załóżmy teraz, że E jest pękiem właściwym typu gwiazda, czyli $T_1 = T_2 = T$ i $S_1 \neq S_2$. Zauważmy, że pęk G nie może być wtedy waflem, bo $T \in \mathcal{X}'$. Zatem G jest pękiem właściwym, a f uogólnionym rzutem środkowym. Przypuśćmy, że G jest pękiem typu układ, tzn. że $Y_1 = Y_2 = Y$. Wtedy, ponieważ $T \in \mathcal{X}'$, czyli w szczególności $Z'' \subseteq T$, więc

$$Z'' \subseteq T \subseteq S_1 \subseteq Y,$$

skąd $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}'$. W takiej sytuacji $f(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_1$ zgodnie z (1.57), czyli $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, co przeczy założeniom o E. Jeśli więc E jest pękiem właściwym, to G jest pękiem właściwym tego samego typu. $\square$

W zależności od wyboru odcinka $\mathcal{E}_1$, w rezultacie obcinania rzutu otrzymujemy, albo ślizg, albo uogólniony rzut środkowy. Mówi o tym następne twierdzenie.

Stwierdzenie 1.83. *Niech f będzie nietożsamościowym rzutem z odcinka $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ oraz $\mathcal{E}_1$ niepustym odcinkiem takim, że $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}_1$. Oznaczmy $\mathcal{E}_2 := f(\mathcal{E}_1)$.*

(i) *Jeśli $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$, to $\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ jest pękiem rozszerzającym jednoznacznie pęk $\overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$.*

(ii) *Jeśli $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}' = \emptyset$, to $\overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$ jest waflem i w konsekwencji $f|\mathcal{E}_1$ jest ślizgiem.*

(iii) *Jeśli $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}' \neq \emptyset$, to albo $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}'$ i $f|\mathcal{E}_1 = \mathrm{id}$, albo $\overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$ jest pękiem właściwym i $f|\mathcal{E}_1$ jest uogólnionym rzutem środkowym.*

Dowód. Ogólnie, gdyby $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$, to f musiałby być uogólnionym rzutem środkowym, ale wtedy $f = \mathrm{id}$ zgodnie z definicją uogólnionego rzutu środkowego. Zatem $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$. Oznaczmy więc $\mathsf{G} := \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$.

Z 1.82 albo $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, albo $\overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$ jest pękiem. Gdy $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, to ponieważ $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{X}_2$, więc mamy $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}'$. Zatem

$$\text{albo } \mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}', \text{ albo } \mathsf{E} := \overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2} \text{ jest pękiem.} \tag{1.62}$$

(i) Zgodnie z z (1.57) rzut f jest tożsamością na $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}'$, więc z założenia $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$ i (1.62) E jest pękiem. Z 1.68 G rozszerza E. Dla wykazania jednoznaczności rozszerzenia pęku E do pęku G wykorzystujemy fakt, że rzut f jest tożsamością na $\mathcal{X}'$. Tak więc $f(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}') = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}'$. Z drugiej strony mamy $f(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}') = \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{X}'$. W rezultacie $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}' = \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{X}'$ i z 1.66(i) mamy jednoznaczność rozszerzenia.

(ii) Odcinek $\mathcal{E}_1$ jest niepusty, więc z założenia, że $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}' = \emptyset$ i (1.62) E jest pękiem. Zauważmy, że $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, czyli $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}' = \emptyset$. Stąd pęk E jest waflem. Dla $U_1 \in \mathcal{E}_1$ mamy $U_1 \sim f|\mathcal{E}_1(U_1)$ bo f jest rzutem. Zatem $f|\mathcal{E}_1$ jest ślizgiem z (1.59).

(iii) Z założenia $\mathcal{X}' \neq \emptyset$, więc f musi być w tym wypadku uogólnionym rzutem środkowym i G pękiem właściwym. W pierwszym przypadku (1.62), to znaczy, gdy $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}'$, z (1.57) mamy $f|\mathcal{E}_1 = \mathrm{id}$. Gdy natomiast E jest pękiem, to ponieważ rzut f jest tożsamością na $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}'$ z (1.57), więc $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}' \subseteq \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$, co oznacza, że pęk E jest właściwy. Wykażemy, że $f|\mathcal{E}$ jest uogólnionym rzutem środkowym. W tym celu musimy wskazać odcinek $\mathcal{Y}_0$ taki, że $f|\mathcal{E}_1 = \begin{array}{l}\top\,\mathcal{E}_1\\ \phi\,\mathcal{Y}_0\\ \downarrow\,\mathcal{E}_2\end{array}$

Rozważmy sytuacje, gdy $T_1 = T_2 = T$. Wtedy $Z_1 = Z_2 = Z$ z 1.82. Niech $\mathcal{E}_3 := [T, S' + C]$, gdzie C takie jak w 1.75(i), tzn. w szczególności $Z \prec C$, $C \subseteq Y_3$, gdzie $Y_3 \in \overline{Y_1, Y_2}$. Ponieważ $Z \subseteq S'$, więc $S' \preceq S' + C$ z 1.1. Gdyby $S' = S' + C$, czyli $C \subseteq S'$, to mielibyśmy $C \subseteq Y'$, co przeczy 1.75(i). W konsekwencji

$$S' \prec S' + C. \tag{1.63}$$

Ze wzoru (1.57) mamy

$$S'' = S_1 + S_2 = S_1 + ((S_1 + C) \cap Y_2)$$

i dalej z modularności

$$S'' = (S_1 + Y_2) \cap (S_1 + C). \tag{1.64}$$

Ponieważ $Y' \subseteq Y_2$, więc

$$S_1 + Y_2 = S_1 + Y' + Y_2. \tag{1.65}$$

Z uwagi na to, że $Y' \prec Y_1$ i $S_1 \subseteq Y_1$, mamy albo $S_1 + Y' = Y'$, albo $S_1 + Y' = Y_1$, ale w pierwszym przypadku mielibyśmy $S_1 \subseteq Y'$, co daje nieprawdziwą w rozważanej sytuacji inkluzję $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{X}'$. Zatem po wstawieniu uzyskanej równości do (1.65), z (1.64) dostaniemy

$$S'' = (Y_1 + Y_2) \cap (S_1 + C) = Y'' \cap (S_1 + C) = S_1 + C.$$

Stąd $S' + C \subseteq S''$, co razem z (1.63) daje $\mathcal{E}_3 \in \overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$.

Podobnie jak dla S' powyżej możemy pokazać dla T, że $T \prec T + C$. Zatem odcinki $\mathcal{E}' = [T, S']$ oraz $\mathcal{Y}_0 := [T + C, S' + C]$ są odcinkami komplementarnymi, kowymiaru 1 względem $\mathcal{E}_3$. Dlatego też $h := \left\downarrow\begin{smallmatrix}\mathcal{E}_1\\ \mathcal{Y}_0\\ \mathcal{E}_2\end{smallmatrix}\right.$ jest uogólnionym rzutem środkowym. Pokażemy, że $f|\mathcal{E}_1 = h$.

Niech $U_1 \in \mathcal{E}_1$. Jeśli $U_1 \in \mathcal{X}'$, to po pierwsze $f(U_1) = U_1$ z 1.76, po drugie $U_1 \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{X}'$ i z 1.67(i) mamy $U_1 \in \mathcal{E}'$. Zatem $h(U_1) = U_1$ z 1.76. Tak więc $f|\mathcal{E}_1(U_1) = h(U_1)$.

Jeśli $U_1 \notin \mathcal{X}'$, to $U_1 \notin \mathcal{E}'$ bo $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{X}'$. Z 1.76 istnieje $U_3 \in \mathcal{Y}_0$ takie, że $U_1, h(U_1), U_3$ leżą na jednej prostej p. Zauważmy, że

$$C \subseteq T + C \quad \text{oraz} \quad S' + C \subseteq Y' + C \subseteq Y_3.$$

Stąd $\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}$, gdzie $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$ takie, że $f = \left\downarrow\begin{smallmatrix}\mathcal{X}_1\\ \mathcal{Y}\\ \mathcal{X}_2\end{smallmatrix}\right.$ zgodnie z 1.75(i). Z uzyskanej inkluzji wynika, że $U_3 \in \mathcal{Y}$. Ponadto $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ i $h(U_1) \in \mathcal{X}_2$. Ponieważ U_3 jest jedynym sąsiednim z U_1 elementem w $\mathcal{Y}$, co gwarantuje 1.75(iii), więc $f(U_1) \in \mathcal{X}_2 \cap p$. Z definicji uogólnionego rzutu środkowego, a dokładniej z jednoznaczności przecięcia prostej p z $\mathcal{X}_2$, mamy $f|\mathcal{E}_1(U_1) = h(U_1)$ i dowód jest zakończony.

W przypadku $S_1 = S_2$ dowód biegnie dualnie. □

Stwierdzenie 1.84. *Jeśli pęk* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *rozszerza pęk* $\mathsf{E} = \overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$ *jednoznacznie,* $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}_i$ $(i = 1, 2)$ *i* f *jest rzutem* $\mathcal{E}_1$ *na* $\mathcal{E}_2$*, to istnieje rzut* F *z* $\mathcal{X}_1$ *na* $\mathcal{X}_2$ *taki, że* $f = F|\mathcal{E}_1$.

Dowód. Jeśli G jest waflem, to z 1.65 pęk E jest również waflem, a więc f jest ślizgiem. Ponieważ wafel determinuje ślizg jednoznacznie, to dla ślizgu F z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$, wystarczy sprawdzić, że $f = F|\mathcal{E}_1$. Niech $U_1 \in \mathcal{E}_1$. Ponieważ $f(U_1) \in \mathcal{X}_2$, a w $\mathcal{X}_2$ jest tylko jeden element sąsiedni z U_1, mianowicie $F(U_1)$ to $f(U_1) = F(U_1)$.

Gdy G jest pękiem właściwym, to szukanym rzutem F jest uogólniony rzut środkowy. Aby go skonstruować należy wskazać środek rzutu, tzn. odcinek $\mathcal{Y}$ kowymiaru 1 w pewnym $\mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$, komplementarny z $\mathcal{X}'$ w $\mathcal{X}_3$. Załóżmy, że $Z_1 = Z_2 = Z$. Z 1.65 pęk E jest albo (1) waflem, albo (2) pękiem właściwym takim, że $T_1 = T_2 = T$.

(1) W pierwszym przypadku rozważmy odcinek $\mathcal{E}_3 \in \mathsf{E}$ różny od $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$. Z definicji wafla 1.30 zauważmy, że $T_3 \nsubseteq S'$. Zatem odcinki $\mathcal{E}' := [T', S']$, $\mathcal{E}_3 = [T_3, S_3]$ są komplementarne, kowymiaru 1 w odcinku $\mathcal{E} := [T', S_3]$. Z założenia o rozszerzaniu, istnieje $\mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$ taki, że $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathcal{X}_3$, a ponadto $Z \subseteq T_1 \cap T_2 = T'$. Tak więc mamy $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{X}_3$. Zauważmy, że $S' \subseteq S_3 \cap Y' \subseteq S_3$ i $S' \prec S_3$. Więc albo $S' = S_3 \cap Y'$, albo $S_3 \cap Y' = S_3$. W ostatnim przypadku mielibyśmy jednak $S_3 \subseteq Y'$, a zatem $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathcal{X}'$,

co przeczyłoby jednoznaczności rozszerzenia E do G, a więc $S' = S_3 \cap Y'$. Odcinek $\mathcal{X}'$ jest kowymiaru 1 w $\mathcal{X}_3$ oraz

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{X}' = [T' + Z, S_3 \cap Y'] = [T', S'] = \mathcal{E}',$$

i zgodnie z 1.22 istnieje odcinek $\mathcal{Y}$ taki, że $F = \overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\mathcal{Y}}}$ jest dobrze określony, a ponadto $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathcal{Y}$.

Rzut f w tym wypadku jest ślizgiem, zatem dla $U_1 \in \mathcal{E}_1$ mamy $f(U_1) \in \mathcal{E}_2$ takie, że $U_1 \sim f(U_1)$. Zgodnie z 1.43 prosta $p = \overline{U_1, f(U_1)}$ przecina odcinek $\mathcal{E}_3$, powiedzmy w U_3. Ponieważ $U_3 \in \mathcal{E}_3 \subseteq \mathcal{Y}$, to $f(U_1) = F(U_1)$ z określenia uogólnionego rzutu środkowego 1.76.

(2) Gdy E jest pękiem właściwym, rzut f jest uogólnionym rzutem środkowym, zatem z definicji tego rzutu istnieje odcinek $\mathcal{Y}'$ taki, że $f = \overset{\mathcal{E}_1}{\underset{\mathcal{E}_2}{\mathcal{Y}'}}$, czyli $\mathcal{Y}'$ jest kowymiaru 1 w pewnym $\mathcal{E}_3 \in \mathsf{E}$ oraz $\mathcal{Y}', \mathcal{E}'$ są komplementarne względem $\mathcal{E}_3$. Rozszerzalność E do G gwarantuje istnienie odcinka $\mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$ takiego, że $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathcal{X}_3$. Odcinek $\mathcal{X}'$ jest kowymiaru 1 w $\mathcal{X}_3$, natomiast z 1.67(i) mamy $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_3 \cap \mathcal{X}'$. Zatem z 1.22 istnieje odcinek $\mathcal{Y}$ taki, że rzut $F = \overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\mathcal{Y}}}$ jest sensowny i $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$.

Niech $U_1 \in \mathcal{E}_1$. Z określenia uogólnionego rzutu środkowego istnieje $U_3 \in \mathcal{Y}'$ taki, że $U_1, f(U_1), U_3$ leżą na jednej prostej. Ponieważ $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$, więc $U_3 \in \mathcal{Y}$ i stąd $f(U_1) = F(U_1)$ z określenia uogólnionego rzutu środkowego 1.76. $\square$

Bezpośrednim wnioskiem z udowodnionego wyżej twierdzenia oraz 1.74 jest

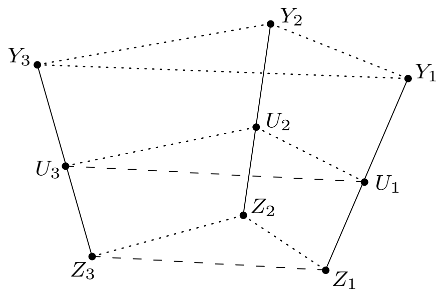
WNIOSEK 1.85. *Każdy ślizg jest obcięciem pewnego uogólnionego rzutu środkowego.*

1.6.2 Redukcje złożeń rzutów

STWIERDZENIE 1.86. *Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ będą odcinkami kraty $\mathfrak{L}(V)$ takimi, że $Z_1 \neq Z_3$ i $Y_1 \neq Y_3$ oraz niech f będzie ślizgiem z odcinka $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ i g ślizgiem z $\mathcal{X}_2$ na $\mathcal{X}_3$. Jeśli Y_1, Y_2, Y_3 posiadają wspólny poprzednik, to Z_1, Z_2, Z_3 posiadają wspólny poprzednik. Jeśli Z_1, Z_2, Z_3 posiadają wspólny następnik, to Y_1, Y_2, Y_3 posiadają wspólny następnik. W obu przypadkach $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3$ tworzą wafel i gf jest ślizgiem.*

DOWÓD. Rozważmy przypadek, gdy Y_1, Y_2, Y_3 mają wspólny poprzednik, tzn.

$$Y_1 \cap Y_2 = Y_2 \cap Y_3 = Y_3 \cap Y_1. \tag{1.66}$$



Rysunek 1.1

Niech $U_1 \in \mathcal{X}_1$. Z (1.59) mamy $f(U_1) = (Z_2 + U_1) \cap Y_2 \supseteq U_1 \cap Y_2$, zatem z (1.66)

$$U_1 \cap Y_3 = (U_1 \cap Y_1) \cap Y_3 = U_1 \cap Y_2 \cap Y_3 \subseteq f(U_1) \cap Y_3.$$

Ponieważ f^{-1} jest ślizgiem, więc z (1.59) mamy $U_1 = \big(Z_1 + f(U_1)\big) \cap Y_1 \supseteq f(U_1) \cap Y_1$, a więc z (1.66)

$$f(U_1) \cap Y_3 = \big(f(U_1) \cap Y_2\big) \cap Y_3 = f(U_1) \cap Y_1 \cap Y_3 \subseteq U_1 \cap Y_3.$$

W ten sposób otrzymaliśmy

$$U_1 \cap Y_3 = f(U_1) \cap Y_3. \tag{1.67}$$

Wówczas z modularności kraty $\mathfrak{L}(V)$ mamy

$$\big(Z_3 + f(U_1)\big) \cap Y_3 = Z_3 + \big(f(U_1) \cap Y_3\big) = Z_3 + (U_1 \cap Y_3) = (Z_3 + U_1) \cap Y_3,$$

co razem z (1.59) daje

$$gf(U_1) = (Z_3 + U_1) \cap Y_3 \quad \text{dla każdego} \quad U_1 \in \mathcal{X}_1. \tag{1.68}$$

Zgodnie z definicją ślizgu wystarczy zatem wykazać, że odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3$ rozpinają wafel. Ponieważ $f(Z_1) = Z_2$ oraz $g(Z_2) = Z_3$ z 1.78, więc z (1.68) w szczególności $Z_3 = gf(Z_1) = (Z_3 + Z_1) \cap Y_3$. Tak więc

$$Z_1 \cap Z_3 = Z_1 \cap (Z_1 + Z_3) \cap Y_3 = Z_1 \cap Y_3. \tag{1.69}$$

Z (1.59) mamy $Z_2 = f(Z_1) = (Z_2 + Z_1) \cap Y_2$, a stąd razem z (1.66)

$$Z_1 \cap Z_2 = Z_1 \cap (Z_2 + Z_1) \cap Y_2 = Z_1 \cap Y_2 = Z_1 \cap Y_1 \cap Y_2 = Z_1 \cap Y_3. \tag{1.70}$$

Z dowolności U_1 w (1.67) mamy $Z_1 \cap Y_3 = Z_2 \cap Y_3$. Natomiast z (1.59) mamy $Z_2 = g^{-1}(Z_3) = (Z_2 + Z_3) \cap Y_2$, a zatem

$$Z_1 \cap Y_3 = Z_2 \cap Y_3 = (Z_2 + Z_3) \cap Y_2 \cap Y_3,$$

co z 1.41 dla wafla $\overline{\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3}$ daje $Z_1 \cap Y_3 = Z_2 \cap Z_3$. Tak więc ostatecznie z (1.69) i (1.70) uzyskujemy

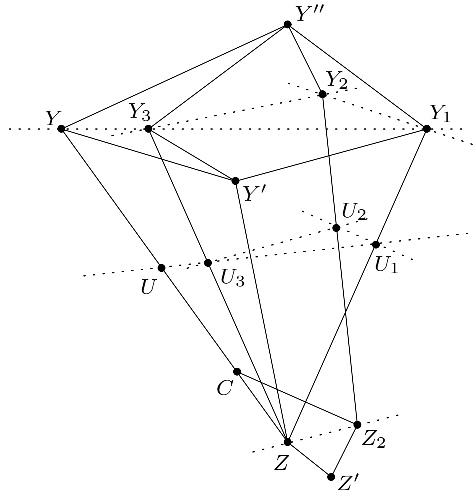
$$Z_1 \cap Z_2 = Z_2 \cap Z_3 = Z_3 \cap Z_1,$$

co oznacza, że Z_1, Z_2, Z_3 posiadają wspólny poprzednik, a w szczególności Z_1, Z_3 są sąsiednie. Zauważmy, że gdyby $Z_1 \subseteq Y_3$, to z (1.66) mielibyśmy $Z_1 \subseteq Y_1 \cap Y_2 \subseteq Y_2$ i pęk $\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ nie byłby waflem. A więc $Z_1 \nsubseteq Y_3$. Podobnie pokazać można, że $Z_3 \nsubseteq Y_1$. Zgodnie z definicją, $\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3}$ jest waflem.

W przypadku, gdy Z_1, Z_2, Z_3 mają wspólny następnik dowód przebiega dualnie. $\square$

Stwierdzenie 1.87. *Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ będą odcinkami kraty $\mathfrak{L}(V)$ takimi, że albo $Z_1 = Z_3$, $Y_1 \neq Y_3$ i Y_1, Y_2, Y_3 mają wspólny następnik, albo $Z_1 \neq Z_3$, $Y_1 = Y_3$ i Z_1, Z_2, Z_3 mają wspólny poprzednik. Jeśli f jest ślizgiem z odcinka $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ i g ślizgiem z $\mathcal{X}_2$ na $\mathcal{X}_3$, to $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3$ tworzą pęk właściwy i gf jest uogólnionym rzutem środkowym.*

Dowód. Załóżmy, że $Z = Z_1 = Z_3$, $Y_1 \neq Y_3$ i Y_1, Y_2, Y_3 mają wspólny następnik Y''. Połóżmy $Y' := Y_1 \cap Y_3$ i $Z' := Z \cap Z_2$.



Rysunek 1.2

Ponieważ Y_1, Y_3 są sąsiednie, to z 1.3(i) $Y' \prec Y_1, Y_3$. Z tego samego powodu $Z' \prec Z, Z_2$. Zgodnie z 1.1 zatem $Z' + Y' \preceq Z_2 + Y'$. Zauważmy, że $Z' \subseteq Y'$, a więc $Z' + Y' = Y'$ i stąd $Y' \preceq Z_2 + Y'$. Gdyby $Y' = Z_2 + Y'$, to $Z_2 \subseteq Y' \subseteq Y_1$ i odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ nie rozpinałyby wafla, co przeczy założeniom. Tak więc $Y' \prec Z_2 + Y'$, a ponadto $Z_2 + Y' \subseteq Y''$. Ponieważ $Y_1 \not\prec Y''$, to $Y' \prec Z_2 + Y' \prec Y''$, tzn., $Y := Z_2 + Y'$ leży na prostej $\overline{Y_1, Y_3}$.

Połóżmy $C := Z + Z_2$. Elementy Z, Z_2 są sąsiednie, więc z 1.3(iii) zachodzi $Z, Z_2 \prec C$. Niech $\mathcal{Y} = [C, Y]$. Zauważmy, że odcinek $\mathcal{Y}$ jest odcinkiem kowymiaru 1 w odcinku $\mathcal{X} = [Z, Y]$ leżącym w pęku wyznaczonym przez $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3$. Pokażemy, że odcinki $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{X}' := \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_3$ są komplementarne względem odcinka $\mathcal{X}$. Z 1.14(i) mamy

$$\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}' = [C + Z, Y \cap Y'] = [C, Y'].$$

Gdyby $C \subseteq Y'$, to z określenia C mielibyśmy $Z_2 \subseteq Y' \subseteq Y_1$ i odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ nie rozpinałyby wafla. Zatem $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}' = \emptyset$. Z 1.14(ii) mamy

$$\langle \mathcal{Y}, \mathcal{X}' \rangle = [C \cap Z, Y + Y'] = [Z, Y] = \mathcal{X}.$$

Możemy zatem rozważać uogólniony rzut środkowy $h = \overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_3}{\mathcal{Y}}}$.

Do wykazania pozostało, że $h = gf$. Niech $U_1 \in \mathcal{X}_1$ i $U_3 := h(U_1)$. Z określenia rzutu h istnieje $U \in \mathcal{Y}$ taki, że U_1, U_3, U leżą na jednej prostej $p =]H, B[$. Zauważmy, że $C \subseteq U$, gdyż $U \in \mathcal{Y}$, ponadto $U \subseteq B$, gdyż $U \in p$ oraz $B \subseteq Y''$, gdyż h nie jest identycznością, a co za tym idzie $B = U_1 + U_3 \subseteq Y_1 + Y_3 = Y''$. Ponieważ $Y_2 \prec Y''$, więc z 1.1 otrzymujemy

$$B \cap Y_2 \preceq Y'' \cap B = B.$$

Gdyby $B \cap Y_2 = B$, czyli $B \subseteq Y_2$, to mielibyśmy $Z \subseteq Y_2$ i $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ nie rozpinałyby wafla. W rezultacie $U_2 := B \cap Y_2 \prec B$. Zauważmy, że $Z_2 \subseteq C \subseteq U \subseteq B$ oraz $Z_2 \subseteq Y_2$, co razem daje $U_2 \in \mathcal{X}_2$. Ponadto $U_1, U_2, U_3 \prec B$, czyli U_1, U_2, U_3 są parami sąsiednie. Zatem z definicji ślizgu $f(U_1) = U_2$, $g(U_2) = U_3$ i ostatecznie $h = gf$.

W drugim przypadku dowód przebiega dualnie. □

Rozważmy pęk właściwy G rozpięty przez odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ taki, że $Z_1 = Z_2 = Z$. Niech A będzie zbiorem wszystkich atomów w kracie L wyznaczonej przez odcinek $\mathcal{X}'' = \langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle$, tzn. kracie powstałej przez ograniczenie uniwersum kraty $\mathfrak{L}(V)$ i relacji porządku $\subseteq$ do zbioru $\mathcal{X}''$. Zauważmy, że $A = \{U \in \bigcup \mathsf{G} \colon Z \prec U\}$. Zbiór A można traktować jako zbiór punktów przestrzeni rzutowej P związanej z kratą L (por. [4, Tw. 6, Roz. IV.5]), natomiast zbiory $A_i := \mathcal{X}_i \cap A$, $i = 1, 2$, jako podprzestrzenie przestrzeni P.

Jeśli $f = \downarrow\!\begin{smallmatrix}\mathcal{X}_1\\ \mathcal{Y}\\ \mathcal{X}_2\end{smallmatrix}$ jest uogólnionym rzutem środkowym, gdzie $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$, to zgodnie z 1.75(i) C jest atomem w L, czyli punktem przestrzeni rzutowej P, a zatem $f|A$ jest rzutem środkowym z A_1 na A_2 o środku C w przestrzeni rzutowej P, formalnie $f|A = \downarrow\!\begin{smallmatrix}A_1\\ C\\ A_2\end{smallmatrix}$.

Prawdziwe jest również twierdzenie dualne dla pęku właściwego takiego, że $Y_1 = Y_2 = Y$ i $A = \{U \in \bigcup \mathsf{G} \colon U \prec Y\}$, tak więc ogólnie

Obserwacja 1.88. Obcięcie uogólnionego rzutu środkowego, z odcinka $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$, do zbioru atomów kraty L wyznaczonej przez $\mathcal{X}''$ (lub kraty o odwróconym porządku) jest rzutem środkowym w przestrzeni rzutowej związanej z kratą L. □

W Desarguesowskiej przestrzeni rzutowej złożenie rzutów środkowych działających między elementami pęku prostych (lub ogólniej podprzestrzeni) jest rzutem środkowym. Wykażemy, że to twierdzenie jest prawdziwe w kracie $\mathfrak{L}(V)$ dla uogólnionych rzutów środkowych.

Stwierdzenie 1.89. *Jeśli f jest uogólnionym rzutem środkowym z odcinka $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$, g uogólnionym rzutem środkowym z odcinka $\mathcal{X}_2$ na $\mathcal{X}_3$ oraz $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{X}_3$, to gf jest uogólnionym rzutem środkowym.*

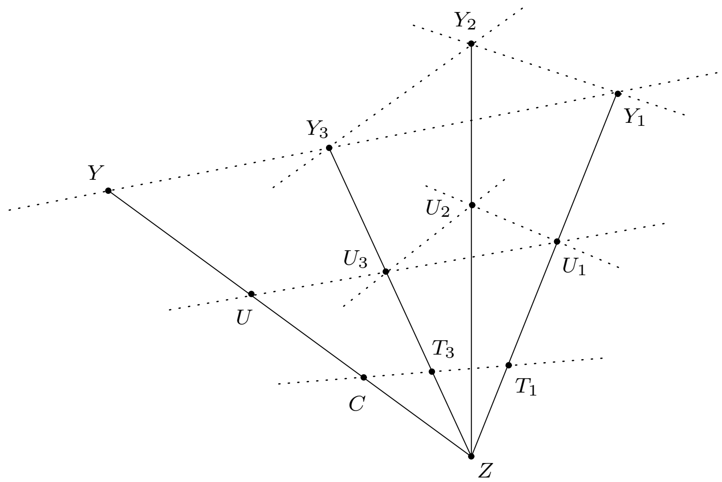
Dowód. Możemy przyjąć, że $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ są parami różne, gdyż w przeciwnym razie teza jest natychmiastowa. Odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ rozpinają pęk właściwy. Załóżmy zatem, że $Z_1 = Z_2 = Z$, i $Y' = Y_1 \cap Y_2$. Odcinki $\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ również rozpinają pęk właściwy. Gdyby $Y_2 = Y_3$, to z 1.14

$$[Z, Y'] = \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{X}_3 = [Z_2 + Z_3, Y_2],$$

i mielibyśmy $Y' = Y_2$, co jest niemożliwe. Zatem $Z_2 = Z_3$ i $Y' = Y_2 \cap Y_3$, czyli Y_1, Y_2, Y_3 mają wspólny poprzednik Y'.

Zgodnie z określeniem uogólnionego rzutu środkowego należy wskazać taki element pęku $\mathcal{X} \in \mathsf{G} := \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ oraz odcinek $\mathcal{Y}$ w nim zawarty taki, że $\mathcal{Y}, \mathcal{X}'$ są komplementarne i kowymiaru 1 w $\mathcal{X}$.

Przypomnijmy, że krata $\mathfrak{L}(V)$ jest arguesowka, tzn. związana z nią geometria rzutowa jest Desarguesowska (por. [4, Tw. 12, Roz IV.5]). Zgodnie zatem z 1.88 złożenie obcięć rzutów $f|A$, $g|A$, do zbioru A atomów kraty $[Z, Y_1 + Y_2 + Y_3]$, jest rzutem środkowym η w przestrzeni rzutowej związanej z tą kratą, z $A \cap \mathcal{X}_1$ na $A \cap \mathcal{X}_3$. Niech C będzie środkiem tego rzutu. Ponieważ $C \in \bigcup \mathsf{G}$, to w G istnieje odcinek $\mathcal{X} = [Z, Y]$ zawierający C. Taki odcinek jest dokładnie jeden, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $C \subseteq Y'$, czyli $C \in \mathcal{X}'$, co przeczy temu, że η jest rzutem.



Rysunek 1.3

Połóżmy $\mathcal{Y} = [C, Y]$ oraz $h = \begin{smallmatrix}\mathcal{X}_1\\ \mathcal{Y}\\ \mathcal{X}_3\end{smallmatrix}$. Wykażemy, że $h = gf$. W tym celu, weźmy $U_1 \in \mathcal{X}_1$. Jeśli $U_1 \in \mathcal{X}'$, to $f(U_1) = U_1 = g(U_1)$ i $h(U_1) = U_1$ zgodnie z 1.76. Możemy więc przyjąć, że $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$.

Rozważmy odcinek $\mathcal{E}_1 = [U_1, Y_1]$, jego obraz $\mathcal{E}_2 := f(\mathcal{E}_1)$ oraz $\mathcal{E}_3 := g(\mathcal{E}_2)$. Z 1.80 mamy $f(Y_1) = Y_2$ i $g(Y_2) = Y_3$. Połóżmy $U_2 := f(U_1)$ i $U_3 := g(U_2)$. Wówczas $\mathcal{E}_i = [U_i, Y_i]$ dla $i = 1, 2, 3$. Zgodnie z 1.83 zauważmy, że $f|\mathcal{E}_1$ i $g|\mathcal{E}_2$ są ślizgami. Zatem z 1.86 ich złożenie jest ślizgiem i stąd U_1, U_2, U_3 są parami sąsiednie.

Teraz, rozważmy atom T_1 w $\mathcal{X}_1$ taki, że $T_1 \subseteq U_1$ i $T_1 \notin \mathcal{X}'$. Atom taki istnieje, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $T \nsubseteq U_1$ lub $T \in \mathcal{X}'$ dla każdego atomu $T \in \mathcal{X}_1$, co oznacza, że jeśli $T \subseteq U_1$, to $T \in \mathcal{X}'$, a więc $U_1 \in \mathcal{X}'$, sprzecznie z założeniem o U_1. Niech $T_3 := gf(T_1)$. Z 1.78 mamy $T_3 \subseteq U_3$. Proste $q = \overline{Y_1, Y_3}$, $p = \overline{U_1, U_3}$ i $t = \overline{T_1, T_3}$ spełniają założenia 1.62. Ponieważ $\eta(T_1) = T_3$ to prosta t przecina odcinek $\mathcal{X}$ w C, innymi słowy $\xi_t^G(\mathcal{X}) = C$. Niech $U := \xi_p^G(\mathcal{X})$. Z 1.62 $C \subseteq U \subseteq Y$, a więc $U \in \mathcal{Y}$. Wskazaliśmy w ten sposób element U odcinka $\mathcal{Y}$ taki, że U_1, U_3, U leżą na jednej prostej, a tym samym

$$h(U_1) = U_3 = gf(U_1).$$

Z dowolności wyboru U_1 otrzymujemy $h = gf$.

Przypadek $Y_1 = Y_2$ dowodzi się dualnie. □

Rozdział 2

Przestrzeń pęków

W literaturze (por. [4, Roz. IV.3]) kraty geometryczne kojarzone są z geometrią rzutową, w ten sposób, że atomy kraty traktowane są jak punkty, natomiast elementy o wysokości 2 jako proste. Jeśli wyjściowa krata jest modularna uzyskuje się przestrzeń rzutową. W naszej pracy często odwołujemy się do przestrzeni Grassmanna związanej z kratą $\mathfrak{L}(V)$. W tym rozdziale przedstawione zostaną głównie wnioski z wyników uzyskanych w rozdziale pierwszym, specyficzne dla grasmanianów.

2.1 Geometria przestrzeni pęków

Rozdział ten rozpoczynamy od przypomnienia, a zarazem ustalenia, definicji podstawowych struktur geometrycznych, którymi zajmujemy się w pracy. Dowolny zbiór S którego elementy nazywane są punktami, wraz z wyróżnioną rodziną podzbiorów $\mathcal{L} \subseteq 2^S$ zwanych prostymi, czyli struktura $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest *częściową przestrzenią prostych* gdy: (i) dwa różne punkty leżą na co najwyżej jednej prostej; (ii) na każdej prostej leżą przynajmniej dwa różne punkty. Przestrzeń $\mathfrak{A}$ jest: (i) *niezdegenerowana* gdy istnieje w niej przynajmniej jedna prosta; (ii) *nietrywialna* gdy istnieje prosta i punkt, który na niej nie leży; (iii) *nieredukowalna* jeśli na każdej prostej leżą przynajmniej trzy punkty; (iv) *spójna* gdy każde dwa punkty można połączyć łamaną. $\mathfrak{A}$ jest *przestrzenią prostych* gdy jest częściową przestrzenią prostych i każde jej dwa punkty są współliniowe. Częściowa przestrzeń prostych zwana jest *właściwą*, gdy nie jest przestrzenią prostych.

Podzbiór X zbioru punktów częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A}$ jest *podprzestrzenią* $\mathfrak{A}$ jeśli jest domknięty na prowadzenie prostych, to znaczy, każda prosta p przecinająca X w co najmniej dwóch różnych punktach jest cała zawarta w X. Tak rozumiana podprzestrzeń niesie strukturę częściowej przestrzeni prostych. Możemy więc w odniesieniu do podprzestrzeni stosować terminy: niezdegenerowana, nietrywialna i spójna.

Ustalmy liczbę naturalną k taką, że $0 < k < \dim V$. Ze zbioru $\mathrm{Sub}(V)$ wszystkich podprzestrzeni przestrzeni V wybieramy *k-podprzestrzenie*, tj. te o wymiarze k, i oznaczamy ich zbiór przez $\mathrm{Sub}_k(V)$. Natomiast przez $\mathcal{P}_k(V)$ oznaczmy zbiór wszystkich prostych $\overline{U, W}$ gdzie $U, W \in \mathrm{Sub}_k(V)$. Takie proste nazywamy *k-pękami*. Geometrię, której punktami są k-podprzestrzenie, a prostymi k-pęki w $\mathfrak{L}(V)$ nazywamy *przestrzenią pęków o indeksie k* i oznaczamy

$$\mathfrak{P} = \mathbf{P}_k(V) = \langle \mathrm{Sub}_k(V), \mathcal{P}_k(V) \rangle. \tag{2.1}$$

W literaturze geometria ta znana jest jako grasmanian reprezentujący $(k-1)$-podprzestrzenie przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}(V)$ (por. [2]), lub przestrzeń Grassmanna (por. [1, 6], [12, Roz. 8]). Wiadomo jest (por. [2]), że przestrzenie pęków są spójnymi, nieredukowalnymi, częściowymi przestrzeniami prostych spełniającymi twierdzenie Veblena. Gdy $k=1$ lub $k=\dim V-1$, $\mathbf{P}_k(V)$ jest przestrzenią rzutową. Przestrzeń pęków jest *właściwa* gdy nie jest rzutowa.

W geometrii naturalne jest badanie struktury podprzestrzeni. W przestrzeniach afinicznych, czy rzutowych, podprzestrzenie są izomorficznymi obrazami pewnych przestrzeni, odpowiednio, afinicznych lub rzutowych. Nie każda podprzestrzeń przestrzeni $\mathbf{P}_k(V)$ ma strukturę przestrzeni pęków. Na wyróżnienie zasługują *podprzestrzenie odcinkowe*, inaczej mówiąc k-odcinki, czyli zbiory postaci

$$[Z,Y]_k=[Z,Y]\cap \mathrm{Sub}_k(V). \tag{2.2}$$

Twierdzenie 2.1. ([21]) *Podprzestrzenie odcinkowe $\mathbf{P}_k(V)$ to izomorficzne obrazy pewnych przestrzeni pęków.*

Zauważmy bowiem, że odcinek $\mathcal{X}=[Z,Y]$ jest izomorficzny z kratą $\mathfrak{L}(Y/Z)$, natomiast elementom k-wymiarowym z $\mathcal{X}$ odpowiadają elementy $k-\dim Z$ wymiarowe w $\mathfrak{L}(Y/Z)$.

Proste $\mathbf{P}_k(V)$, czyli k-pęki są szczególnym przypadkiem k-odcinków. Mianowicie gdy $p=[H,B]_k$ jest niepusty i jego długość (formalnie długość odcinka $[H,B]$) wynosi 2, to p jest prostą $\mathbf{P}_k(V)$ i odwrotnie. W konsekwencji $B\in\mathrm{Sub}_{k+1}(V)$, $H\in\mathrm{Sub}_{k-1}(B)$. W tym szczególnym przypadku piszemy $\mathbf{p}(H,B):=[H,B]_k$.

Przykładem przestrzeni pęków jest przestrzeń $\mathbf{P}_2(V)$, gdzie $\dim V=4$, tzn. 3-wymiarowa przestrzeń rzutowa, której proste pełnią rolę punktów, natomiast pęki prostych rzutowych pełnią rolę prostych. Przykład ten doskonale uzasadnia terminologię ze względu na to, że k-pęk $\mathbf{p}(H,B)$ jest tutaj zbiorem prostych rzutowych przez punkt H leżących w płaszczyźnie B.

W częściowych przestrzeniach prostych szczególne znaczenie odgrywają *mocne podprzestrzenie*, tzn. takie gdzie każde dwa punkty są współliniowe. Mocne podprzestrzenie $\mathbf{P}_k(V)$ są zatem (z dokładnością do izomorfizmu) przestrzeniami rzutowymi.

Twierdzenie 2.2. ([21], Huang [6]) *Mocne podprzestrzenie przestrzeni $\mathbf{P}_k(V)$ to k-odcinki $[Z,Y]_k$ takie, że $\dim Z=k-1$ lub $\dim Y=k+1$.*

W pierwszym przypadku z powyższego twierdzenia mówimy o *gwiazdach*, w drugim o *układach*.

Tallini (por. [2]) przedstawił aksjomatyczną charakteryzację właściwych przestrzeni pęków opierając się na własnościach mocnych podprzestrzeni. Otóż, w takich przestrzeniach pęków są dokładnie dwie rodziny mocnych podprzestrzeni, a niepusty przekrój podprzestrzeni z różnych rodzin jest prostą. Przestrzeń pęków można pokryć mocnymi podprzestrzeniami, czyli przestrzeniami rzutowymi.

Podprzestrzenie zwykle klasyfikuje się ze względu na ich wymiar. Indeksem k-odcinka $\mathcal{X}=[Z,Y]_k$ jest $\mathrm{idx}\,\mathcal{X}=k-\dim Z$. O ile $\mathcal{X}$ jest niepusty to $\mathrm{idx}\,\mathcal{X}$ to długość odcinka $[Z,U]$, gdzie $U\in\mathcal{X}$. Ko-indeksem k-odcinka $\mathcal{X}$ jest $\mathrm{coidx}\,\mathcal{X}=\dim Y-k$, czyli długość odcinka $[U,Y]$, o ile $\mathcal{X}\neq\emptyset$. W przestrzeni pęków $\mathbf{P}_k(V)$ jako wymiar k-odcinka $\mathcal{X}$ przyjmujemy parę liczb $\mathrm{pdim}\,\mathcal{X}:=(\mathrm{idx}\,\mathcal{X},\mathrm{coidx}\,\mathcal{X})$. Zauważmy, że proste mają wymiar (1,1), natomiast mocne podprzestrzenie $(1,x)$ lub $(y,1)$. Płaszczyzny w $\mathbf{P}_k(V)$ to k-odcinki o wymiarze (1,2) lub (2,1). k-odcinki o tym samym wymiarze nazywamy *podobnymi*.

2.2 Pęki podprzestrzeni odcinkowych

Pojęcie *pęku podprzestrzeni odcinkowych przestrzeni pęków* zostało w zasadzie sformułowane w (1.17). Podamy teraz bardziej precyzyjną definicję, ale wcześniej przypomnijmy potrzebny do tej definicji fakt, wynikający bezpośrednio z 1.13:

Fakt 2.3. *Niech* $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_k$ $(i = 1, 2)$ *będą niezdegenerowanymi podprzestrzeniami przestrzeni* $\mathfrak{P}$. $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$ *wtw., gdy* $Z_1 = Z_2$ *i* $Y_1 = Y_2$.

Fakt ten, pozwala każdej podprzestrzeni odcinkowej $\mathcal{X}$ w $\mathfrak{P}$, jednoznacznie przyporządkować odcinek $\overline{\mathcal{X}}$ kraty $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczający $\mathcal{X}$. Formalnie

$$\text{jeśli } \mathcal{X} = [Z, Y]_k, \text{ to } \overline{\mathcal{X}} = [Z, Y]. \tag{2.3}$$

Zauważmy, że $\mathrm{Sub}_k(\overline{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}$.

Definicja 2.4. Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą podprzestrzeniami odcinkowymi w przestrzeni pęków $\mathfrak{P}$. Podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są *współpękowe* jeśli odcinki $\overline{\mathcal{X}_1}, \overline{\mathcal{X}_2}$ są współpękowe w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *rozpinają* pęk podprzestrzeni odcinkowych w $\mathfrak{P}$, jeśli są różne i odcinki $\overline{\mathcal{X}_1}, \overline{\mathcal{X}_2}$ rozpinają pęk G w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Pęk podprzestrzeni odcinkowych rozpięty przez $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ to zbiór:

$$\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2} := \{\mathrm{Sub}_k(\mathcal{X})\colon \mathcal{X} \in \mathsf{G}\}.$$

Typ pęku $\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ jest taki jak typ pęku G.

Zwróćmy uwagę, że powyższa definicja jest całkowicie zgodna z definicją pęków podprzestrzeni odcinkowych w przestrzeni pęków w [17]. Niemal wszystkie wyniki [17] dla pęków podprzestrzeni odcinkowych zostały uogólnione w rozdziale 1. Między innymi związek pomiędzy relacją przylegania zbiorów a relacją sąsiedniości podprzestrzeni odcinkowych został pokazany w 1.37.

Tak jak to zostało powiedziane w 2.1 podprzestrzeń odcinkowa w przestrzeni pęków niesie strukturę przestrzeni pęków. W szczególności może to być przestrzeń rzutowa, a mianowicie podprzestrzeń $[Z, Y]_k$ jest izomorficzna z przestrzenią rzutową, gdy $k = \dim Z + 1$, lub dualnie, gdy $k = \dim Y - 1$. W przypadku, gdy pęk $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ podprzestrzeni odcinkowych $\mathfrak{P}$ leży w przestrzeni rzutowej, to znaczy gdy podprzestrzeń $\mathrm{Sub}_k(\mathcal{X}'')$ jest izomorficzna z przestrzenią rzutową P, to elementy pęku G można utożsamiać z podprzestrzeniami P, które w P tworzą pęk podprzestrzeni. Takie pęki G nazywamy *rzutowymi*. Poza tym szczególnym, skądinąd dobrze znanym przypadkiem, pęki podprzestrzeni odcinkowych w $\mathfrak{P}$ opisuje się geometrycznie przy pomocy dwóch warunków: $(*_1)$, $(*_2)$ określonych na stronie 24. Twierdzenie 1.48, charakteryzujące właśnie w sposób geometryczny pęki odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$, z uwzględnieniem podprzestrzeni odcinkowych w $\mathfrak{P}$, przybiera następującą postać.

Twierdzenie 2.5. *Niech* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *będzie pękiem odcinków w kracie* $\mathfrak{L}(V)$. *Jeśli* $\mathrm{Sub}_k(\mathcal{X}'')$ *nie jest przestrzenią rzutową (z dokładnością do izomorfizmu), to następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$,

(2) *odcinki* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ *spełniają* $(*_1)$, $(*_2)$,

(3) *odcinki* $\operatorname{Int}\mathcal{X}_1$, $\operatorname{Int}\mathcal{X}_2$, $\operatorname{Int}\mathcal{X}_3$ *spełniają* $(*_1)$, $(*_2)$,

(4) *k-odcinki* $\operatorname{Sub}_k(\mathcal{X}_1), \operatorname{Sub}_k(\mathcal{X}_2), \operatorname{Sub}_k(\mathcal{X}_3)$ *spełniają* $(*_1)$, $(*_2)$,

(5) $\operatorname{Sub}_k(\mathcal{X}_3) \in \operatorname{Sub}_k(\mathsf{G})$.

(6) $\operatorname{Int}\mathcal{X}_3 \in \operatorname{Int}\mathsf{G}$.

Dowód. (1) $\Longrightarrow$ (2) Bezpośredni wniosek z 1.43.
(2) $\Longrightarrow$ (3) Wynika z 1.44(i), (ii).
(3) $\Longrightarrow$ (4) Wynika z 1.44(iii), (iv).
(4) $\Longrightarrow$ (5) Wniosek z [17].
(5) $\Longrightarrow$ (6) oraz (6) $\Longrightarrow$ (1) wynikają wprost z definicji. □

Możemy teraz uszczegółowić kryteria na rozpinanie pęków odpowiedniego typu sformułowane w 1.49, dla przypadku podprzestrzeni odcinkowych przestrzeni pęków.

Twierdzenie 2.6. ([17]) *Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą różnymi, sąsiednimi podprzestrzeniami odcinkowymi przestrzeni $\mathfrak{P}$.*

(i) *$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ wyznaczają pęk właściwy wtw., gdy $\mathcal{X}' \neq \emptyset$, oraz $\operatorname{idx}(\mathcal{X}') = \operatorname{idx}(\mathcal{X}'')$ lub $\operatorname{coidx}(\mathcal{X}') = \operatorname{coidx}(\mathcal{X}'')$. W przypadku pęku właściwego, $\mathcal{X}_3 \in \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ wtw., gdy podprzestrzeń $\mathcal{X}_3$ jest podobna do $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}_3 \subseteq \mathcal{X}''$.*

(ii) *$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ wyznaczają wafel wtw., gdy dla każdego $U_1 \in \mathcal{X}_1$ istnieje dokładnie jeden $U_2 \in \mathcal{X}_2$ sąsiedni z U_1, i na odwrót.*

(iii) *Jeśli $\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ jest nierzutowym pękiem, to $\mathcal{X}_3 \in \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ wtw., gdy $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ spełniają $(*_1)$ i $(*_2)$.*

2.3 Rzuty

Definicja 2.7. Niech X_1, X_2 będą podzbiorami zbioru punktów przestrzeni pęków $\mathfrak{P}$. Odwzorowanie $f\colon X_1 \longrightarrow X_2$ jest *rzutem* (*uogólnionym rzutem środkowym* lub *ślizgiem*) z X_1 na X_2 w przestrzeni $\mathfrak{P}$, gdy istnieje rzut F (odpowiednio, uogólniony rzut środkowy lub ślizg) w kracie $\mathfrak{L}(V)$ taki, że $f = F|\operatorname{Sub}_k(V)$. Mówimy, że rzut F *wyznacza* rzut f.

Ponieważ elementy sąsiednie o skończonej wysokości w kracie $\mathfrak{L}(V)$ mają tę samą wysokość, więc na mocy 2.5 jeśli f jest rzutem w przestrzeni pęków $\mathfrak{P}$ wyznaczonym przez rzut F w kracie $\mathfrak{L}(V)$, to f^{-1} jest rzutem w $\mathfrak{P}$ wyznaczonym przez F^{-1}.

Inną ważną cechą tak określonego rzutu w przestrzeni pęków $\mathfrak{P}$ jest to, że wszystkie promienie rzutujące są prostymi przestrzeni $\mathfrak{P}$. Zatem w przypadku uogólnionego rzutu środkowego F z odcinka $\mathcal{X}_1$ na odcinek $\mathcal{X}_2$ o środku $\mathcal{Y}$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$, po zrelatywizowaniu F do uniwersum przestrzeni pęków $\mathfrak{P}$ otrzymamy rzut z podprzestrzeni $\operatorname{Sub}_k(\mathcal{X}_1)$ na $\operatorname{Sub}_k(\mathcal{X}_2)$ o środku w $\operatorname{Sub}_k(\mathcal{Y})$ w $\mathfrak{P}$. Widać zatem, że definicja 2.7 jest równoważna definicji rzutu w [17].

Nazwę *uogólniony rzut środkowy* uzasadnia fakt, że o ile środkiem w klasycznym rzucie środkowym jest ustalony punkt, to tutaj środek przebiega ustaloną podprzestrzeń. Można wręcz przyjąć, że rzut środkowy z podprzestrzeni $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ o środku w punkcie C to uogólniony rzut środkowy z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ o środku w $\{C\}$, formalnie

$$\begin{smallmatrix}\top\,\mathcal{X}_1\\ \circ\, C\\ \downarrow\,\mathcal{X}_2\end{smallmatrix} := \begin{smallmatrix}\top\,\mathcal{X}_1\\ \circ\, \{C\}\\ \downarrow\,\mathcal{X}_2\end{smallmatrix}.$$

W rozdziale następnym, w 3.84 zostanie pokazane, że uogólniony rzut środkowy w $\mathfrak{P}$ jest sumą klasycznych rzutów środkowych. Dowiedziemy teraz kilka użytecznych własności rzutów środkowych. Pisząc $C \lhd\!\mid X$ rozumiemy, że punkt C *przylega* do zbioru punktów X, to znaczy, C jest współliniowy z każdym z punktów zbioru X.

Lemat 2.8. *Niech $\mathcal{X} = [Z, Y]_k$ będzie niezdegenerowaną podprzestrzenią $\mathfrak{P}$ i C punktem nie leżącym w $\mathcal{X}$ takim, że $C \mid\!\rhd \mathcal{X}$. Wtedy C leży w mocnej podprzestrzeni, która zawiera $\mathcal{X}$ oraz albo*

(i) *$\mathcal{X}$ jest gwiazdą i $Z = C \cap Y$, albo*

(ii) *$\mathcal{X}$ jest układem i $Y = Z + C$.*

Dowód. Z 1.17 $\mathcal{X}$ jest mocną podprzestrzenią. Na podstawie 1.18 albo $\mathcal{X}$ jest gwiazdą i $Z \subseteq C \cap Y \subsetneq C$, albo $\mathcal{X}$ jest układem i $C \subsetneq C + Z \subseteq Y$. □

Natychmiastową konsekwencją 2.8 jest

Stwierdzenie 2.9. *Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą podprzestrzeniami odcinkowymi przestrzeni $\mathfrak{P}$ i $f = \begin{smallmatrix}\mathcal{X}_1\\ \downarrow C\\ \mathcal{X}_2\end{smallmatrix}$ rzutem środkowym. Wtedy $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ i C leżą w mocnej podprzestrzeni Π w $\mathbf{P}_k(V)$ i f jest rzutem środkowym w przestrzeni rzutowej Π (z dokładnością do izomorfizmu).*

Fakt, że rzut w przestrzeni pęków indukowany jest rzutem w kracie pociąga za sobą wiele konsekwencji. Między innymi dziedzina i obraz rzutu w przestrzeni pęków są zawsze podprzestrzeniami odcinkowymi.

Stwierdzenie 2.10. *Jeśli f jest rzutem ze zbioru $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ w przestrzeni pęków $\mathfrak{P}$, to $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są podprzestrzeniami odcinkowymi w $\mathfrak{P}$. Ponadto, jeśli F jest rzutem z odcinka $[Z_1, Y_1]$ na $[Z_2, Y_2]$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$, wyznaczającym f, to $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_k$.*

Dowód. Na mocy definicji 2.7 istnieje rzut F w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczający f, czyli taki, że $f = F|\mathrm{Sub}_k(V)$. Z kolei z definicji rzutu w kracie $\mathfrak{L}(V)$ mamy

$$\mathrm{dm}(F) = [Z_1, Y_1] \qquad \text{oraz} \qquad \mathrm{rg}(F) = [Z_2, Y_2].$$

Zatem

$$\mathcal{X}_1 = \mathrm{dm}(f) = \mathrm{dm}(F) \cap \mathrm{Sub}_k(V) = [Z_1, Y_1]_k,$$
$$\mathcal{X}_2 = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{dm}(f^{-1}) = \mathrm{dm}(F^{-1}) \cap \mathrm{Sub}_k(V) = \mathrm{rg}(F) \cap \mathrm{Sub}_k(V) = [Z_2, Y_2]_k,$$

co należało wykazać. □

Jeśli F jest rzutem w kracie $\mathfrak{L}(V)$, to niezależnie od tego, czy dziedzina F kroi się pusto z uniwersum $\mathfrak{P}$, czy też nie, w świetle definicji 2.7, odwzorowanie $F|\mathrm{Sub}_k(V)$ jest zawsze rzutem w $\mathfrak{P}$.

Twierdzenie 2.11. *Każdy rzut w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznacza rzut w przestrzeni pęków $\mathfrak{P}$.*

Kolejną konsekwencją przyjętej definicji rzutu w przestrzeni pęków jest

Stwierdzenie 2.12. *Obrazem prostej przy rzucie w przestrzeni pęków $\mathfrak{P}$ jest prosta w przestrzeni $\mathfrak{P}$.*

DOWÓD. Niech f będzie rzutem i p prostą w $\mathfrak{P}$ taką, że $p \subseteq \mathrm{dm}(f)$. Z 2.7 istnieje rzut F w kracie $\mathfrak{L}(V)$ taki, że $f = F|\mathrm{Sub}_k(V)$. Ponieważ p jest prostą w $\mathfrak{L}(V)$ więc z uwagi na 1.79 $q := F(p)$ jest prostą w $\mathfrak{L}(V)$. Zauważmy, że

$$q = F(p) = F\big(\mathrm{Sub}_k(p)\big) = \mathrm{Sub}_k\big(F(p)\big) = \mathrm{Sub}_k(q),$$

a więc q jest prostą w $\mathfrak{P}$, co należało dowieść. □

Zważywszy na 2.1 podprzestrzenie odcinkowe przestrzeni pęków to przestrzenie pęków z dokładnością do izomorfizmu. Możemy więc na podstawie 2.12 twierdzić, że rzut z podprzestrzeni odcinkowej $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ w przestrzeni pęków wyznacza kolineację pomiędzy przestrzeniami pęków $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ odpowiadającymi podprzestrzeniom $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$. Wynik ten pokrywa się z wynikami [17].

Udowodnimy teraz dwa techniczne fakty mówiące o zachowaniu rzutów kratowych na k-odcinkach.

LEMAT 2.13. *Niech $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_k$ $(i = 1, 2)$ będą podprzestrzeniami $\mathfrak{P}$. Jeśli F jest rzutem w kracie $\mathfrak{L}(V)$, $F(\mathcal{X}_1) = \mathcal{X}_2$ i podprzestrzeń $\mathcal{X}_1$ jest niezdegenerowana, to $F(Z_1) = Z_2$ i $F(Y_1) = Y_2$.*

DOWÓD. Z uwagi na 1.78 rzut F jest izomorfizmem krat. Ponieważ podprzestrzeń $\mathcal{X}_1$ jest niezdegenerowana, więc również jej obraz $\mathcal{X}_2$ przy F jest niezdegenerowany. Zatem z 1.13 mamy $Z_i = \bigcap \mathcal{X}_i$ oraz $Y_i = \bigcup \mathcal{X}_i$. Stąd

$$Z_2 = \bigcap \mathcal{X}_2 = \bigcap F(\mathcal{X}_1) = F\Big(\bigcap \mathcal{X}_1\Big) = F(Z_1),$$

oraz

$$Y_2 = \bigcup \mathcal{X}_2 = \bigcup F(\mathcal{X}_1) = F\Big(\bigcup \mathcal{X}_1\Big) = F(Y_1),$$

co kończy dowód. □

LEMAT 2.14. *Niech F_1, F_2 będą rzutami z odcinka $\mathcal{X}$ na odcinek $\mathcal{Y}$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Jeśli $F_1|\mathrm{Sub}_k(\mathcal{X}) = F_2|\mathrm{Sub}_k(\mathcal{X})$ oraz $\mathrm{Sub}_k(\mathcal{X})$ jest niezdegenerowaną podprzestrzenią w przestrzeni $\mathfrak{P}$, to $F_1 = F_2$.*

DOWÓD. Załóżmy, że $\mathcal{X} = [Z, Y]$. Niech $U \in \mathcal{X}$, a więc $Z \subseteq U \subseteq Y$. Możliwe są trzy następujące przypadki:

$$\text{(a)}\quad \dim U \ < k, \qquad \text{(b)}\quad \dim U \ = k, \qquad \text{(c)}\quad k \ < \dim U.$$

W sytuacji (a) weźmy k-odcinek $[U, Y]_k$. Z założenia, że $\mathrm{Sub}_k(\mathcal{X})$ jest niezdegenerowanym k-odcinkiem $k < \dim Y$. Zatem niezdegenerowany jest również k-odcinek $[U, Y]_k$. Możemy więc zastosować 2.13, a zatem z równości

$$[F_1(U), F_1(Y)]_k = F_1([U, Y]_k) = F_2([U, Y]_k) = [F_2(U), F_2(Y)]_k$$

otrzymujemy $F_1(U) = F_2(U)$.

W przypadku (b) z założenia $F_1(U) = F_2(U)$, natomiast w przypadku (c) bierzemy k-odcinek $[Z, U]_k$ i rozumujemy analogicznie jak w (a). □

Z powyższego lematu wynika ważna własność rzutów w przestrzeniach pęków.

Stwierdzenie 2.15. *Jeśli f jest rzutem w przestrzeni pęków $\mathfrak{P}$ takim, że* $\mathrm{dm}(f)$ *jest niezdegenerowaną podprzestrzenią, to istnieje dokładnie jeden rzut F w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczający f.*

Dowód. Niech f będzie rzutem z podprzestrzeni odcinkowej $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ w przestrzeni pęków $\mathfrak{P}$. Przypuśćmy, że rzuty F_1, F_2 w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczają f, to znaczy

$$F_1|\mathrm{Sub}_k(V) = f = F_2|\mathrm{Sub}_k(V). \tag{2.4}$$

Z 2.10 wynika, że

$$\begin{gathered}\mathrm{dm}(F_1) \cap \mathrm{Sub}_k(V) = \mathcal{X}_1 = \mathrm{dm}(F_2) \cap \mathrm{Sub}_k(V), \text{ oraz} \\ \mathrm{rg}(F_1) \cap \mathrm{Sub}_k(V) = \mathcal{X}_2 = \mathrm{rg}(F_2) \cap \mathrm{Sub}_k(V).\end{gathered}$$

Ponieważ $\mathcal{X}_1$ jest niezdegenerowaną podprzestrzenią $\mathfrak{P}$ z założenia, więc $\mathcal{X}_2$ jako obraz $\mathcal{X}_1$ przy rzucie F_i jest również niezdegenerowaną podprzestrzenią $\mathfrak{P}$. Zatem z 2.3 mamy $\mathrm{dm}(F_1) = \mathrm{dm}(F_2)$ oraz $\mathrm{rg}(F_1) = \mathrm{rg}(F_2)$. Dlatego też, z uwagi na (2.4) możemy zastosować 2.14, skąd otrzymujemy $F_1 = F_2$. $\square$

Rozdział 3

Przestrzeń jeżowa

W rozważaniach nad geometriami zanurzalnymi w przestrzeni rzutowej z jednej strony pojawiają się struktury o czysto rzutowej naturze, takie jak przestrzenie pęków, z drugiej mamy przykłady struktur o własnościach charakterystycznych dla geometrii afinicznych. Wśród tych ostatnich znajdują się przestrzenie z dziurą (por. [7], [8]), afiniczne grasmaniany (por. [20]) oraz przestrzenie liniowych uzupełnień (por. [**?**], [18], [12, Roz. 8.4]). Przestrzeń jeżowa przedstawiona w [13] obejmuje wszystkie trzy wymienione klasy geometrii, które są jej szczególnymi przypadkami, włączając również przestrzeń pęków.

3.1 Krata z ustalonym elementem

Zanim podamy definicję przestrzeni jeżowej przedstawimy kilka ogólnych własności prostych w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym elementem W. Nie nakładamy żadnych ograniczeń na wymiar podprzestrzeni W i dopuszczamy W nieskończenie wymiarowe.

Dla dowolnego elementu U kraty $\mathfrak{L}(V)$ określamy:

$$\operatorname{Trc} U := U \cap W, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{Ctr} U := U + W. \tag{3.2}$$

Wartość $\operatorname{Trc} U$ nazywamy *śladem* U, natomiast $\operatorname{Ctr} U$ *kośladem* U. Zauważmy, że odwzorowania Trc i Ctr są szczególnymi przesunięciami kratowymi, a mianowicie, $\operatorname{Trc} = \mu_W$ oraz $\operatorname{Ctr} = \jmath_W$. Przypomnijmy, że zachowują one porządek w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Jeśli X jest zbiorem elementów kraty $\mathfrak{L}(V)$, to

$$\operatorname{Trc} X := \{\operatorname{Trc} U : U \in X\}, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{Ctr} X := \{\operatorname{Ctr} U : U \in X\}. \tag{3.4}$$

Lemat 3.1. *Niech* $p =]H, B[$ *będzie prostą w* $\mathfrak{L}(V)$.

(i) *Jeśli* $\operatorname{Trc} H = \operatorname{Trc} B$, *to* $\operatorname{Ctr} H \prec\!\!\!\prec \operatorname{Ctr} B$ *i* $\operatorname{Ctr} p$ *jest prostą.*

(ii) *Jeśli* $\operatorname{Ctr} H = \operatorname{Ctr} B$, *to* $\operatorname{Trc} H \prec\!\!\!\prec \operatorname{Trc} B$ *i* $\operatorname{Trc} p$ *jest prostą.*

(iii) *Jeśli* $\operatorname{Trc} H \prec\!\!\!\prec \operatorname{Trc} B$, *to* $\operatorname{Ctr} H = \operatorname{Ctr} B$.

(iv) *Jeśli* $\operatorname{Ctr} H \prec\!\!\!\prec \operatorname{Ctr} B$, *to* $\operatorname{Trc} H = \operatorname{Trc} B$.

(v) $\operatorname{Trc} H \prec \operatorname{Trc} B$ *wtw., gdy* $\operatorname{Ctr} H \prec \operatorname{Ctr} B$.

(vi) *Jeśli* $\operatorname{Trc} H \prec \operatorname{Trc} B$ *lub* $\operatorname{Ctr} H \prec \operatorname{Ctr} B$*, to istnieje dokładnie jeden* $U_0 \in p$ *taki, że dla dowolnego* $U \in p$*, różnego od* U_0*, zachodzi*

$$\begin{aligned}\operatorname{Trc} H &= \operatorname{Trc} U \prec \operatorname{Trc} U_0 = \operatorname{Trc} B,\\ \operatorname{Ctr} H &= \operatorname{Ctr} U_0 \prec \operatorname{Ctr} U = \operatorname{Ctr} B.\end{aligned}$$

(vii) *Jeśli* $U_1, U_2 \in p$ *i* $U_1 \neq U_2$*, to*

$$\operatorname{Trc} H = \operatorname{Trc} U_1 \cap \operatorname{Trc} U_2 \quad \textit{oraz} \quad \operatorname{Ctr} B = \operatorname{Ctr} U_1 + \operatorname{Ctr} U_2.$$

Dowód. (i) Ze względu na 1.51 przesunięcie $\operatorname{Ctr}|[H,B]$ jest bijekcją, a więc zgodnie z 1.52 przesunięcie to jest izomorfizmem odcinków $[H,B]$ i $[\operatorname{Ctr} H, \operatorname{Ctr} B]$. Stąd długość odcinka $[\operatorname{Ctr} H, \operatorname{Ctr} B]$ jest taka jak długość odcinka $[H,B]$, czyli 2. Ponadto $\operatorname{Ctr} p$ jest prostą.

(ii) Wynika z (i) i prawa dualności.

(iii) Z założenia istnieje D takie, że $\operatorname{Trc} B = \operatorname{Trc} H + D$, $\operatorname{Trc} H \cap D = \Theta$ i $\dim D = 2$. Zauważmy, że $D \subseteq B, W$, a więc $H \cap D \cap W = H \cap D$, skąd $H \cap D = \Theta$. Ponieważ $H + D \subseteq B$, więc z założenia o wymiarze D mamy $H + D = B$. W takim razie

$$\operatorname{Ctr} H = H + W = H + D + W = B + W = \operatorname{Ctr} B.$$

(iv) Wynika z (iii) i prawa dualności.

(v) Załóżmy, że $\operatorname{Trc} H \prec \operatorname{Trc} B$. Ponieważ długość odcinka $[H,B]$ wynosi 2, więc albo $\operatorname{Ctr} H = \operatorname{Ctr} B$, albo $\operatorname{Ctr} H \prec \operatorname{Ctr} B$, albo $\operatorname{Ctr} H \not\prec \operatorname{Ctr} B$. W pierwszym przypadku z (ii) dostajemy sprzeczność z założeniem, natomiast w ostatnim z (iv). Tak więc $\operatorname{Ctr} H \prec \operatorname{Ctr} B$. Implikację przeciwną dowodzi się analogicznie.

(vi) Zgodnie z (v) możemy założyć, że $\operatorname{Trc} H \prec \operatorname{Trc} B$. Wówczas istnieje atom D taki, że $\operatorname{Trc} B = \operatorname{Trc} H \oplus D$, lub innymi słowy $\operatorname{Trc} H \cap D = \Theta$ i $D \subseteq \operatorname{Trc} B$. Rozważmy $U_0 := H + D$. Zauważmy, że $U_0 \cap H = \Theta$, a więc $U_0 \in p$. Z modularności kraty $\mathfrak{L}(V)$ mamy

$$\operatorname{Trc} U_0 = (H + D) \cap W = (H \cap W) + D = \operatorname{Trc} B.$$

Weźmy dowolne $U \in p$, $U \neq U_0$. Z założenia oraz faktu, że $\operatorname{Trc} H \subseteq \operatorname{Trc} U \subseteq \operatorname{Trc} B$ mamy $\operatorname{Trc} U = \operatorname{Trc} H$ lub $\operatorname{Trc} U = \operatorname{Trc} B$. Gdy $\operatorname{Trc} U = \operatorname{Trc} B$, to $D \subseteq U$, a ponadto $H \subseteq U$, skąd uzyskujemy $U_0 \subseteq U$, a więc $U_0 = U$. W konsekwencji $\operatorname{Trc} U = \operatorname{Trc} H$ dla wszystkich $U \in p$ rożnych od U_0. Zauważmy teraz, że

$$\operatorname{Ctr} U = H + D + W = H + W = \operatorname{Ctr} H.$$

Dla dowolnego $U \in p$ takiego, że $U \neq U_0$ istnieje atom Q taki, że $U = H \oplus Q$, tzn. $H \cap Q = \Theta$. Zauważmy, że $H + Q + D = B$. Ponieważ $D \subseteq W$, więc

$$\operatorname{Ctr} U_1 = H + Q + W = H + Q + D + W = \operatorname{Ctr} B,$$

co kończy rozumowanie.

(vii) Wykażemy, że $\operatorname{Trc} H = \operatorname{Trc} U_1 \cap \operatorname{Trc} U_2$. Jeśli $\operatorname{Trc} H = \operatorname{Trc} B$ to $\operatorname{Trc} H = \operatorname{Trc} U_1 = \operatorname{Trc} U_2$ ponieważ $\operatorname{Trc} H \subseteq \operatorname{Trc} U_i \subseteq \operatorname{Trc} B$. Jeśli $\operatorname{Trc} H \prec \operatorname{Trc} B$, to równość jest prawdziwa zgodnie z (vi). Gdy natomiast $\operatorname{Trc} H \not\prec \operatorname{Trc} B$, to z (iii) mamy $\operatorname{Ctr} H = \operatorname{Ctr} B$, co z uwagi na 1.52 oznacza, że $\operatorname{Trc}|[H,B]$ jest izomorfizmem krat. Ponieważ $H = U_1 \cap U_2$, więc z stąd nasza równość.

Równość $\operatorname{Ctr} B = \operatorname{Ctr} U_1 + \operatorname{Ctr} U_2$ dowodzi się analogicznie. ∎

TWIERDZENIE 3.2. *Jeśli* $p =]H, B[$ *jest prostą w* $\mathfrak{L}(V)$, *to zachodzi jeden z poniższych warunków*

(i) $|\mathrm{Trc}\, p| = 1$ *oraz* $\mathrm{Ctr}\, p$ *jest prostą.*

(ii) $\mathrm{Trc}\, p$, *jak i* $\mathrm{Ctr}\, p$ *są łańcuchami długości 1,*

(iii) $\mathrm{Trc}\, p$ *jest prostą oraz* $|\mathrm{Ctr}\, p| = 1$.

DOWÓD. Długość odcinka $[H, B]$ wynosi 2, stąd prawdziwy jest jeden z następujących, warunków:

(a) $\mathrm{Trc}\, H = \mathrm{Trc}\, B$, (b) $\mathrm{Trc}\, H \prec \mathrm{Trc}\, B$, (c) $\mathrm{Trc}\, H \not\preccurlyeq \mathrm{Trc}\, B$.

W przypadku (a) zgodnie z 3.1(i) mamy (i). W przypadku (b) uzyskujemy (ii) z 3.1(vi). Gdy natomiast zachodzi (c), to tezę uzyskujemy z 3.1(iii) i 3.1(ii). □

Powyższe twierdzenie mówi, że w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W są trzy *rodzaje* prostych. Zgodnie z warunkami w 3.2 będziemy je nazywać odpowiednio: α*-proste*, *afiniczne* i ω*-proste*. Mówiąc *prosta rzutowa* mamy na myśli prostą typu α lub ω. Zgodnie z oznaczeniami w 3.1(vi), element U_0 prostej afinicznej p nazywamy *niewłaściwym* i oznaczamy przez p^∞. Zasadność takiej terminologii i jej zgodność z intuicją wyjaśni się, kiedy w sformułowane zostanie pojęcie przestrzeni jeżowej i przedstawione będą jej własności.

UWAGA 3.3. W 3.1 oraz 3.2 operacja śladu Trc może być zastąpiona dowolnym przesunięciem μ oraz operacja kośladu Ctr dowolnym przesunięciem $\jmath$.

STWIERDZENIE 3.4. *Niech p będzie prostą w kracie* $\mathfrak{L}(V)$ *z ustalonym* W.

(i) *Jeśli p jest α-prostą, to* $\mathrm{Ctr}\, p$ *jest α-prostą.*

(ii) *Jeśli p jest ω-prostą, to* $\mathrm{Trc}\, p$ *jest ω-prostą.*

DOWÓD. (i) Zgodnie z 3.1(i) $\mathrm{Ctr}\, p$ jest prostą. Niech $U_1, U_2 \in p$. Zauważmy, że

$$\mathrm{Trc}(\mathrm{Ctr}\, U_1) = (U_1 + W) \cap W = W = (U_2 + W) \cap W = \mathrm{Trc}(\mathrm{Ctr}\, U_2),$$

stąd ślady elementów prostej $\mathrm{Ctr}\, p$ są takie same więc $\mathrm{Ctr}\, p$ jest α-prostą.
(ii) Dualnie do (i). □

Prostej p w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W przyporządkowujemy

$$\widehat{p} = \begin{cases} p, & \text{gdy } p \text{ jest prostą rzutową,} \\ p \setminus \{p^\infty\}, & \text{gdy } p \text{ jest prostą afiniczną.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Jeśli $p =]H, B[$, to używamy również oznaczenia $\widehat{\mathbf{p}}(H, B) = \widehat{p}$ jeśli nie będzie to prowadzić do nieporozumień.

Podamy teraz kilka ważnych wniosków wynikających z 3.1 i 3.2 dla prostych o elementach skończonej wysokości w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Bezpośrednio z 3.2 wynika, że

LEMAT 3.5. *Jeśli U_1, U_2 są sąsiednimi elementami o skończonej wysokości w kracie* $\mathfrak{L}(V)$, *to*

$$|\dim \mathrm{Trc}\, U_1 - \dim \mathrm{Trc}\, U_2| \leqslant 1.$$

Lemat 3.6. *Jeśli p jest prostą o elementach skończonej wysokości w $\mathfrak{L}(V)$, to istnieją różne $U_1, U_2 \in p$ takie, że* $\dim \operatorname{Trc} U_1 = \dim \operatorname{Trc} U_2$.

Dowód. Na każdej prostej w $\mathfrak{L}(V)$ istnieją co najmniej trzy różne elementy. Opierając się na 3.2, dla każdego z trzech możliwych typów prostej p możemy wybrać dwa elementy $U_1, U_2 \in p$ takie, że albo $\operatorname{Trc} U_1 = \operatorname{Trc} U_2$, albo $\operatorname{Trc} U_1 \sim \operatorname{Trc} U_2$. W obu przypadkach $\dim \operatorname{Trc} U_1 = \dim \operatorname{Trc} U_2$. □

Lemat 3.7. *Jeśli U_1, U_2 są różnymi elementami o skończonej wysokości leżącymi na prostej p w kracie $\mathfrak{L}(V)$ i $\dim \operatorname{Trc} U_1 = \dim \operatorname{Trc} U_2 =: m_u$, to $\dim \operatorname{Ctr} U_1 = \dim \operatorname{Ctr} U_2 =: d_u$ oraz albo*

(i) *prosta p jest rzutowa i dla $U \in p$ mamy $\dim \operatorname{Trc} U = m_u$ i $\dim \operatorname{Ctr} U = d_u$, albo*

(ii) *prosta p jest afiniczna i istnieje dokładnie jeden element $U_0 \in p$ taki, że $\dim \operatorname{Trc} U_0 = m_u + 1$ oraz $\dim \operatorname{Ctr} U_0 = d_u - 1$, a dla pozostałych $U \in p$ mamy $\dim \operatorname{Trc} U = m_u$ i $\dim \operatorname{Ctr} U = d_u$.*

Dowód. Ponieważ $\dim \operatorname{Ctr} U = \dim U + \dim W - \dim \operatorname{Trc} U$ oraz wartości $\dim U$ i $\dim W$ są stałe dla wszystkich punktów U prostej $p = \overline{U_1, U_2}$, więc równość $\dim \operatorname{Trc} U_1 = \dim \operatorname{Trc} U_2$ jest równoważna $\dim \operatorname{Ctr} U_1 = \dim \operatorname{Ctr} U_2$. Zgodnie z 3.2, prosta p jest albo rzutowa i zachodzi (i), albo afiniczna i zachodzi (ii). □

Niech $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ będzie pękiem właściwym lub waflem odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W. Odcinek $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$ nazywamy *osobliwym*, gdy p jest prostą afiniczną i $p^\infty \in \mathcal{X}$ lub q jest prostą afiniczną i $q^\infty \in \mathcal{X}$.

Lemat 3.8. *Jeśli proste p, q są afiniczne w $\mathfrak{L}(V)$ i $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ jest waflem w $\mathfrak{L}(V)$, to $p^\infty \subseteq q^\infty$, czyli $[p^\infty, q^\infty] \in \mathsf{G}$.*

Dowód. Niech $p = \overline{Z_1, Z_2}$, $q = \overline{Y_1, Y_2}$. Zgodnie z 1.38 niech $q^\infty \cap Z'' =: Z \in p$. Zatem

$$Z \cap W = q^\infty \cap W \ \cap Z'' \cap W.$$

Stąd, ponieważ $q^\infty \cap W = Y'' \cap W$ z [15, 3.10] i ponadto $Z'' \cap W \subseteq Y'' \cap W$, to $Z \cap W = Z'' \cap W$. Ponownie z [15, 3.10] mamy $Z'' \cap W = p^\infty \cap W$. W konsekwencji $Z \cap W = p^\infty \cap W$, a więc $Z = p^\infty$ gdyż dla wszystkich $U \in p$ jest $\dim \operatorname{Trc} U = m_z$, a wyłącznie dla p^∞ mamy $\dim \operatorname{Trc} p^\infty = m_z + 1$. □

Zatem, w pęku odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W, może być najwyżej jeden element osobliwy, podobnie jak na prostej może być najwyżej jeden element niewłaściwy. Podkreślając te analogię, element osobliwy pęku odcinków G oznaczać będziemy przez G^∞. Ponadto wprowadzamy następujące oznaczenie

$$\widehat{\mathsf{G}} = \begin{cases} \mathsf{G}, & \text{gdy w } \mathsf{G} \text{ nie ma elementu osobliwego,} \\ \mathsf{G} \setminus \{\mathsf{G}^\infty\}, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases} \tag{3.6}$$

Zanotujemy teraz kilka faktów, użytecznych podczas rozważania pęków odcinków w kracie z ustalonym elementem.

Lemat 3.9. *Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą elementami pęku odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym elementem W.*

(i) *Jeśli* $Z_1 \neq Z_2$ *i* $\operatorname{Ctr} Z_1 = \operatorname{Ctr} Z_2$, *to* $\operatorname{Ctr} Y_1 = \operatorname{Ctr} Y_2$.

(ii) *Jeśli* $Y_1 \neq Y_2$ *i* $\operatorname{Trc} Y_1 = \operatorname{Trc} Y_2$, *to* $\operatorname{Trc} Z_1 = \operatorname{Trc} Z_2$.

Dowód. (i) Zgodnie z 1.38(i), $Y_i = \jmath_{Y'}(Z_i) = Z_i + Y'$, więc z założenia, że $Z_1 + W = Z_2 + W$ mamy

$$Y_1 + W = Z_1 + Y' + W = Z_2 + Y' + W = Y_2 + W.$$

(ii) Dualnie do (i). □

Jak się okazuje element $W_0 = Z + (W \cap Y)$ ma specjalne znaczenie dla odcinka $[Z, Y]$. Rola jaką pełni wyjaśni się później, gdy określimy pojęcie podprzestrzeni odcinkowej w przestrzeni jeżowej i przedstawimy kryterium na istnieje rzutów w przestrzeni jeżowej. Teraz podamy kilka podstawowych własności tego elementu.

Lemat 3.10. *Niech* $[Z, Y]$ *będzie odcinkiem kraty* $\mathfrak{L}(V)$ *z ustalonym elementem* W *i niech* $W_0 = Z + (W \cap Y)$. *Jeśli* $U, U_1, U_2 \in [Z, Y]$, *to*

(i) $U \cap W_0 = Z + (W \cap U)$ *oraz* $U + W_0 = (U + W) \cap Y$,

(ii) $\operatorname{Trc} U_1 = \operatorname{Trc} U_2$ *wtw., gdy* $U_1 \cap W_0 = U_2 \cap W_0$,

(iii) $\operatorname{Ctr} U_1 = \operatorname{Ctr} U_2$ *wtw., gdy* $U_1 + W_0 = U_2 + W_0$.

Dowód. (i) Z modularności kraty mamy

$$U \cap W_0 = U \cap (Z + W) \cap Y = (Z + W) \cap U = Z + (W \cap U),$$

oraz

$$U + W_0 = U + Z + (W \cap Y) = U + (W \cap Y) = (U + W) \cap Y.$$

(ii) Jeśli $\operatorname{Trc} U_1 = \operatorname{Trc} U_2$, to z (i) mamy $U_1 \cap W_0 = U_2 \cap W_0$.

Załóżmy teraz, że $U_1 \cap W_0 = U_2 \cap W_0$. Po podstawieniu zgodnie z (i) z modularności otrzymujemy

$$(Z + W) \cap U_1 = (Z + W) \cap U_2.$$

Jeśli pomnożymy obie strony tego równania przez W dostaniemy $\operatorname{Trc} U_1 = \operatorname{Trc} U_2$.

(ii) Dowód przebiega dualnie do (ii). □

Dla każdego odcinka kraty można więc wprowadzić pojęcia lokalnego śladu i kośladu, które mają to samo znaczenie co ślad i koślad globalny, w przypadku gdy rozważana jest struktura podkraty wyznaczonej przez odcinek.

Lemat 3.11. *Jeśli* $[Z, Y]$ *jest niepustym odcinkiem kraty* $\mathfrak{L}(V)$ *z ustalonym* W, *to* $\operatorname{Trc}(Z + (W \cap Y)) = \operatorname{Trc} Y$ *i* $\operatorname{Ctr}(Z + (W \cap Y)) = \operatorname{Ctr} Z$.

Dowód. Niech $W_0 = Z + (W \cap Y)$. Zauważmy, że $W_0, Y \in [Z, Y]$ oraz $W_0 \cap W_0 = Y \cap W_0$. Zatem z 3.10(ii) uzyskujemy $\operatorname{Trc} W_0 = \operatorname{Trc} Y$. Ponieważ $W_0 + W_0 = Z + W_0$, więc z 3.10(iii) mamy $\operatorname{Ctr} W_0 = \operatorname{Ctr} Z$. □

3.2 Określenie przestrzeni jeżowej

Punktem wyjścia do definicji przestrzeni jeżowej jest przestrzeń pęków. Niech zatem $\mathfrak{P} = \mathbf{P}_k(V)$ będzie przestrzenią pęków nad $\mathfrak{L}(V)$ określoną w (2.1). Poza ustalonym elementem W w $\mathfrak{L}(V)$ ustalamy jeszcze liczbę naturalną m taką, aby

$$m_{\min} := \max(0, k - \operatorname{codim} W) \leqslant m \leqslant \min(k, \dim W) =: m_{\max}, \tag{3.7}$$

to znaczy, aby parametr m miał sens przy dalszej konstrukcji, w stosunku do ustalonych V, W, k. Tak jak w [13] niech

$$\mathcal{F}_{k,m}(W) = \{U \in \operatorname{Sub}_k(V)\colon \dim U \cap W = m\}, \tag{3.8}$$

oraz

$$\mathcal{G}_{k,m}(W) = \{p \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)\colon p \in \mathcal{P}_k(V) \text{ i } |p \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)| \geqslant 2\}. \tag{3.9}$$

Geometrię, której punktami są elementy zbioru $\mathcal{F}_{k,m}(W)$, a prostymi elementy $\mathcal{G}_{k,m}(W)$ nazywamy *przestrzenią jeżową* i oznaczamy:

$$\mathfrak{A} = \mathbf{A}_{k,m}(W) = \langle \mathcal{F}_{k,m}(W), \mathcal{G}_{k,m}(W) \rangle. \tag{3.10}$$

Szczególnymi przypadkami przestrzeni jeżowych są: przestrzeń rzutowa z dziurą dla $k = 1$ lub $k = \dim V - 1$ (por. [14]), przestrzeń afiniczna dla $k = 1$, $m = 0$ i $\operatorname{codim} W = 1$ lub dualnie $k = \dim V - 1$, $m = 0$ i $\dim W = 1$, grasmanian afiniczny dla $m = k - 1$ i $\operatorname{codim} W = 1$, przestrzeń liniowych uzupełnień dla $m = 0$ i $k = \operatorname{codim} W$ (por. [18]), przestrzeń pęków dla $m = m_{\max}$.

Mówimy, że przestrzeń jeżowa jest *niezdegenerowana*, gdy jej zbiór prostych jest niepusty. Zgodnie z wynikami [13] niezdegenerowane przestrzenie jeżowe są spójnymi, częściowymi przestrzeniami prostych. Poza przestrzeniami rzutowymi z dziurą, przestrzenie jeżowe są właściwymi częściowymi przestrzeniami prostych.

Dalej zakładamy, że przestrzeń $\mathfrak{A}$ jest nietrywialna, to znaczy, że w $\mathfrak{A}$ istnieje prosta i punkt poza tą prostą. W celu skrócenia zapisu używamy następujących podstawień

$$n = \dim V, \quad w = \dim W, \quad n - w = \operatorname{codim} W. \tag{3.11}$$

Każdej prostej g z $\mathfrak{A}$, przyporządkowujemy k-pęk $\overline{g}$, to znaczy prostą z $\mathfrak{P}$ taką, że $g = \overline{g} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$. Zgodnie z 3.7 dla prostej $g \in \mathcal{G}_{k,m}(W)$ albo $\overline{g} \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$, albo zbiór $\overline{g} \setminus g$ jest jedno-elementowy. Przypomnijmy, że element tego zbioru oznaczamy przez g^∞, proste spełniające pierwszy warunek nazywamy *rzutowymi*, natomiast te, spełniające drugi, *afinicznymi*. Zbiór prostych afinicznych oznaczamy przez $\mathcal{A}_{k,m}(W)$, α-prostych przez $\mathcal{L}^{\alpha}_{k,m}(W)$ i ω-prostych przez $\mathcal{L}^{\sigma}_{k,m}(W)$. Dokładna klasyfikacja prostych przestrzeni jeżowej przedstawiona jest w tabeli 3.1.

klasa	prosta $g = \mathbf{p}(H, B) \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$	g^∞
$\mathcal{A}_{k,m}(W)$	$H \in \mathcal{F}_{k-1,m}(W),\ B \in \mathcal{F}_{k+1,m+1}(W)$	$H + (B \cap W)$
$\mathcal{L}^{\alpha}_{k,m}(W)$	$H \in \mathcal{F}_{k-1,m}(W),\ B \in \mathcal{F}_{k+1,m}(W)$	–
$\mathcal{L}^{\sigma}_{k,m}(W)$	$H \in \mathcal{F}_{k-1,m-1}(W),\ B \in \mathcal{F}_{k+1,m+1}(W)$	–

Tabela 3.1: Klasyfikacja prostych w przestrzeni jeżowej $\mathbf{A}_{k,m}(V, W)$.

Klasyfikacja ta jest konsekwencją 3.1 i 3.2, które w terminach bezwymiarowych – sąsiedniości i poprzedzania – oddają klasyfikację prostych przestrzeni jeżowej przedstawioną w [13]. Lemat 3.6 mówi, że dla dowolnej prostej p o elementach skończonej wysokości można dobrać parametry k_p, m_p tak, aby prosta p była prostą przestrzeni jeżowej przy ustalonym W, a mianowicie $\mathbf{A}_{k_p,m_p}(V, W)$.

Mówimy, że podprzestrzeń $\mathcal{H}$ przestrzeni $\mathfrak{A}$ jest *afiniczna* (*rzutowa*) jeśli $\mathcal{H}$ zawiera wyłącznie proste afiniczne (rzutowe). Wśród podprzestrzeni rzutowych wyróżniamy te, które zawierają wyłącznie α-proste. W odniesieniu do tych podprzestrzeni stosujemy termin *podprzestrzenie α-rzutowe.* Podobnie definiuje się *podprzestrzenie ω-rzutowe.* Mówimy, że podprzestrzeń $\mathcal{H}$ jest *α-semi-afiniczna* (*ω-semi-afiniczna*), gdy zawiera proste afiniczne i nie zawiera ω-prostych (α-prostych), albo jest zdegenerowana. Podprzestrzeń przestrzeni jeżowej jest *semi-afiniczna*, gdy jest α-semi-afiniczna lub ω-semi-afiniczna. Zauważmy, że podprzestrzeń, która jest jednocześnie α-semi-afiniczna i ω-semi-afiniczna to podprzestrzeń afiniczna. Zatem podprzestrzenie afiniczne są semi-afiniczne. Zgodnie z określeniem podprzestrzeń zdegenerowana jest zarazem semi-afiniczna, afiniczna jak i rzutowa. Szczegółowa analiza wszystkich wymienionych typów podprzestrzeni zostanie przedstawiona w podsekcji 3.3.3.

W przestrzeni jeżowej określa się relację równoległości dla prostych afinicznych w następujący sposób:

$$g_1 \parallel g_2 \quad \text{wtw., gdy} \quad g_1^\infty = g_2^\infty. \tag{3.12}$$

Jest to typowa definicja dla geometrii rzutowych. Uzyskana relacja równoległości, jest równoległością częściową, w tym sensie, że nie przez każdy punkt U możemy poprowadzić prostą równoległą do danej prostej g. Jeśli taka prosta istnieje oznaczamy ją przez $U * g$.

W [18] została przedstawiona, a w [16] dokładniej zbadana relacja *rozszerzonej równoległości* $\parallel_\blacklozenge$ w przestrzeni jeżowej. Jeśli U_1, U_2 są punktami pewnej przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$, to piszemy $U_1 \simeq^\tau U_2$, gdy istnieje łamana składająca się z prostych afinicznych tej przestrzeni $\mathfrak{A}$, łącząca punkty U_1, U_2. Zgodnie z [13] horyzontem przestrzeni jeżowej $\mathbf{A}_{k,m}(V, W)$ jest również przestrzeń jeżowa

$$\mathbf{H}(\mathbf{A}_{k,m}(V, W)) = \mathbf{A}_{k,m+1}(V, W)$$

o ile tylko $m+1 \leqslant m_{\max}$. Ma zatem sens następująca definicja: jeśli g_1, g_2 są prostymi afinicznymi w $\mathfrak{A}$, to

$$g_1 \parallel_\blacklozenge g_2 \quad \text{wtw., gdy} \quad g_1^\infty \simeq^\tau g_2^\infty. \tag{3.13}$$

Nazwę relacji $\parallel_\blacklozenge$ usprawiedliwia fakt, że $\parallel \subseteq \parallel_\blacklozenge$. Przestrzeń jeżowa $\mathfrak{A}$ wraz z relacją $\parallel_\blacklozenge$ spełnia afiniczny warunek Veblena, twierdzenie o uzupełnianiu do równoległego trójkąta oraz (duże) twierdzenia Desarguesa (por. [16]).

Zgodnie z wynikami [13, 19] przestrzenie jeżowe spełniają afiniczny warunek Veblena, zarówno względem $\parallel$ jak i $\parallel_\blacklozenge$, oraz aksjomat Shulta (por. [5]). Prawdziwe są w tej geometrii również: konfiguracyjny wariant twierdzenia o uzupełnianiu do równoległoboku, twierdzenie o uzupełnianiu do trójkąta równoległego oraz (duże) twierdzenie Desarguesa.

3.3 Podprzestrzenie odcinkowe

Ważną klasą podprzestrzeni przestrzeni jeżowej są *podprzestrzenie odcinkowe* tzn., zbiory postaci $[Z, Y] \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$, gdzie $[Z, Y]$ jest odcinkiem kraty $\mathfrak{L}(V)$. Zauważmy, że każdy zbiór takiej postaci jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathfrak{A}$. Jest to konsekwencją 3.7 oraz faktu, że odcinki kraty $\mathfrak{L}(V)$ są wypukłe (por. 1.15). Jeśli nie powoduje to niejasności piszemy krótko $[Z,Y]_{\mathcal{F}}$ dla oznaczenia podprzestrzeni odcinkowej w $\mathfrak{A}$ o wierzchołku Z i podstawie Y. Mówimy, że odcinek $[Z,Y]$ kraty $\mathfrak{L}(V)$ *wyznacza* odcinek $[Z,Y]_{\mathcal{F}}$ w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$.

Fakt 3.12. (Prażmowski [15]) *Podprzestrzeń odcinkowa* $[Z,Y]_k \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$ *jest izomorficzna z przestrzenią jeżową* $\mathbf{A}_{k-\dim Z, m-\dim \operatorname{Trc} Z}(Y/Z,(Z+(Y\cap W))/Z)$.

Naturalnym pytaniem jakie może się w tym miejscu nasuwać jest to, czy typ prostej zależy, czy też nie, od tego w jakiej podprzestrzeni przestrzeni jeżowej ją rozważamy. Niech $\mathcal{X} = [Z,Y]_{\mathcal{F}}$ będzie podprzestrzenią odcinkową w $\mathfrak{A}$. Zgodnie z 3.12 niesie ona strukturę przestrzeni jeżowej

$$\mathfrak{A}_0 := \mathbf{A}_{k-z,m-m_z}(Y/Z,(Z+(Y\cap W))/Z),$$

gdzie $z = \dim Z$ i $m_z = \dim \operatorname{Trc} Z$. Izomorfizm dany jest przekształceniem

$$\eta\colon \mathcal{X} \ni U \rightsquigarrow U/Z \in \operatorname{Sub}_{k-z}(Y/Z).$$

Przyjmijmy oznaczenie $W_0 := Z + (W\cap Y)$. Przestrzeń jeżową $\mathfrak{A}_0$ można traktować jako przestrzeń określoną w kracie $\mathfrak{L}(Y/Z)$ z ustalonym W_0/Z. Wówczas ślad punktu U/Z w tej przestrzeni ma postać

$$\operatorname{Trc}_{\mathfrak{A}_0}(U/Z) = U/Z \cap W_0/Z = (U\cap W_0)/Z,$$

podczas, gdy ślad punktu U w przestrzeni $\mathfrak{A}$ to

$$\operatorname{Trc}_{\mathfrak{A}} U = U \cap W.$$

Z uwagi na 3.10(ii) prawdziwa jest równoważność

$$\operatorname{Trc}_{\mathfrak{A}} U_1 = \operatorname{Trc}_{\mathfrak{A}} U_2 \quad \text{wtw., gdy} \quad \operatorname{Trc}_{\mathfrak{A}_0}(U_1/Z) = \operatorname{Trc}_{\mathfrak{A}_0}(U_2/Z).$$

Korzystając z prawa dualności uzyskamy analogiczną równoważność dla kośladów

$$\operatorname{Ctr}_{\mathfrak{A}} U_1 = \operatorname{Ctr}_{\mathfrak{A}} U_2 \quad \text{wtw., gdy} \quad \operatorname{Ctr}_{\mathfrak{A}_0}(U_1/Z) = \operatorname{Ctr}_{\mathfrak{A}_0}(U_2/Z).$$

W rezultacie typ prostej nie zależy od tego w jakiej podprzestrzeni odcinkowej przestrzeni jeżowej tę prostą rozpatrujemy (por. 3.2).

Podkreślmy szczególne znaczenie elementu W_0 w odcinku $[Z,Y]$. Otóż zgodnie z 3.10(i) dla $U \in [Z,Y]$ mamy

$$\dim U\cap W = m \qquad \text{wtw., gdy} \qquad \dim U \cap W_0 = z + m - m_z,$$

a więc

$$[Z,Y]_{\mathcal{F}} = \{U \in [Z,Y]_k \colon \dim U\cap W_0 = z+m-m_z\},$$

co oznacza, że W_0 pełni taką samą rolę w odcinku $[Z,Y]$ przy rozważaniu przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}_0$ jak W w kracie $\mathfrak{L}(V)$ przy rozważaniu przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$.

Zajmujemy się wyłącznie nietrywialnymi przestrzeniami jeżowymi, lecz do analizy podprzestrzeni odcinkowych w $\mathfrak{A}$ potrzebujemy zestawy parametrów, przy których przestrzeń jeżowa degeneruje się do punktu lub prostej. Zostały one zebrane w tabeli 3.2 (por. [19]).

punkt	prosta afiniczna	α-prosta	ω-prosta
$k = 0$ lub $k = n$ or $m = k = w$	$n = 2, k = 1 = w, m = 0$	$m = w = k - 1 = n - 2$	$k = 1 = m, w = 2$

Tabela 3.2: Trywialne przestrzenie jeżowe.

3.3.1 Mocne podprzestrzenie

Ważną podklasą podprzestrzeni odcinkowych są mocne podprzestrzenie. Podobnie jak w przypadku przestrzeni pęków, w przestrzeni jeżowej są dwa *typy* mocnych podprzestrzeni, a mianowicie gwiazdy i układy.

Fakt 3.13. (Prażmowski [13]) *Niech $\mathcal{H}$ będzie mocną podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$ i niech*

$$\overline{\mathcal{H}} = \bigcup\{\overline{g} \colon g \in \mathcal{G}_{k,m}(W),\ g \subseteq \mathcal{H}\}.$$

Zbiór $\overline{\mathcal{H}}$ jest mocną podprzestrzenią $\mathfrak{P}$ i $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$.

Wśród gwiazd w przestrzeni $\mathfrak{A}$ rozróżniamy α-gwiazdy i ω-gwiazdy oraz podobnie dla układów: α-układy i ω-układy. Ponieważ każda mocna podprzestrzeń $\mathfrak{P}$ jest, z dokładnością do izomorfizmu, przestrzenią rzutową, to każda mocna podprzestrzeń $\mathfrak{A}$ jest przestrzenią rzutową $\mathbf{P}$ z dziurą, tzn. usuniętą podprzestrzenią $\mathcal{D}$ (por. [13]). W tabeli 3.3 przedstawiono klasyfikacje maksymalnych gwiazd i układów.

klasa	reprezentant	$\dim \mathbf{P}$	$\dim \mathcal{D}$
$\mathcal{S}^{\omega}_{k,m}(W)$	$[H, H + W]_k \colon H \in \mathcal{F}_{k-1,m-1}(W)$	$\dim W - m$	-1
$\mathcal{S}^{\alpha}_{k,m}(W)$	$[H, V]_{\mathcal{F}} \colon H \in \mathcal{F}_{k-1,m}(W)$	$\dim V - k$	$\dim W - m - 1$
$\mathcal{T}^{\alpha}_{k,m}(W)$	$[B \cap W, B]_k \colon B \in \mathcal{F}_{k+1,m}(W)$	$k - m$	-1
$\mathcal{T}^{\omega}_{k,m}(W)$	$[\Theta, B]_{\mathcal{F}} \colon B \in \mathcal{F}_{k+1,m+1}(W)$	k	$k - m - 1$

Tabela 3.3: Klasyfikacja maksymalnych gwiazd i układów w $\mathbf{A}_{k,m}(V, W)$.

To, że są cztery *rodzaje* gwiazd i układów w przestrzeni $\mathfrak{A}$ nie oznacza, że zawsze istnieją odpowiednie podprzestrzenie. W tabeli 3.4 zebrano wszystkie możliwe degeneracje jakim mogą ulegać maksymalne gwiazdy i układy.

		elementy są			
klasa	klasa pusta	punktami	prostymi:	afinicznymi	rzutowymi
$\mathcal{S}^{\omega}_{k,m}(W)$	$m = 0$	$m = w$	$m = w - 1$	nigdy	zawsze
$\mathcal{S}^{\alpha}_{k,m}(W)$	$m = k$	$k = n$	$k = n - 1$	$m = w - 1$	$m = w$
$\mathcal{T}^{\alpha}_{k,m}(W)$	$k - m = n - w$	$m = k$	$m = k - 1$	nigdy	zawsze
$\mathcal{T}^{\omega}_{k,m}(W)$	$m = w$	$k = 0$	$k = 1$	$m = 0$	$m = 1$

Tabela 3.4: Degeneracje maksymalnych gwiazd i układów w $\mathbf{A}_{k,m}(V, W)$.

W przestrzeni jeżowej każdą prostą można jednoznacznie rozszerzyć do maksymalnej gwiazdy i układu. Maksymalne α-gwiazdy $\mathcal{S}^{\alpha}_{k,m}(W)$ i maksymalne α-układy $\mathcal{T}^{\alpha}_{k,m}(W)$ są rozszerzeniami α-prostych, natomiast maksymalne ω-gwiazdy $\mathcal{S}^{\omega}_{k,m}(W)$ i maksymalne ω-układy $\mathcal{T}^{\omega}_{k,m}(W)$ są rozszerzeniami ω-prostych. Proste afiniczne rozszerzają się do α-gwiazd i ω-układów. Proste są szczególnymi mocnymi podprzestrzeniami i są jednocześnie gwiazdami i układami. W pewnych przestrzeniach jeżowych proste mogą być maksymalnymi gwiazdami lub układami.

Jak widać z powyższych rozważań, α-gwiazdy są podprzestrzeniami α-semi-afinicznymi, ω-gwiazdy są podprzestrzeniami ω-rzutowymi, α-układy to podprzestrzenie α-rzutowe i ω-układy to podprzestrzenie ω-semi-afiniczne.

Na podstawie tabeli 3.1 możemy podać warunki na to, kiedy nie ma prostych danego typu, natomiast na podstawie tabeli 3.4, kiedy proste danego typu są maksymalnymi gwiazdami lub układami.

klasa	klasa pusta	maks. gwiazdy	maks. układy
$\mathcal{A}_{k,m}(W)$	$m = k$ lub $m = w$	$k = n - 1, m = w - 1$	$k = 1, m = 0$
$\mathcal{L}^{\alpha}_{k,m}(W)$	$m = k$ lub $k - m = n - w$	$k = n - 1, m = w$	$m = k - 1$
$\mathcal{L}^{\sigma}_{k,m}(W)$	$m = 0$ lub $m = w$	$m = w - 1$	$k = 1 = m$

Tabela 3.5: Degeneracje prostych i ich rozszerzeń do maksymalnych gwiazd i układów w $\mathbf{A}_{k,m}(V, W)$.

W mocnej podprzestrzeni $\mathcal{H}$ przez każdy punkt istnieje prosta równoległa do danej prostej afinicznej zawartej w $\mathcal{H}$ (por. [15]). Jest to konsekwencja faktu, że w $\overline{\mathcal{H}}$ każde dwa punkty są współliniowe, w szczególności punkty właściwe i niewłaściwe przestrzeni $\mathfrak{A}$.

3.3.2 Horyzont podprzestrzeni odcinkowej

Badając strukturę przestrzeni jeżowych często odwołujemy się do zbioru kierunków, inaczej mówiąc do zbioru punktów niewłaściwych, albo horyzontu. Dla dowolnego zbioru punktów X w przestrzeni $\mathfrak{A}$ przyporządkowujemy zbiór

$$X^{\infty} = \{g^{\infty} \colon\ g \in \mathcal{A}_{k,m}(W),\ g \subseteq X\} \tag{3.14}$$

punktów niewłaściwych leżących na prostych afinicznych zawartych w zbiorze X. Udowodnimy teraz kilka podstawowych własności zdefiniowanego horyzontu podprzestrzeni w przestrzeni jeżowej.

LEMAT 3.14. *Podprzestrzeń $\mathcal{X}$ przestrzeni $\mathfrak{A}$ jest rzutowa wtw., gdy $\mathcal{X}^\infty = \emptyset$.*

DOWÓD. $\Rightarrow$: Załóżmy, że $\mathcal{X}$ jest podprzestrzenią rzutową w $\mathfrak{A}$. Zgodnie z definicją przestrzeni rzutowej, każda prosta $g \subseteq \mathcal{X}$ jest rzutowa. Zatem $\mathcal{X}^\infty = \emptyset$.

$\Leftarrow$: Jeśli podprzestrzeń $\mathcal{X}$ jest zdegenerowana, tzn. nie zawiera żadnej prostej, to zgodnie z określeniem $\mathcal{X}$ jest rzutowa. Przypuśćmy więc, że $\mathcal{X}$ nie jest zdegenerowana. Weźmy dowolną prostą g przestrzeni $\mathfrak{A}$, taką że $g \subseteq \mathcal{X}$. Gdyby g była prostą afiniczną, to $g^\infty \in \mathcal{X}^\infty$, co przeczy założeniu, że $\mathcal{X}^\infty = \emptyset$. Zatem g jest rzutowa i dowód jest zakończony. □

LEMAT 3.15. *Jeśli $\mathcal{X} = [Z, Y] \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$ jest niepustą podprzestrzenią przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$, to $\mathcal{X}^\infty = [Z, Y] \cap \mathcal{F}_{k,m+1}(W)$.*

DOWÓD. $\subseteq$: Niech $U \in \mathcal{X}^\infty$. Zatem z (3.14) istnieje prosta afiniczna $g \subseteq \mathcal{X}$ taka, że $g^\infty = U$. Stąd, zgodnie z 3.7 $\dim \operatorname{Trc} U = m + 1$. Jednocześnie z 1.15 mamy $\overline{g} \subseteq [Z, Y]$, a więc $U \in [Z, Y]$. Ostatecznie $U \in [Z, Y] \cap \mathcal{F}_{k,m+1}(W)$.

$\supseteq$: Teraz niech $U \in [Z, Y]$ i $U \in \mathcal{F}_{k,m+1}(W)$. Musimy wskazać prostą afiniczną g taką, że $g \subseteq \mathcal{X}$ i $U = g^\infty$.

Podprzestrzeń $\mathcal{X}$ jest niepusta możemy zatem wziąć punkt $U_0 \in \mathcal{X}$. Ponieważ $U \in \mathcal{F}_{k,m}(W)$, więc $U \neq U_0$. Ponadto $Z \subseteq U, U_0 \subseteq Y$ skąd

$$\dim Z \leqslant \dim U \cap U_0 \leqslant k - 1 \quad \text{oraz} \quad k + 1 \leqslant \dim U + U_0 \leqslant \dim Y. \tag{3.15}$$

Zauważmy również, że

$$\dim \operatorname{Trc} Z \leqslant \dim \operatorname{Trc} U_0 = m.$$

Istnieje zatem jednowymiarowa podprzestrzeń $D \subseteq W$ taka, że $Z \cap D = \Theta$ oraz $Z + D \subseteq U$. Podprzestrzeń U ma postać

$$U = Z \oplus D \oplus Q,$$

gdzie $\dim Q = k - \dim Z - 1$. Weźmy $H := Z \oplus Q$. Zauważmy, że $\dim H = k - 1$ oraz

$$H + W = Z + Q + W = Z + Q + D + W = U + W.$$

Stąd

$$\dim \operatorname{Trc} H = k - 1 + \dim W - (k + \dim W - m - 1) = m.$$

Podprzestrzeń $\mathcal{X}_0 := [H, Y] \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$, zgodnie z tabelą 3.3 jest α-gwiazdą w $\mathfrak{A}$ natomiast z tabeli 3.4 oraz faktu, że $m + 1 = \dim \operatorname{Trc} U \leqslant k$, gwiazda $\mathcal{X}_0$ jest niepusta. Weźmy więc $U_0 \in \mathcal{X}_0$. Zauważmy, że $U \sim U_0$, gdyż H jest ich wspólnym poprzednikiem. Z uwagi na 3.2 oraz prosta $p = \overline{U, U_0}$ jest afiniczna w kracie $\mathfrak{L}(V)$, a więc $g := p \setminus \{U\}$ jest prostą afiniczną w $\mathfrak{A}$. Z 1.15 mamy $g \subseteq [Z, Y]$, co kończy dowód. □

Jak już zostało wcześniej powiedziane horyzont $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$ przestrzeni jeżowej jest przestrzenią jeżową. Z powyższego lematu wynika, że horyzont podprzestrzeni odcinkowej w $\mathfrak{A}$ jest podprzestrzenią odcinkową na horyzoncie $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$.

Niech X, Y będą podprzestrzeniami przestrzeni jeżowej zawierającymi proste afiniczne. Mówimy, że podprzestrzeń X jest równoległa do podprzestrzeni Y w sensie relacji $\parallel$ (lub $\parallel_\blacklozenge$), wtw., gdy dla każdej prostej afinicznej g zawartej w X istnieje prosta afiniczna h w Y taka, że $g \parallel h$ (lub odpowiednio $g \parallel_\blacklozenge h$) i na odwrót. Relacja równoległości jest więc zawsze symetryczna.

LEMAT 3.16. *Jeśli $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są podprzestrzeniami zawierającymi proste afiniczne w przestrzeni $\mathfrak{A}$, to*

$$\mathcal{X}_1 \parallel \mathcal{X}_2 \quad \textit{wtw., gdy} \quad \mathcal{X}_1^\infty = \mathcal{X}_2^\infty.$$

DOWÓD. $\Rightarrow$: Niech $U \in \mathcal{X}_1^\infty$. Z (3.14) istnieje prosta prosta afiniczna $g_1 \subseteq \mathcal{X}_1$ taka, że $U = g_1^\infty$. Z założenia, że $\mathcal{X}_1 \parallel \mathcal{X}_2$ istnieje prosta afiniczna $g_2 \subseteq \mathcal{X}_2$ taka, że $g_1 \parallel g_2$. Z określenia (3.12) relacji $\parallel$ dla prostych mamy $U = g_1^\infty = g_2^\infty$, zatem zgodnie z (3.14) $U \in \mathcal{X}_2^\infty$. W konsekwencji $\mathcal{X}_1^\infty \subseteq \mathcal{X}_2^\infty$.

Analogicznie wykazać można inkluzję odwrotną $\mathcal{X}_2^\infty \subseteq \mathcal{X}_1^\infty$.

$\Leftarrow$: Niech g_1 będzie prostą afiniczną taką, że $g_1 \subseteq \mathcal{X}_1$. Ponieważ z założenia $g_1^\infty \in \mathcal{X}_2^\infty$, więc z (3.14) istnieje prosta afiniczna $g_2 \subseteq \mathcal{X}_2$ taka, że $g_2^\infty = g_1^\infty$. Z (3.12) otrzymujemy $g_1 \parallel g_2$ i podprzestrzeń $\mathcal{X}_1$ jest równoległa do $\mathcal{X}_2$ względem $\parallel$.

Analogicznie można wykazać, że podprzestrzeń $\mathcal{X}_2$ jest równoległa do $\mathcal{X}_1$ względem $\parallel$. $\square$

3.3.3 Klasyfikacja podprzestrzeni odcinkowych

Klasyfikację podprzestrzeni odcinkowych przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ rozpoczynamy od analizy płaszczyzn. Przypomnijmy, że płaszczyzny w przestrzeni jeżowej to najmniejsze, nietrywialne mocne podprzestrzenie.

Niech $\Pi = [H, Y]_k$ będzie płaszczyzną typu gwiazda w przestrzeni pęków $\mathfrak{P}$. Wówczas $\dim H = k - 1$ i $\dim Y = k + 2$. Rozważmy $\Pi_\mathcal{F} = \Pi \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$. Z 3.12 $\Pi_\mathcal{F}$ jest, z dokładnością do izomorfizmu, przestrzenią jeżową $\mathbf{A}_{1,m_\Pi}(V_\Pi, W_\Pi)$, gdzie $m_\Pi \in \{0, 1\}$, $\dim V_\Pi = 3$ oraz $\dim W_\Pi \in \{0, 1, 2, 3\}$. Przypuśćmy, że $m_\Pi = 0$ i $\dim W_\Pi = 0$. Wtedy z 3.12 wylicza się, że $H \in \mathcal{F}_{k-1,m}(W)$ i $Y \in \mathcal{F}_{k+2,m}(W)$, więc zgodnie z tabelą 3.3 płaszczyzna $\Pi_\mathcal{F}$ jest α-gwiazdą. Z drugiej strony $\Pi_\mathcal{F}$ jest płaszczyzną rzutową, gdyż liniowy wymiar usuniętej przestrzeni jest 0.

Teraz niech $m_\Pi = 0$ oraz $\dim W_\Pi = 1$. Podobnie jak wcześniej oblicza się, że $H \in \mathcal{F}_{k-1,m}(W)$ i $Y \in \mathcal{F}_{k+2,m+1}(W)$. Tak jak wyżej $\Pi_\mathcal{F}$ jest α-gwiazdą. Z drugiej strony $\Pi_\mathcal{F}$ jest płaszczyzną rzutową z usuniętym punktem, czyli płaszczyzną semiafiniczną.

Postępując analogicznie, jeśli uwzględnimy zestawy parametrów dla których $\Pi_\mathcal{F}$ degeneruje się do zbioru pustego, punktu lub prostej, zebranych w tabeli 3.2, dostaniemy tabelę 3.6.

klasa	reprezentant	typ	horyzont
$\mathrm{PP}^{\omega,\mathcal{S}}_{k,m}(W)$	$[H,Y]_{\mathcal{F}}\colon H\in\mathcal{F}_{k-1,m-1}(W), Y\in\mathcal{F}_{k+2,m+2}(W)$	rzutowa	pusty
$\mathrm{PP}^{\alpha,\mathcal{S}}_{k,m}(W)$	$[H,Y]_{\mathcal{F}}\colon H\in\mathcal{F}_{k-1,m}(W), Y\in\mathcal{F}_{k+2,m}(W)$	rzutowa	pusty
$\mathrm{SP}^{\alpha,\mathcal{S}}_{k,m}(W)$	$[H,Y]_{\mathcal{F}}\colon H\in\mathcal{F}_{k-1,m}(W), Y\in\mathcal{F}_{k+2,m+1}(W)$	semi-af.	punkt
$\mathrm{AP}^{\alpha,\mathcal{S}}_{k,m}(W)$	$[H,Y]_{\mathcal{F}}\colon H\in\mathcal{F}_{k-1,m}(W), Y\in\mathcal{F}_{k+2,m+2}(W)$	afiniczna	ω-prosta
$\mathrm{PP}^{\alpha,\mathcal{T}}_{k,m}(W)$	$[Z,B]_{\mathcal{F}}\colon Z\in\mathcal{F}_{k-2,m}(W), B\in\mathcal{F}_{k+1,m}(W)$	rzutowa	pusty
$\mathrm{PP}^{\omega,\mathcal{T}}_{k,m}(W)$	$[Z,B]_{\mathcal{F}}\colon Z\in\mathcal{F}_{k-2,m-2}(W), B\in\mathcal{F}_{k+1,m+1}(W)$	rzutowa	pusty
$\mathrm{SP}^{\omega,\mathcal{T}}_{k,m}(W)$	$[Z,B]_{\mathcal{F}}\colon Z\in\mathcal{F}_{k-2,m-1}(W), B\in\mathcal{F}_{k+1,m+1}(W)$	semi-af.	punkt
$\mathrm{AP}^{\omega,\mathcal{T}}_{k,m}(W)$	$[Z,B]_{\mathcal{F}}\colon Z\in\mathcal{F}_{k-2,m}(W), B\in\mathcal{F}_{k+1,m+1}(W)$	afiniczna	α-prosta

Tabela 3.6: Klasyfikacja płaszczyzn w przestrzeni jeżowej $\mathbf{A}_{k,m}(V,W)$.

Dalsze rozważania wymagają dodatkowego założenia, że wymiar przestrzeni V jest skończony. Niech $\mathcal{X}=[Z,Y]_{\mathcal{F}}$ będzie niepustą podprzestrzenią odcinkową w $\mathfrak{A}$. Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$z=\dim Z,\qquad y=\dim Y, \tag{3.16}$$

$$m_z=\dim\operatorname{Trc}Z,\quad d_z=\dim\operatorname{Ctr}Z,\quad m_y=\dim\operatorname{Trc}Y,\quad d_y=\dim\operatorname{Ctr}Y, \tag{3.17}$$

$$k_0=k-z,\quad m_0=m-m_z,\quad n_0=y-z,\quad w_0=m_y-m_z \tag{3.18}$$

oraz $W_0=Z+\operatorname{Trc}Y$, wówczas, zgodnie z 3.12 podprzestrzeń $\mathcal{X}$ jest izomorficzna z przestrzenią jeżową $\mathfrak{A}_0=\mathbf{A}_{k_0,m_0}(Y/Z,W_0/Z)$. Zauważmy, że $\dim Y/Z=n_0$ oraz $\dim W_0/Z=w_0$. Dla skrócenia zapisu przyjmujemy

$$d=k+w-m. \tag{3.19}$$

Jeśli U jest punktem przestrzeni $\mathfrak{A}$, to $d=\dim\operatorname{Ctr}U$.

Zauważmy, że zachodzą następujące związki:

$$d_z-z=w-m_z,\quad z-m_z=d_z-w,\qquad d_y-y=w-m_y,\quad y-m_y=d_y-w. \tag{3.20}$$

Przestrzeń $\mathfrak{A}_0$ nie jest totalnie zdegenerowana, gdy spełnione są dwa następujące warunki:

$$0\leqslant k_0\leqslant n_0, \tag{3.21}$$

aby przestrzeń pęków $\mathfrak{P}_0=\mathbf{P}_{k_0}(Y/Z)$, nad którą $\mathfrak{A}_0$ jest określona, nie była zdegenerowana, oraz

$$\max(0,k_0-n_0+w_0)\leqslant m_0\leqslant\min(k_0,w_0), \tag{3.22}$$

gdyż uniwersum $\mathfrak{A}_0$ musi być niepuste, czyli $\mathfrak{A}_0$ musi spełniać odpowiednik (3.7). Zgodnie z (3.18) warunek (3.21) jest równoważny z

$$z\leqslant k\leqslant y,$$

czyli odpowiada założeniu o niepustości $[Z,Y]$. Jeśli uwzględnimy (3.18), to z (3.22) otrzymamy

$$\begin{cases} 0\leqslant\ m-m_z\ \leqslant m_y-m_z,\\ w+z-m_z\leqslant k+w-m\leqslant w+y+m_y,\end{cases}$$

i po podstawieniu (3.20) oraz (3.19)

$$\begin{cases} m_z \leqslant m \leqslant m_y, \\ d_z \leqslant d \leqslant d_y. \end{cases} \tag{3.23}$$

Na podstawie tabeli 3.2 przestrzeń $\mathfrak{A}_0$ jest jedno-punktowa gdy

$$k_0 = 0, \quad \text{lub} \quad k_0 = n_0, \quad \text{lub} \quad m_0 = k_0 = w_0.$$

Z (3.18) mamy odpowiednio

$$z = k, \quad \text{lub} \quad k = y, \quad \text{lub} \quad m = m_y \text{ i } d = d_z. \tag{3.24}$$

Zatem przestrzeń jeżowa $\mathfrak{A}_0$ nie jest punktem wtw., gdy

$$z < k < y, \quad \text{oraz} \quad m < m_y \quad \text{lub} \quad d_z < d. \tag{3.25}$$

Podprzestrzeń $\mathcal{X}$ jest niezdegenerowana, gdy zachodzi (3.23) i (3.25).

Na podstawie tabeli 3.5 możemy określić kiedy w przestrzeni $\mathfrak{A}_0$ nie ma prostych afinicznych, a mianowicie gdy $m_0 = k_0$ lub $m_0 = w_0$. Zgodnie z (3.18) oraz (3.20) pierwszy warunek równoważny jest z $d = d_z$, natomiast drugi z $m = m_y$. Mamy zatem charakteryzację rzutowych podprzestrzeni odcinkowych. Aby taki rzutowy odcinek był dodatkowo niezdegenerowany, musi być spełnione (3.25). Zgodnie z (3.20), bezpośrednim wnioskiem jaki możemy stąd wyciągnąć jest

Stwierdzenie 3.17. *Podprzestrzeń odcinkowa $\mathcal{X} = [Z, Y]_{\mathcal{F}}$ przestrzeni $\mathfrak{A}$ jest rzutowa wtw., gdy $m = m_y$ lub $d = d_z$. Podprzestrzeń $\mathcal{X}$ jest rzutowa i niezdegenerowana wtw., gdy*

$$\begin{cases} m_z \leqslant m = m_y, \\ d_z < d < d_y, \end{cases} \quad \textit{lub} \quad \begin{cases} m_z < m < m_y, \\ d_z = d \leqslant d_y. \end{cases} \tag{3.26}$$

Gdy spełniony jest pierwszy układ nierówności w powyższym twierdzeniu, to dla dowolnego punktu $U \in \mathcal{X}$ mamy $\operatorname{Trc} U = \operatorname{Trc} Y$, gdyż $\dim \operatorname{Trc} U = m = \dim \operatorname{Trc} Y$. Oznacza to, że wszystkie proste przestrzeni $\mathfrak{A}$ zawarte w $\mathcal{X}$ są α-rzutowe (por. tab. 3.1). Uzasadnione jest zatem nazywanie $\mathcal{X}$ *podprzestrzenią odcinkową α-rzutową*, lub krótko *α-odcinkiem*.

Gdy natomiast spełniony jest drugi układ nierówności, to dla dowolnego punktu $U \in \mathcal{X}$ mamy $\operatorname{Ctr} U = \operatorname{Ctr} Z$, bo $\dim \operatorname{Ctr} U = d = \dim \operatorname{Ctr} Y$. W tym wypadku wszystkie proste przestrzeni $\mathfrak{A}$ zawarte w $\mathcal{X}$ są ω-rzutowe. Konsekwentnie, w odniesieniu do $\mathcal{X}$ stosujemy termin *podprzestrzeń odcinkowa ω-rzutowa* lub *ω-odcinek*.

Przestrzeń $\mathfrak{A}_0$ nie zawiera α-prostych, gdy $m_0 = k_0$ lub $k_0 - m_0 = n_0 - w_0$, co razem z (3.18) i (3.20) daje odpowiednio $d = d_z$ lub $d = d_y$. Na szczególną uwagę zasługują podprzestrzenie odcinkowe $\mathcal{X}$, dla których spełniony jest warunek $d_z < d = d_y$. Zauważmy, że takie podprzestrzenie nie zawierają α-prostych i z 3.17 nie mogą zawierać wyłącznie ω-prostych, więc jeśli nie są zdegenerowane, to muszą zawierać proste afiniczne. Uwzględniając warunki (3.23) i (3.25), na to aby podprzestrzeń $\mathcal{X}$ nie była zdegenerowana, otrzymujemy

STWIERDZENIE 3.18. *Jeśli podprzestrzeń $\mathcal{X} = [Z, Y]_{\mathcal{F}}$ przestrzeni $\mathfrak{A}$ nie jest zdegenerowana, to jest ona podprzestrzenią ω-semi-afiniczną wtw., gdy $d_z < d = d_y$. Podprzestrzeń $\mathcal{X}$ jest ω-semi-afiniczna i niezdegenerowana wtw., gdy*

$$\begin{cases} m_z \leqslant m < m_y, \\ d_z < d = d_y. \end{cases} \tag{3.27}$$

W przestrzeni $\mathfrak{A}_0$ nie ma ω-prostych, gdy $m_0 = 0$ lub $m_0 = w_0$, co równoważnie odpowiada $m = m_z$ lub $m = m_y$. Zatem podprzestrzeń odcinkowa $\mathcal{X}$ spełniająca $m_z = m < m_y$ nie zawiera ω-prostych i z 3.17 nie może zawierać wyłącznie α-prostych. Jeśli więc $\mathcal{X}$ nie jest zdegenerowana, to zawiera proste afiniczne i może zawierać α-proste. W ten sposób uzyskujemy opis podprzestrzeni α-semi-afinicznych w przestrzeni $\mathfrak{A}$.

STWIERDZENIE 3.19. *Jeśli podprzestrzeń $\mathcal{X} = [Z, Y]_{\mathcal{F}}$ przestrzeni $\mathfrak{A}$ nie jest zdegenerowana, to jest ona podprzestrzenią α-semi-afiniczną wtw., gdy $m_z = m < m_y$. Podprzestrzeń $\mathcal{X}$ jest α-semi-afiniczna i niezdegenerowana wtw., gdy*

$$\begin{cases} m_z = m < m_y, \\ d_z < d \leqslant d_y. \end{cases} \tag{3.28}$$

Biorąc pod uwagę 3.19 i 3.18 otrzymujemy charakteryzację afinicznych podprzestrzeni odcinkowych.

STWIERDZENIE 3.20. *Jeśli podprzestrzeń $\mathcal{X} = [Z, Y]_{\mathcal{F}}$ przestrzeni $\mathfrak{A}$ nie jest zdegenerowana, to jest ona podprzestrzenią afiniczną wtw., gdy $m = m_z$ i $d = d_y$. Podprzestrzeń $\mathcal{X}$ jest afiniczna i niezdegenerowana wtw., gdy*

$$\begin{cases} m_z = m < m_y, \\ d_z < d = d_y. \end{cases} \tag{3.29}$$

Tutaj, dla dowolnego punktu $U \in \mathcal{X}$ mamy jednocześnie $\operatorname{Trc} U = \operatorname{Trc} Z$ i $\operatorname{Ctr} U = \operatorname{Ctr} Y$. Zauważmy, że $m_0 = 0$ z (3.18) oraz $k_0 = n_0 - w_0$, zatem $\mathfrak{A}_0$ jest przestrzenią jeżową liniowych uzupełnień, która nie zawiera prostych rzutowych, co potwierdza nasz wynik (por. [18]).

Uzyskane w 3.17 i 3.20 wyniki pokrywają się z wcześniejszymi dla prostych (por. tab. 3.1) oraz maksymalnych gwiazd i układów (por. tab. 3.3).

3.3.4 Odcinki wyznaczające

Spośród wszystkich podprzestrzeni odcinkowych wyjątkowa własność przysługuje podprzestrzeniom rzutowym.

STWIERDZENIE 3.21. *Niech $\mathcal{X} = [Z, Y]_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$. Odcinek $\mathcal{X}$ jest α-rzutowy (ω-rzutowy) w $\mathfrak{A}$ wtw., gdy $\mathcal{X} = [Z + (W \cap Y), Y]_k$ ($\mathcal{X} = [Z, Z + (W \cap Y)]_k$).*

DOWÓD. $\Rightarrow$: Załóżmy, że $\mathcal{X}$ jest α-odcinkiem w $\mathfrak{A}$ i $\tilde{\mathcal{X}} = [Z + (W \cap Y), Y]_k$.

Niech $U \in \mathcal{X}$, czyli $Z \subseteq U \subseteq Y$ i $U \in \mathcal{F}_{k,m}(W)$ Z 3.17 mamy $\operatorname{Trc} Y = \operatorname{Trc} U$, a więc $Y \cap W \subseteq U$. Zatem $Z + (W \cap Y) \subseteq U \subseteq Y$ i mamy $\mathcal{X} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$.

Teraz niech $U \in \tilde{\mathcal{X}}$, czyli $Z + (W \cap Y) \subseteq U \subseteq Y$ oraz $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$. Zauważmy, że $Z \subseteq U \subseteq Y$, a także $\mathrm{Trc}(Z + (W \cap Y)) \subseteq \mathrm{Trc}\, U \subseteq \mathrm{Trc}\, Y$. Z 3.11 mamy $\mathrm{Trc}(Z + (W \cap Y)) = \mathrm{Trc}\, Y$. W rezultacie $\mathrm{Trc}\, U = \mathrm{Trc}\, Y$ i z 3.17 otrzymujemy, że $U \in \mathcal{F}_{k,m}(W)$. Ostatecznie $U \in \mathcal{X}$, a tym samym $\tilde{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{X}$.

$\Leftarrow$: Z równości $\mathcal{X} = [Z + (W \cap Y), Y]_k$ bezpośrednio wynika, że

$$\mathcal{X} = [Z + (W \cap Y), Y] \cap \mathcal{F}_{k,m}(W). \tag{3.30}$$

Ponieważ $\mathcal{X} \neq \emptyset$, więc istnieje punkt U w $\mathfrak{A}$ taki, że $Z + (W \cap Y) \subseteq U \subseteq Y$, a stąd razem z 3.11 mamy $\mathrm{Trc}(Z + (W \cap Y)) = \mathrm{Trc}\, U = \mathrm{Trc}\, Y$. Tak więc podprzestrzeń z prawej strony równości (3.30) spełnia pierwszy układ nierówności w 3.17, czyli $\mathcal{X}$ jest α-odcinkiem. □

Powyższy lemat mówi, że każdą rzutową podprzestrzeń odcinkową w $\mathfrak{A}$ można przedstawić jako k-odcinek, czyli podprzestrzeń odcinkową w $\mathfrak{P}$, analogicznie jak każda prosta rzutowa w $\mathfrak{A}$ jest k-pękiem, czyli prostą $\mathfrak{P}$. Możemy teraz podać charakteryzację analogiczną do 3.17 dla szczególnych k-odcinków zawartych w uniwersum $\mathfrak{A}$.

Stwierdzenie 3.22. *Niech $\mathcal{X} = [Z, Y]_k$ będzie k-odcinkiem kraty $\mathfrak{L}(V)$. Odcinek $\mathcal{X}$ jest zawarty w uniwersum $\mathcal{F}_{k,m}(W)$ przestrzeni $\mathfrak{A}$ i jest niezdegenerowaną podprzestrzenią rzutową w $\mathfrak{A}$ wtw., gdy*

$$\begin{cases} m_z = m = m_y, \\ d_z < d < d_y, \end{cases} \quad \textit{lub} \quad \begin{cases} m_z < m < m_y, \\ d_z = d = d_y. \end{cases} \tag{3.31}$$

Gdy spełniony jest pierwszy układ, to $\mathcal{X}$ jest α-odcinkiem, jeśli drugi, ω-odcinkiem.

Dowód. Bezpośredni wniosek z 3.17, 3.11 oraz 3.21. □

Ponieważ może być kilka odcinków kraty $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczających jedną i tę samą podprzestrzeń odcinkową w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$, specjalne znaczenie nadajemy najmniejszemu z nich.

Definicja 3.23. Niech $\mathcal{X}$ będzie podprzestrzenią odcinkową przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$. Przez $\widetilde{\mathcal{X}}$ rozumiemy *najmniejszy odcinek kraty $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczający podprzestrzeń* $\mathcal{X}$, to znaczy, najmniejszy spośród wszystkich odcinków $[Z, Y]$ spełniających równość $\mathcal{X} = [Z, Y] \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$.

Z powyższej definicji, jeśli $\mathcal{X}$ jest podprzestrzenią odcinkową, to:

$$\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W), \tag{3.32}$$

Pojęcie najmniejszego odcinka wyznaczającego podprzestrzeń odcinkową, odegra kluczową rolę w rozważaniach na temat pęków podprzestrzeni odcinkowych oraz rzutów między podprzestrzeniami odcinkowymi.

Lemat 3.24. *Niech $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_{\mathcal{F}}$, $i = 1, 2$ będą niezdegenerowanymi podprzestrzeniami w przestrzeni $\mathfrak{A}$.*

(i) *Jeśli $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ nie są podprzestrzeniami ω-rzutowymi i $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$, to $Y_1 \subseteq Y_2$.*

(ii) *Jeśli $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ nie są podprzestrzeniami α-rzutowymi i $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$, to $Z_1 \subseteq Z_2$.*

Dowód. (i) Zgodnie z 3.17 możemy założyć, że $d \neq d_z$. Ponieważ $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są niezdegenerowane, co znaczy, że $d_z \leqslant d$ z (3.23), więc możemy założyć, że $d_z < d$. Po podstawieniu zgodnie z (3.17) i (3.19) mamy

$$r := z + m - m_z < k.$$

Weźmy dowolny punkt $U \in \mathcal{X}_1$. Zauważmy, że $Z_1 + (W \cap U) \subseteq U$ oraz

$$\dim(Z_1 + (W \cap U)) = z + m - m_z = r.$$

Rozważmy bazę U

$$U = \langle e_1, e_2, \ldots, e_r, e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_k \rangle,$$

powstałą przez rozszerzenie bazy $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ podprzestrzeni $Z_1 + (W \cap U)$ do bazy podprzestrzeni U.

Niech $x \in Y_1$. Wykażemy, że $x \in Y_2$. Jeśli $x \in U$, to z założonej inkluzji $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$ mamy $U \in \mathcal{X}_2$, czyli $U \subseteq Y_2$, a więc $x \in Y_2$. Jeśli natomiast $x \notin U$, to rozważmy

$$U_0 := \langle e_1, e_2, \ldots, e_r, e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_{k-1}, x \rangle.$$

Zauważmy, że:

$$\text{(a)} \quad Z_1 + (W \cap U) \subseteq U_0, \qquad \text{(b)} \quad \dim U_0 = k, \qquad \text{(c)} \quad U \sim U_0.$$

Bezpośrednio z (a) mamy $Z_1 \subseteq U_0 \subseteq Y_1$ oraz $\operatorname{Trc} U \subseteq \operatorname{Trc} U_0$. Konsekwencją ostatniej inkluzji, (c) oraz 3.2 jest fakt, że albo $\operatorname{Trc} U \sim \operatorname{Trc} U_0$, albo $\operatorname{Trc} U \prec \operatorname{Trc} U_0$. W pierwszym przypadku $\dim \operatorname{Trc} U_0 = m$. Stąd $U_0 \in \mathcal{F}_{k,m}(W)$, a więc $U_0 \in \mathcal{X}_1$. Stąd $U_0 \in \mathcal{X}_2$ i w rezultacie $x \in Y_2$. W przypadku, gdy $\operatorname{Trc} U \prec \operatorname{Trc} U_0$, to $\dim \operatorname{Trc} U_0 = m + 1$. Zatem z 3.15 $U_0 \in X_1^{\infty}$. Zatem, zgodnie z (3.14) istnieje prosta afiniczna g leżąca w $\mathcal{X}_1$ taka, że $U_0 = g^{\infty}$. Ponieważ $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$, więc $g \subseteq \mathcal{X}_2$, a co za tym idzie $U_0 \in \mathcal{X}_2^{\infty}$. Ponownie korzystając z 3.15 widzimy, że $U_0 \in [Z_2, Y_2]$, a zatem $U_0 \subseteq Y_2$ i stąd $x \in Y_2$.

Z dowolności wyboru x prawdziwa jest inkluzja $Y_1 \subseteq Y_2$.

(ii) Wynika z (i) i prawa dualności. □

Z udowodnionego lematu wynika, że jeśli $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są niezdegenerowanymi, nierzutowymi podprzestrzeniami odcinkowymi i $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$, to wyznaczające je odcinki kraty $\mathfrak{L}(V)$ są równe, tzn. $Z_1 = Z_2$ i $Y_1 = Y_2$, przy oznaczeniach 3.24.

Stwierdzenie 3.25. *Jeśli $\mathcal{X} = [Z, Y]_{\mathcal{F}}$ jest niezdegenerowaną podprzestrzenią przestrzeni $\mathfrak{A}$, to*

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \begin{cases} [Z + (W \cap Y), Y], & \text{gdy } \mathcal{X} \text{ jest } \alpha\text{-odcinkiem w } \mathfrak{A}, \\ [Z, Z + (W \cap Y)], & \text{gdy } \mathcal{X} \text{ jest } \omega\text{-odcinkiem w } \mathfrak{A}, \\ [Z, Y], & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{X}$ jest α-odcinkiem w $\mathfrak{A}$. Wówczas z 3.21 wynika, że $\mathcal{X} = [Z + (W \cap Y), Y]_k$. Z definicji 3.23 mamy $\widetilde{\mathcal{X}} \subseteq [Z + (W \cap Y), Y]$ oraz

$$\widetilde{\mathcal{X}} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) = \mathcal{X} = [Z + (W \cap Y), Y]_k,$$

a więc $[Z+(W\cap Y),Y]_k \subseteq \widetilde{\mathcal{X}}$. Z 1.13 uzyskujemy $Z+(W\cap Y), Y \in \widetilde{\mathcal{X}}$, a ponieważ $\widetilde{\mathcal{X}}$ jest zbiorem wypukłym w kracie $\mathfrak{L}(V)$, to $[Z+(W\cap Y),Y] \subseteq \widetilde{\mathcal{X}}$. Wykazaliśmy w ten sposób równość $\widetilde{\mathcal{X}} = [Z+(W\cap Y),Y]$.

Dla odcinka ω-rzutowego rozumowanie jest analogiczne.

Do rozpatrzenia pozostał przypadek, gdy podprzestrzeń $\mathcal{X}$ nie jest rzutowa. Z (3.32) mamy

$$\widetilde{\mathcal{X}} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) = \mathcal{X} = [Z,Y] \cap \mathcal{F}_{k,m}(W).$$

Zatem z 3.24 otrzymujemy równość $\widetilde{\mathcal{X}} = [Z,Y]$. □

3.4 Pęki podprzestrzeni odcinkowych

Rozważania w tej sekcji prowadzimy przy założeniu, że przestrzeń wektorowa V jest skończonego wymiaru.

Każdemu pękowi $\mathsf{G} = p\boxtimes q$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W przypisujemy typ $\zeta\backslash\eta$, w ten sposób, że jeśli p jest singletonem, to w miejscu ζ piszemy pt, jeśli natomiast p jest prostą, to za ζ wstawiamy jej typ, to znaczy af dla prostej afinicznej, α dla α-prostej i ω dla ω-prostej; w miejscu η wpisujemy typ q określony w analogiczny sposób jak dla p.

Wprost z 3.9 oraz 3.2 wynika

STWIERDZENIE 3.26. *W kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W nie istnieją pęki odcinków typu $\omega\backslash\alpha$, $\omega\backslash$af oraz af$\backslash\alpha$.*

Pomiędzy pękiem odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym elementem W, a prostą w $\mathfrak{L}(V)$ jest pewna analogia, wyrażająca się między innymi tym, że odcinek osobliwy pęku odpowiada elementowi niewłaściwemu prostej. Dokładniej mówi o tym poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE 3.27. *Jeśli G jest pękiem odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W, to wszystkie elementy $\widehat{\mathsf{G}}$ wyznaczają podprzestrzenie tego samego typu w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$.*

DOWÓD. Rozważmy przypadek, gdy G jest pękiem właściwym typu gwiazda. Wówczas $\mathsf{G} = \{Z\}\boxtimes p$, dla pewnego Z i prostej p. Weźmy $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \widehat{\mathsf{G}}$. Wtedy $\mathcal{X}_i = [Z, Y_i]$, gdzie $Y \in \widehat{p}$ zgodnie z (3.6). Zatem z 3.7 otrzymujemy $\dim \operatorname{Trc} Y_1 = \dim \operatorname{Trc} Y_2$ i $\dim \operatorname{Ctr} Y_1 = \dim \operatorname{Ctr} Y_2$. W konsekwencji z 3.17, 3.18, 3.19 i 3.20 odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ wyznaczają podprzestrzenie tego samego typu w $\mathfrak{A}$.

W przypadku pęku właściwego typu układ rozumowanie jest analogiczne.

Gdy natomiast G jest waflem, to $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ dla pewnych prostych p, q w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \widehat{\mathsf{G}}$. Wtedy $Z_1, Z_2 \in \widehat{p}$, $Y_1, Y_2 \in \widehat{q}$. W oparciu o 3.7 mamy $\dim \operatorname{Trc} Z_1 = \dim \operatorname{Trc} Z_2$, $\dim \operatorname{Ctr} Z_1 = \dim \operatorname{Ctr} Z_2$ oraz $\dim \operatorname{Trc} Y_1 = \dim \operatorname{Trc} Y_2$, $\dim \operatorname{Ctr} Y_1 = \dim \operatorname{Ctr} Y_2$. Stąd, zgodnie z 3.17, 3.18, 3.19 i odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ wyznaczają podprzestrzenie tego samego typu w $\mathfrak{A}$. □

Jak już to zostało zapowiedziane we wstępnej części tego rozdziału, pewne elementy odcinków kraty $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W pełnią specjalną rolę. Seria kolejnych trzech lematów mówi o ich ułożeniu w pękach odcinków.

Lemat 3.28. *Niech $\mathsf{G} = p \boxtimes \{Y\}$ będzie pękiem właściwym w kracie $\mathfrak{L}(V)$, i niech $\mathcal{W}$ będzie zbiorem wszystkich elementów postaci $Z + (W \cap Y)$, gdzie $[Z, Y] \in \widehat{\mathsf{G}}$.*

(i) *Jeśli p jest α-prostą, to $\mathcal{W}$ jest α-prostą i $\mathcal{W} \cap \bigcap \mathsf{G} = \emptyset$.*

(ii) *Jeśli p jest ω-prostą lub prostą afiniczną, to $|\mathcal{W}| = 1$ i $\mathcal{W} \subseteq \bigcap \mathsf{G}$.*

Dowód. Rozważmy przesunięcie $g = \jmath_{W \cap Y}$. Niech $[Z, Y] \in \widehat{\mathsf{G}}$. Zauważmy, że

$$g(Z) = Z + (W \cap Y),$$

zatem

$$\mathcal{W} = \{g(Z) \colon Z \in \widehat{p}\} = g(\widehat{p}).$$

(i) Jeśli p jest α-prostą, to z (3.5) mamy $\widehat{p} = p$ oraz z 3.2

$$Z' \cap (W \cap Y) = Z' \cap W = Z'' \cap W = Z'' \cap (W \cap Y).$$

Stąd, na mocy 1.51 odwzorowanie g jest bijekcją na odcinku $[Z', Z'']$, a więc zbiór $\mathcal{W}$ jest prostą. Zgodnie z 3.11 dla każdego $Q \in \mathcal{W}$ mamy $\operatorname{Trc} Q = \operatorname{Trc} Y$, więc z 3.2 prosta $\mathcal{W}$ jest α-prostą.

Teraz przypuśćmy, że istnieje $Z \in p$ taki, że $g(Z) \in \bigcap \mathsf{G}$. Z 1.26 $\bigcap \mathsf{G} = [Z'', Y]$, gdzie Z'' taki, że $p = \,]Z', Z''[$. Zatem $Z'' \subseteq g(Z) = Z + (W \cap Y)$, a stąd po obustronnym dodaniu W dostajemy $Z'' + W \subseteq Z + W$, co nie jest możliwe z uwagi na 3.2 i założenie, że p jest α-prostą. Pokazaliśmy, że $\mathcal{W} \cap \bigcap \mathsf{G} = \emptyset$.

(ii) Jeśli p jest ω-prostą lub prostą afiniczną, to zauważmy, że z modularności kraty mamy

$$g(Z) = (Z + W) \cap Y.$$

Ponieważ w tym wypadku dla $Z_1, Z_2 \in \widehat{p}$, zgodnie z 3.2, mamy $\operatorname{Ctr} Z_1 = \operatorname{Ctr} Z_2$, a stąd $g(Z_1) = g(Z_2)$, więc zbiór $\mathcal{W}$ jest jedno-elementowy. Oznaczmy przez Q element tego zbioru. Zauważmy, że $Q = g(Z) \in [Z, Y]$ dla $Z \in p$, zatem $Q \in \bigcap \mathsf{G}$. □

W przypadku (i) powyższego lematu, bezpośrednio z 1.72(ii) wynika, że $\mathsf{E} = p \boxtimes \mathcal{W}$ jest waflem i pęk G rozszerza pęk E jednoznacznie. Natomiast w przypadku (ii), z 1.71(ii) $\mathsf{E} = p \boxtimes \mathcal{W}$ jest pękiem właściwym i G rozszerza E jednoznacznie i zgodnie.

Analogicznie można dowieść dualny fakt w stosunku do 3.28.

Lemat 3.29. *Niech $\mathsf{G} = \{Z\} \boxtimes q$ będzie pękiem właściwym w kracie $\mathfrak{L}(V)$, i niech $\mathcal{W}$ będzie zbiorem wszystkich elementów postaci $Z + (W \cap Y)$, gdzie $[Z, Y] \in \widehat{\mathsf{G}}$.*

(i) *Jeśli q jest ω-prostą, to $\mathcal{W}$ jest ω-prostą i $\mathcal{W} \cap \bigcap \mathsf{G} = \emptyset$.*

(ii) *Jeśli q jest α-prostą lub prostą afiniczną, to $|\mathcal{W}| = 1$ i $\mathcal{W} \subseteq \bigcap \mathsf{G}$.*

Ogólnie, z 3.28, 3.29 wynika, że jeśli G jest pękiem właściwym, to elementy postaci $Z + (W \cap Y)$, gdzie $[Z, Y] \in \widehat{\mathsf{G}}$, albo tworzą prostą nie przecinającą $\bigcap \mathsf{G}$, albo są wszystkie sobie równe i leżą w $\bigcap \mathsf{G}$. Podobna własność przysługuje waflom z jednym wyjątkiem.

Lemat 3.30. *Niech G będzie waflem w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W.*

(i) *Jeśli G nie jest $\alpha\backslash\omega$-waflem, to wszystkie elementy postaci $Z + (W \cap Y)$, gdzie $[Z, Y] \in \widehat{\mathsf{G}}$, leżą na jednej prostej.*

(ii) *Jeśli* G *jest* $\alpha\backslash\omega$*-waflem, to żadne dwa różne elementy postaci* $Z+(W\cap Y)$*, gdzie* $[Z,Y]\in\mathsf{G}$ *nie są sąsiednie.*

(iii) *Jeśli* G *jest* $\mathrm{af}\backslash\mathrm{af}$*-waflem, to wszystkie elementy postaci* $Z+(W\cap Y)$*, gdzie* $[Z,Y]\in\mathsf{G}$*, leżą na jednej prostej.*

Dowód. Niech $\mathsf{G}=p\boxtimes q$, $p=]Z',Z''[$ i $q=]Y',Y''[$.

(i) Załóżmy, że q jest α-prostą lub prostą afiniczną i rozważmy przesunięcie kratowe $f=\jmath_{W\cap Y'}$. Weźmy dowolny odcinek $\mathcal{X}=[Z,Y]\in\widehat{\mathsf{G}}$. Zauważmy, że $Z\neq p^\infty$ i $Y\neq q^\infty$, więc z 3.2 mamy

$$\operatorname{Trc}Y=\operatorname{Trc}Y'. \tag{3.33}$$

Stąd $Z+(W\cap Y)=Z+\operatorname{Trc}Y=f(Z)$ dla wszystkich $Z\in\widehat{p}$. Ponieważ elementy wafla są rozłączne (por. 1.31) i $Z,f(Z)\in\mathcal{X}$, więc dla różnych $Z\in\widehat{p}$ dostajemy różne $f(Z)$. Zatem z 3.2 i uwagi 3.3 $f(p)$, jako obraz prostej p przy pewnym przesunięciu kratowym, jest prostą, co kończy dowód w rozpatrywanym przypadku.

Dualnie dowodzi się, że jeśli p jest ω-prostą lub prostą afiniczną, to elementy postaci $Z+(W\cap Y)$, gdzie $[Z,Y]\in\widehat{\mathsf{G}}$, leżą na jednej prostej.

(ii) Niech $\mathcal{X}_i=[Z_i,Y_i]\in\mathsf{G}$ dla $i=1,2$ oraz $W_i:=Z_i+(W\cap Y_i)$ takie, że $W_1\neq W_2$. Zauważmy, że musi być $Z_1\neq Z_2$ oraz $Y_1\neq Y_2$ z uwagi na fakt, że $W_i\in\mathcal{X}_i$ i odcinki $\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2$ są albo równe, albo rozłączne (por. 1.31).

Zgodnie z oznaczeniami (3.16) oraz (3.17) mamy $\dim W_i=z+m_y-m_z$. Z określenia elementów W_i mamy

$$W_1+W_2=Z_1+(W\cap Y_1)+Z_2+(W\cap Y_2)=Z''+(W\cap Y_1)+(W\cap Y_2).$$

Ponieważ q jest ω-prostą, więc z 3.2 dostajemy $(W\cap Y_1)+(W\cap Y_2)=W\cap Y''$, zatem

$$W_1+W_2=Z''+(W\cap Y''). \tag{3.34}$$

Ponieważ p jest α-prostą, więc zgodnie z tabelą 3.1 mamy $\dim(Z''\cap W)=m_z$, natomiast q jest ω-prostą, więc $\dim(Y''\cap W)=m_y+1$. Stąd oraz z (3.35) otrzymujemy

$$\dim(W_1+W_2)=z+1+m_y+1-m_z=z+m_y-m_z+2=\dim W_i+2,$$

co oznacza, że $W_1\not\sim W_2$.

(iii) W tym wypadku obie proste p,q są afiniczne. Możemy zatem wykorzystać rozumowanie przeprowadzone w (i), z którego wynika, że obrazem prostej p przy przesunięciu $f=\jmath_{W\cap Y'}$ jest prosta, i elementy postaci $Z+(W\cap Y)$, gdzie $[Z,Y]\in\widehat{\mathsf{G}}$, leżą na prostej $f(p)$. Wystarczy zatem pokazać, że $f(p^\infty)=p^\infty+(W\cap q^\infty)$ zgodnie z 3.8. Zauważmy, że $Y'\subseteq q^\infty$, a więc

$$f(p^\infty)=p^\infty+(W\cap Y')\subseteq p^\infty+(W\cap q^\infty). \tag{3.35}$$

Zgodnie z (3.33) dla $Y\in\widehat{q}$ mamy $\dim\operatorname{Trc}Y'=m_y$ przy oznaczeniach (3.16), (3.17). Natomiast z 3.7 mamy $\dim\operatorname{Trc}p^\infty=m_z+1$ oraz $\dim\operatorname{Trc}q^\infty=m_y+1$. Stąd

$$\dim f(p^\infty)=z+m_y-m_z=z+(m_y+1)-(m_z+1)=\dim\bigl(p^\infty+(W\cap q^\infty)\bigr),$$

co z uwagi na (3.35) kończy dowód. □

W dowiedzionym lemacie założenie $[Z, Y] \neq \mathsf{G}^\infty$ jest istotne (por. rys. 3.9, str. 88, rys. 3.11, str. 88).

Powyższe trzy lematy zapewniają, że gdy G jest pękiem odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W, G nie jest $\alpha\backslash\omega$-waflem i odcinki $\mathcal{X}_i \in \widehat{\mathsf{G}}$, dla $i \in I$, wyznaczają podprzestrzenie rzutowe $\mathcal{E}_i = \mathcal{X}_i \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$ w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$, to odcinki $\widetilde{\mathcal{E}_i}$ leżą w pęku odcinków w $\mathfrak{L}(V)$, albo wszystkie są sobie równe. Precyzyjniej formułuje to następny lemat.

LEMAT 3.31. *Niech G będzie dowolnym pękiem odcinków, z wyjątkiem wafla typu $\alpha\backslash\omega$, w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W, niech $[Z_1, Y_1], [Z_2, Y_2] \in \widehat{\mathsf{G}}$ oraz $\mathcal{X}_i := \widetilde{[Z_i, Y_i]}_{\mathcal{F}}$. Jeśli $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$, to odcinki $\widetilde{\mathcal{X}_1}$, $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ rozpinają pęk E w kracie $\mathfrak{L}(V)$, $\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2} \in \widehat{\mathsf{E}}$ i pęk G rozszerza pęk E tak, że rozszerzenie jest jednoznaczne. Ponadto*

$$\left\{\mathcal{X} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \colon \mathcal{X} \in \widehat{\mathsf{G}}\right\} = \left\{\mathcal{E} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \colon \mathcal{E} \in \mathsf{E},\ \mathcal{E} \nsubseteq \mathsf{G}^\infty\right\}. \tag{3.36}$$

DOWÓD. Z 3.27 podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są tego samego typu. Jeśli podprzestrzenie te nie są rzutowe, to $\widetilde{\mathcal{X}_i} = [Z_i, Y_i]$ zgodnie z 3.25. Zatem $\mathsf{E} = \mathsf{G}$ i dowód jest zakończony.

Rozważmy przypadek, gdy $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są α-odcinkami w $\mathfrak{A}$. Wówczas z 3.25 mamy

$$\widetilde{\mathcal{X}_i} = [Z_i + (W \cap Y_i), Y_i]. \tag{3.37}$$

Oznaczmy $W_i := Z_i + (W \cap Y_i)$. Jeśli G jest pękiem właściwym, to z 3.28, względnie 3.29, albo W_1, W_2 wyznaczają prostą nie przecinającą $\bigcap \mathsf{G}$ i z 1.72 odcinki $\widetilde{\mathcal{X}_1}$, $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ rozpinają pęk E taki, że G rozszerza E jednoznacznie, albo $W_1 = W_2 \in \bigcap \mathsf{G}$. Z uwagi na założenie $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$, ten drugi przypadek może mieć miejsce wyłącznie gdy G jest typu gwiazda. Wówczas jednak z 1.71(i) odcinki $\widetilde{\mathcal{X}_1}$, $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ rozpinają pęk właściwy E taki, że G rozszerza E jednoznacznie i zgodnie.

Gdy G jest waflem, to z 3.30 W_1, W_2 leżą na prostej, powiedzmy p. Ponieważ $W_i \in [Z_i, Y_i]$ i $\bigcap \mathsf{G} = \emptyset$, więc z 1.72 odcinki $\widetilde{\mathcal{X}_1}$, $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ rozpinają pęk E taki, że G rozszerza E jednoznacznie.

Ponieważ $\operatorname{Trc} W_i = \operatorname{Trc} Y_i$, zgodnie z 3.11, a Y_1, Y_2 albo są równe, albo są elementami właściwymi prostej $\overline{Y_1, Y_2}$ z założenia, więc jeśli $W_1 \neq W_2$, to są one elementami właściwymi prostej $\overline{W_1, W_2}$ na mocy 3.2 i 3.1(vi). Zatem $\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2} \in \widehat{\mathsf{E}}$.

Aby wykazać prawdziwość równości (3.36) weźmy $\mathcal{X} = [Z, Y] \in \widehat{\mathsf{G}}$. Oznaczmy $W_0 := Z + (W \cap Y)$ i $\mathcal{E} = [W_0, Y]$. Z 3.28, 3.29 i 3.30 elementy W_0, W_1, W_2 leżą na jednej prostej, więc $\mathcal{E} \in \mathsf{E}$. Ponieważ rozszerzenie pęku E do G jest jednoznaczne i $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X} \neq \mathsf{G}^\infty$, więc $\mathcal{E} \nsubseteq \mathsf{G}^\infty$. Z 3.27 $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$ jest α-odcinkiem w $\mathfrak{A}$. Zatem zgodnie z 3.21 mamy $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) = \mathcal{E} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$.

Teraz niech $\mathcal{E} \in \mathsf{E}$ i $\mathcal{E} \nsubseteq \mathsf{G}^\infty$. Ponieważ G rozszerza $\mathcal{E}$, więc istnieje $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$ taki, że $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$. Rozszerzenie jest jednoznaczne, zatem $\mathcal{X} \neq \mathsf{G}^\infty$, a więc $\mathcal{X} \in \widehat{\mathsf{G}}$. Na mocy rozumowania przeprowadzonego w poprzednim paragrafie istnieje odcinek $\mathcal{E}_0 \in \mathsf{E}$ taki, że $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{X}$ i $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) = \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$. Z uwagi na to, że rozszerzenie pęku E do G jest jednoznaczne mamy $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, co kończy dowód.

Dla ω-odcinków dowód przebiega analogicznie. □

Jak się okazuje nie zawsze różne, współpękowe odcinki kraty wyznaczają różne podprzestrzenie w przestrzeni jeżowej.

Przykład 3.32. Niech z, y będą liczbami naturalnymi takimi, że $1 < z < k < y$. O parametrach k, m przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A} = \mathbf{A}_{k,m}(V, W)$ zakładamy, że

$$\max(0, y - \operatorname{codim} W) \leqslant m \leqslant \min(y, \dim W).$$

Rozważmy układ $e_1, e_2, \dots, e_m$ liniowo niezależnych wektorów należących do W. Rozszerzmy dwie $m-1$ elementowe bazy utworzone z wektorów $e_1, e_2, \dots, e_m$ tak, aby:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \langle e_1, \dots, e_{m-1}, e_{m+1}, \dots, e_z \rangle, & \operatorname{Trc} Z_1 &= \langle e_1, \dots, e_{m-1} \rangle, \\ Z_2 &= \langle e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_z \rangle, & \operatorname{Trc} Z_2 &= \langle e_2, \dots, e_m \rangle, \end{aligned}$$

oraz $\dim Z_1 = z - 1 = \dim Z_2$. Zauważmy że Z_1, Z_2 są sąsiednie i różne. Oznaczmy przez p prostą wyznaczoną przez Z_1, Z_2. Następnie konstruujemy

$$Y = \langle e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_z, e_{z+1}, \dots, e_y \rangle,$$

tak, aby $\operatorname{Trc} Y = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$. Zauważmy, że $\mathsf{G} = p \boxtimes \{Y\}$ jest pękiem właściwym w kracie $\mathfrak{L}(V)$, a podprzestrzenie odcinkowe $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y] \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$ są α-rzutowe w $\mathfrak{A}$, zgodnie z 3.17. Ponieważ

$$Z_i + (Y \cap W) = \langle e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_z \rangle, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2,$$

więc jeśli zastosujemy 3.21, to uzyskamy $\widetilde{\mathcal{X}_1} = \widetilde{\mathcal{X}_2}$, a zatem $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$. □

Naturalną wydaje się definicja pęku podprzestrzeni odcinkowych w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ jako pęku odcinków w kracie $\mathfrak{L}(V)$, zrelatywizowanego do uniwersum przestrzeni $\mathfrak{A}$. Kłopot polega na tym, że jedną rzutową podprzestrzeń odcinkową może wyznaczać kilka różnych odcinków kraty, a co za tym idzie może zmienić się struktura pęku, tak jak to zostało pokazane w przykładzie 3.32. Tę niejednoznaczność odcinka wyznaczającego usuwa się biorąc najmniejszy odcinek wyznaczający.

Definicja 3.33. Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą niepustymi podprzestrzeniami odcinkowymi w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$. Mówimy, że podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są *współpękowe* jeśli istnieje pęk odcinków E w kracie $\mathfrak{L}(V)$ taki, że $\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2} \in \widehat{\mathsf{E}}$. Podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *rozpinają* pęk podprzestrzeni odcinkowych w $\mathfrak{A}$, jeśli są różne i odcinki $\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2}$ rozpinają pęk E. Pęk podprzestrzeni odcinkowych rozpięty przez $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ to zbiór:

$$\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2} := \Big\{ \mathcal{X} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \colon \mathcal{X} \in \widehat{\mathsf{E}} \Big\}.$$

Typ pęku $\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ jest taki jak typ pęku E.

Zauważmy, że zgodnie z 3.27 wszystkie elementy pęku podprzestrzeni odcinkowych w przestrzeni jeżowej są tego samego typu. Z 3.31 natomiast wystarczy, że jeśli podprzestrzenie odcinkowe $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są różne i są wyznaczone przez nieosobliwe odcinki jakiegokolwiek pęku G, byleby nie $\alpha \backslash \omega$ wafla, to $\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2}$ rozpinają pęk E i są elementami nieosobliwymi pęku E. Zatem, zgodnie z powyższą definicją $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są współpękowe w $\mathfrak{A}$.

Wprawdzie stosujemy termin pęk właściwy w odniesieniu do wszystkich pęków typu $\mathrm{pt} \backslash \eta$ i $\zeta \backslash \mathrm{pt}$, co sugeruje, że wierzchołek takiego pęku jest zawsze niepusty, lecz w przypadku przestrzeni jeżowej może się zdarzyć, że wierzchołek, czyli część wspólna elementów pęku podprzestrzeni odcinkowych jest zbiorem pustym. Ma to miejsce na przykład w pęku równoległych prostych afinicznych w $\mathfrak{A}$. Wówczas wierzchołkiem pęku jest punkt niewłaściwy przestrzeni $\mathfrak{A}$. Może to się kłócić z intuicją związaną z terminem *pęk wierzchołkowy*, ale jest to konsekwencja odwołania się w definicji pęku w $\mathfrak{A}$ do struktury zewnętrznej, z punktu widzenia przestrzeni $\mathfrak{A}$.

Pęk podprzestrzeni odcinkowych oraz pęk ich horyzontów pozostają ze sobą w ścisłym związku.

Stwierdzenie 3.34. *Jeśli $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są nierzutowymi, współpękowymi podprzestrzeniami odcinkowymi w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$, to ich horyzonty $\mathcal{X}_1^\infty, \mathcal{X}_2^\infty$ są albo równe, albo współpękowe.*

Dowód. Z założenia, że podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ nie są rzutowe wynika, że $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są niezdegenerowane, natomiast z 3.14 mamy $\mathcal{X}_i^\infty \neq \emptyset$. Z kolei z faktu, że $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są współpękowe, odcinki $\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2}$ są nieosobliwymi elementami pewnego pęku w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Na mocy 3.15 $\mathcal{X}_1^\infty, \mathcal{X}_2^\infty$ są podprzestrzeniami odcinkowymi na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$, co więcej $\widetilde{\mathcal{X}_i^\infty} = \widetilde{\mathcal{X}_i} \cap \mathcal{F}_{k,m+1}(W)$ z uwagi na 3.25. Zatem z 3.31 albo $\widetilde{\mathcal{X}_1^\infty} = \widetilde{\mathcal{X}_2^\infty}$, albo odcinki $\widetilde{\mathcal{X}_1^\infty}, \widetilde{\mathcal{X}_2^\infty}$ są współpękowe. □

Zgodnie z definicją 3.33, podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ rozpinają wafel w $\mathfrak{A}$, jeśli odcinki $\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2}$ rozpinają wafel w $\mathfrak{L}(V)$. Ponieważ $\widetilde{\mathcal{X}_i^\infty} \subseteq \widetilde{\mathcal{X}_i}$, więc

Wniosek 3.35. *Jeśli podprzestrzenie odcinkowe $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ rozpinają wafel w $\mathfrak{A}$, to ich horyzonty $\mathcal{X}_1^\infty, \mathcal{X}_2^\infty$ wyznaczają wafel na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$.*

3.4.1 Klasyfikacja pęków podprzestrzeni odcinkowych

Dokładnej analizie poddajemy pęki rzutowych i afinicznych podprzestrzeni odcinkowych. Ponieważ spodziewana jest analogia z pękami prostych, odpowiednio rzutowych i afinicznych, klasyfikację rozpoczynamy od pęków prostych.

Niech h_1, h_2 będą α-prostymi w $\mathfrak{A}$, rozpinającymi pęk właściwy G typu gwiazda w $\mathfrak{L}(V)$. Wówczas $h_i = \widehat{\mathbf{p}}(H, B_i)$, gdzie B_1, B_2 leżą na pewnej prostej p w $\mathfrak{L}(V)$. Załóżmy, że p jest α-prostą. Zgodnie z 3.27 wszystkie elementy G są α-prostymi. Z tabeli 3.1 mamy $B_1, B_2 \in \mathcal{F}_{k+1,m}(W)$, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}_{k,m}(W)$ i $B_1 + B_2 \in \mathcal{F}_{k+2,m}(W)$. Stąd wierzchołek G, a mianowicie $B_1 \cap B_2$, jest punktem właściwym w $\mathfrak{A}$, natomiast podstawa G, czyli podprzestrzeń $[H, B_1 + B_2]_{\mathcal{F}}$, to płaszczyzna $\mathrm{PP}^{\alpha,\mathcal{S}}_{k,m}(W)$ (por. tab. 3.6).

Gdyby p była ω-prostą, to wspólny element prostych h_1, h_2, czyli $B_1 \cap B_2$ byłby, zgodnie z tabelą 3.1, w zbiorze $\mathcal{F}_{k,m-1}(W)$, podczas gdy $h_1 \cup h_2 \subset \mathcal{F}_{k,m}(W)$. Taki układ prostych jest zatem niemożliwy.

Gdy prosta p jest afiniczna, to z tabeli 3.1 mamy $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}_{k,m}(W)$ oraz $B_1 + B_2 \in \mathcal{F}_{k+2,m+1}(W)$. Zatem wierzchołek G jest punktem właściwym w $\mathfrak{A}$, a podstawą jest płaszczyzna semi-afiniczna typu α-gwiazda $\mathrm{SP}^{\alpha,\mathcal{S}}_{k,m}(W)$. W pęku G jest jedna prosta o wierzchołku H i podstawie p^∞. Jest to prosta osobliwa pęku G. Ponieważ $p^\infty \in \mathcal{F}_{k+1,m+1}(W)$, więc jest to prosta afiniczna w $\mathfrak{A}$.

Kontynuując tę analizę uzyskamy opis pęków właściwych, rozpiętych przez proste w przestrzeni $\mathfrak{A}$, przedstawiony w tabelach 3.7 i 3.8.

rozpinające	prosta podstaw	prosta osobliwa	wierzchołek	podstawa
α-rzutowe	α-rzutowa	–	właściwy	$\mathrm{PP}^{\alpha,\mathcal{S}}_{k,m}(W)$
α-rzutowe	afiniczna	afiniczna w $\mathfrak{A}$	właściwy	$\mathrm{SP}^{\alpha,\mathcal{S}}_{k,m}(W)$
ω-rzutowe	ω-rzutowa	–	właściwy	$\mathrm{PP}^{\omega,\mathcal{S}}_{k,m}(W)$
afiniczne	α-rzutowa	–	niewłaściwy	$\mathrm{SP}^{\alpha,\mathcal{S}}_{k,m}(W)$
afiniczne	ω-rzutowa	–	właściwy	$\mathrm{AP}^{\alpha,\mathcal{S}}_{k,m}(W)$
afiniczne	afiniczna	ω-rzutowa na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	niewłaściwy	$\mathrm{AP}^{\alpha,\mathcal{S}}_{k,m}(W)$

Tabela 3.7: Klasyfikacja pęków właściwych typu gwiazda rozpiętych przez proste w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$.

rozpinające	prosta wierzch.	prosta osobliwa	wierzchołek	podstawa
α-rzutowe	α-rzutowa	–	właściwy	$\mathrm{PP}^{\alpha,\mathcal{T}}_{k,m}(W)$
ω-rzutowe	ω-rzutowa	–	właściwy	$\mathrm{PP}^{\omega,\mathcal{T}}_{k,m}(W)$
ω-rzutowe	afiniczna	afiniczna w $\mathfrak{A}$	właściwy	$\mathrm{SP}^{\omega,\mathcal{T}}_{k,m}(W)$
afiniczne	α-rzutowa	–	właściwy	$\mathrm{AP}^{\omega,\mathcal{T}}_{k,m}(W)$
afiniczne	ω-rzutowa	–	niewłaściwy	$\mathrm{SP}^{\omega,\mathcal{T}}_{k,m}(W)$
afiniczne	afiniczna	α-rzutowa na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	niewłaściwy	$\mathrm{AP}^{\omega,\mathcal{T}}_{k,m}(W)$

Tabela 3.8: Klasyfikacja pęków właściwych typu układ rozpiętych przez proste w przestrzeni jeżowej.

Dokonamy teraz analizy wafli rozpiętych przez proste w przestrzeni $\mathfrak{A}$. Niech g_1, g_2 będą prostymi afinicznymi w $\mathfrak{A}$ takimi, że $\overline{g_1}, \overline{g_2}$ rozpinają wafel G w $\mathfrak{L}(V)$. Wówczas $g_i = \widehat{\mathbf{p}}(H_i, B_i)$, gdzie $H_i \in \mathcal{F}_{k-1,m}(W)$ i $B_i \in \mathcal{F}_{k+1,m+1}(W)$ zgodnie z tabelą 3.1. Ponadto H_1, H_2 leżą na pewnej prostej p w $\mathfrak{L}(V)$ i podobnie B_1, B_2 na pewnej prostej q.

Załóżmy, że p jest α-prostą, a q jest prostą afiniczną. Wówczas w pęku G istnieje prosta niewłaściwa g_0 o wierzchołku $H_0 \in p$ i podstawie q^∞. Z tabeli 3.1 odczytujemy, że $H_0 \in \mathcal{F}_{k-1,m}(W)$ i $B_0 \in \mathcal{F}_{k+1,m+2}(W)$. Jest to ω-prosta na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$. Niech t będzie prostą przecinającą g_1 i g_2 w punktach odpowiednio U_1, U_2. Prosta t przecina również prostą g_0 w pewnym punkcie U_0. Ponieważ punkty U_1, U_2 są właściwe w $\mathfrak{A}$, natomiast U_0 niewłaściwy, to t jest prostą afiniczną w $\mathfrak{A}$ z 3.2.

W ten sposób, uwzględniając 3.9, które nakłada pewne ograniczenia na wafle, otrzymamy tabelę 3.9.

rozpinające	prosta wierzch.	prosta podstaw	prosta osobliwa	promienie
α-rzutowe	α-rzutowa	α-rzutowa	–	α-rzutowe
α-rzutowe	α-rzutowa	afiniczna	afiniczna w $\mathfrak{A}$	α-rzut.+afin.[1]
α-rzutowe	ω-rzutowa	ω-rzutowa	–	ω-rzutowe
α-rzutowe	afiniczna	afiniczna	α-rzutowa na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	afiniczne
ω-rzutowe	α-rzutowa	α-rzutowa	–	α-rzutowe
ω-rzutowe	ω-rzutowa	ω-rzutowa	–	ω-rzutowe
ω-rzutowe	afiniczna	ω-rzutowa	afiniczna w $\mathfrak{A}$	ω-rzut.+afin.[1]
ω-rzutowe	afiniczna	afiniczna	ω-rzutowa na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	afiniczne
afiniczne	α-rzutowa	α-rzutowa	–	α-rzutowe
afiniczne	α-rzutowa	ω-rzutowa	–	afiniczne
afiniczne	α-rzutowa	afiniczna	ω-rzutowa na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	afiniczne
afiniczne	ω-rzutowa	ω-rzutowa	–	ω-rzutowe
afiniczne	afiniczna	ω-rzutowa	α-rzutowa na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	afiniczne
afiniczne	afiniczna	afiniczna	afiniczna na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	afiniczne

Tabela 3.9: Klasyfikacja wafli rozpiętych przez proste w przestrzeni jeżowej.

Podobną analizę wykonamy teraz dla pęków rozpiętych przez podprzestrzenie odcinkowe w $\mathfrak{A}$. Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, będą α-odcinkami rozpinającymi pęk właściwy typu gwiazda w $\mathfrak{A}$ i niech $\mathsf{G} = \overline{\widetilde{\mathcal{X}}_1, \widetilde{\mathcal{X}}_2}$. Przyjmijmy, że $\mathcal{X}_i = [Z, Y_i]_{\mathcal{F}}$, tak aby $\widetilde{\mathcal{X}}_i = [Z, Y_i]$.

Gdy prosta $p = \overline{Y_1, Y_2}$ jest α-prostą, to z 3.7 i 3.22 każdy element $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$ wyznacza α-odcinek. Wierzchołek $\mathcal{X}'$ pęku G musi również wyznaczać α-odcinek jako przekrój α-odcinków. Podstawa pęku G wyznacza podprzestrzeń $\mathcal{X}'' = [Z, Y'']_{\mathcal{F}}$, gdzie $Y'' = Y_1 + Y_2$. Ponieważ p jest α-prostą i $p = \widehat{\mathbf{p}}(Y', Y'')$, gdzie $Y' = Y_1 \cap Y_2$, więc z 3.2 mamy $\operatorname{Trc} Y_i = \operatorname{Trc}(Y'')$. Zatem $\mathcal{X}''$ jest α-dcinkiem z 3.17.

Gdyby p była ω-prostą, to $\operatorname{Trc} Y' \prec \operatorname{Trc} Y_i$ z 3.2, a więc podprzestrzeń $[Z, Y']_{\mathcal{F}}$ wyznaczona przez wierzchołek G, zgodnie z 3.17, nie byłaby α-odcinkiem. Taki pęk nie istnieje.

Jeśli p jest afiniczna, to z 3.27 wszystkie elementy $\widehat{\mathsf{G}}$ wyznaczają α-odcinki. Odcinek osobliwy G^∞ wyznacza podprzestrzeń $\mathcal{X}_0 = [Z_0, Y_0]_{\mathcal{F}}$, gdzie $Z_0 = Z$ oraz $Y_0 = p^\infty$. Zgodnie z 3.7 podprzestrzeń $\mathcal{X}_0$ posiada następujące parametry:

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Trc} Z_0 &= m_{z_0} = m_z, & \dim \operatorname{Trc} Y_0 &= m_{y_0} = m_y + 1, \\ \dim \operatorname{Ctr} Z_0 &= d_{z_0} = d_z, & \dim \operatorname{Ctr} Y_0 &= d_{y_0} = d_y - 1. \end{aligned}$$

Ponieważ podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ spełniają pierwszy układ nierówności w (3.31), więc mamy

$$\begin{cases} m_{z_0} = m < m_{y_0}, \\ d_{z_0} < d \leqslant d_{y_0}. \end{cases} \tag{3.38}$$

[1] Wszystkie promienie są prostymi rzutowymi z wyjątkiem jednego, który jest prostą afiniczną.

Stąd, zgodnie z 3.19, $\mathcal{X}_0$ jest podprzestrzenią α-semi-afiniczną. Jednocześnie zauważmy, że

$$\begin{cases} m_{z_0} < m+1 = m_{y_0}, \\ d_{z_0} \leqslant d-1 \leqslant d_{y_0}. \end{cases} \tag{3.39}$$

Gdy zachodzi równość $d_{z_0} = d-1$, to z (3.25) odcinek $\mathcal{X}_0$ wyznacza punkt na horyzoncie $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$, natomiast gdy $d_{z_0} < d-1$, to z 3.17 odcinek $\mathcal{X}_0$ wyznacza α-odcinek na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$.

Kontynuując powyższe rozumowanie dla pozostałych typów odcinków uzyskamy tabelę 3.10, natomiast korzystając z zasady dualności tabelę 3.11.

rozpinające	prosta podstaw	odcinek osobliwy	wierzchołek	podstawa
α-rzutowe	α-rzutowa	–	α-rzutowy	α-rzutowa
α-rzutowe	afiniczna	α-semi-afiniczna w $\mathfrak{A}$, punkt lub α na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	α-rzutowy	α-semi-af.
ω-rzutowe	ω-rzutowa	–	ω-rzutowy	ω-rzutowa
afiniczne	α-rzutowa	–	ω lub ω-semi-af. na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	α-semi-af.
afiniczne	ω-rzutowa	–	afiniczny	afiniczna
afiniczne	afiniczna	ω-rzutowa lub ω-semi-af. na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	ω lub ω-semi-af. na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	afiniczna

Tabela 3.10: Klasyfikacja pęków właściwych typu gwiazda rozpiętych przez podprzestrzenie odcinkowe przestrzeni jeżowej.

rozpinające	prosta wierzch.	odcinek osobliwy	wierzchołek	podstawa
α-rzutowe	α-rzutowa	–	α-rzutowy	α-rzutowa
ω-rzutowe	ω-rzutowa	–	ω-rzutowy	ω-rzutowa
ω-rzutowe	afiniczna	ω-semi-afiniczna w $\mathfrak{A}$, punkt lub ω na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	ω-rzutowy	ω-semi-af.
afiniczne	α-rzutowa	–	afiniczna	afiniczna
afiniczne	ω-rzutowa	–	α lub α-semi-af. na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	ω-semi-af.
afiniczne	afiniczna	α-rzutowa lub α-semi-af. na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	α lub α-semi-af. na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$	afiniczna

Tabela 3.11: Klasyfikacja pęków właściwych typu układ rozpiętych przez podprzestrzenie odcinkowe przestrzeni jeżowej.

Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą α-odcinkami rozpinającymi wafel w $\mathfrak{A}$ i niech $\mathsf{G} = \overline{\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2}} = p \boxtimes q$.

Załóżmy, że p jest α-prostą. Gdy q jest również α-prostą, to w G nie ma odcinka osobliwego i z 3.27 wszystkie elementy G mają te same parametry wierzchołków i podstaw. Zatem wszystkie elementy G wyznaczają α-odcinki w $\mathfrak{A}$.

Z uwagi na 3.30 prosta q nie może być ω-prostą. Gdy q jest prostą afiniczną, to w G jest odcinek osobliwy $\mathcal{X}_0 = [Z_0, Y_0]$, gdzie $Z_0 \in p$ i $Y_0 = q^\infty$. Odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ spełniają pierwszy układ nierówności w (3.31), zatem z 3.7 mamy

$$\begin{cases} m_{z_0} = m < m_{y_0}, \\ d_{z_0} < d \leqslant d_{y_0}. \end{cases} \tag{3.40}$$

Stąd i z 3.19 $\mathcal{X}_0$ wyznacza podprzestrzeń α-semi-afiniczną w $\mathfrak{A}$. Zauważmy, że jednocześnie

$$\begin{cases} m_{z_0} < m+1 = m_{y_0}, \\ d_{z_0} \leqslant d-1 \leqslant d_{y_0}. \end{cases} \tag{3.41}$$

Jeśli $d_{z_0} = d - 1$, to z (3.25) odcinek $\mathcal{X}_0$ wyznacza punkt na horyzoncie $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$, natomiast jeśli $d_{z_0} < d - 1$, to z 3.17 odcinek $\mathcal{X}_0$ wyznacza α-odcinek na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$.

W efekcie takiej analizy otrzymujemy tabelę 3.12.

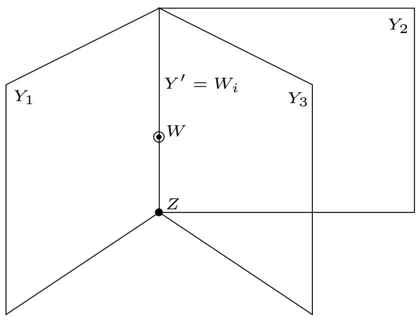
rozpinające	prosta wierzch.	prosta podstaw	odcinek osobliwy
α-rzutowe	α-rzutowa	α-rzutowa	–
α-rzutowe	α-rzutowa	afiniczna	α-semi-afiniczny w $\mathfrak{A}$, α-rzutowy na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$
α-rzutowe	ω-rzutowa	ω-rzutowa	–
α-rzutowe	afiniczna	afiniczna	α-rzutowy na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$
ω-rzutowe	α-rzutowa	α-rzutowa	–
ω-rzutowe	ω-rzutowa	ω-rzutowa	–
ω-rzutowe	afiniczna	ω-rzutowa	ω-semi-afiniczny w $\mathfrak{A}$, ω-rzutowy na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$
ω-rzutowe	afiniczna	afiniczna	ω-rzutowy na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$
afiniczne	α-rzutowa	α-rzutowa	–
afiniczne	α-rzutowa	ω-rzutowa	–
afiniczne	α-rzutowa	afiniczna	ω-rzutowy lub ω-semi-af. na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$
afiniczne	ω-rzutowa	ω-rzutowa	–
afiniczne	afiniczna	ω-rzutowa	α-rzutowy lub α-semi-af. na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$
afiniczne	afiniczna	afiniczna	afiniczny na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$

Tabela 3.12: Klasyfikacja wafli rozpiętych przez podprzestrzenie odcinkowe w przestrzeni jeżowej.

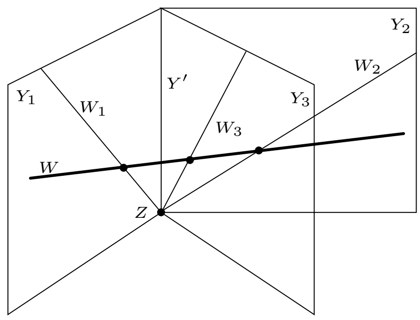
Aby zilustrować wprowadzone pojęcia, rozważmy przestrzeń pęków prostych w trójwymiarowej przestrzeni rzutowej z usuniętą podprzestrzenią W, inaczej mówiąc, przestrzeń jeżową $\mathfrak{A}_0 = \mathbf{A}_{2,m}(V, W)$, gdzie $\dim V = 4$. Dobierając odpowiednio W oraz m można uzyskać wszystkie pęki sklasyfikowane w tabelach 3.10, 3.11

i 3.12 uwzględniając również typy podprzestrzeni odcinkowych rozpinających te pęki. Poniżej przedstawimy przykłady wszystkich możliwych typów pęków występujących w przestrzeniach jeżowych, pominiemy jednak kwestię typów podprzestrzeni rozpinających.

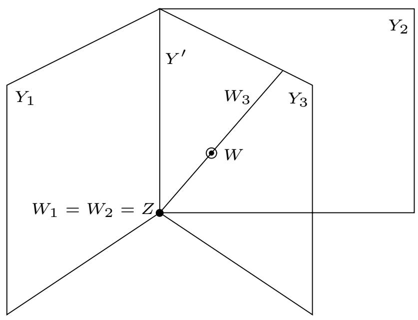
Na poniższych rysunkach elementami rozważanych pęków są podprzestrzenie $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_{\mathcal{F}}$ $(i = 1, 2, 3)$, ustalonej wyżej, przestrzeni $\mathfrak{A}_0$. Odcinki $[Z_1, Y_1], [Z_2, Y_2]$ są zawsze odcinkami nieosobliwymi rozważanego pęku. Ponadto przyjmujemy standardowe oznaczenie $W_i = Z_i + (\overline{W \cap Y_i})$ dla $i = 1, 2, 3$. Na rysunkach 3.9 oraz 3.11 przez Q oznaczono punkt prostej $\overline{W_1, W_2}$ leżący w odcinku $[Z_3, Y_3]$. Dla tych dwóch pęków $W_3 \neq Q$, dokładniej: $Q \prec W_3$ dla pęku $\alpha\backslash\mathrm{af}$ oraz $W_3 \prec Q$ dla pęku $\mathrm{af}\backslash\omega$ (por. 3.30).



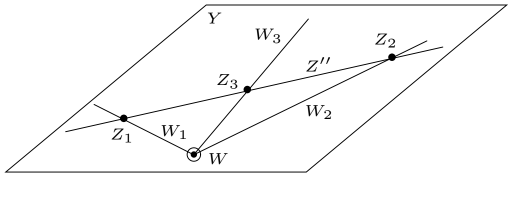
Rysunek 3.1: Pęk typu $\mathrm{pt}\backslash\alpha$



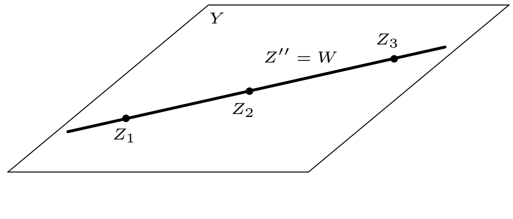
Rysunek 3.2: Pęk typu $\mathrm{pt}\backslash\omega$



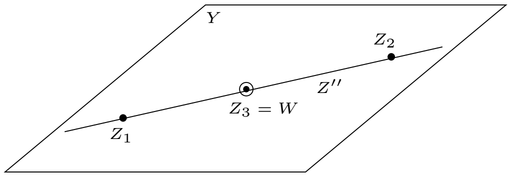
Rysunek 3.3: Pęk typu $\mathrm{pt}\backslash\mathrm{af}$



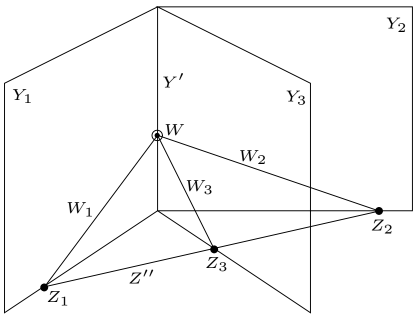
Rysunek 3.4: Pęk typu $\alpha\backslash\mathrm{pt}$



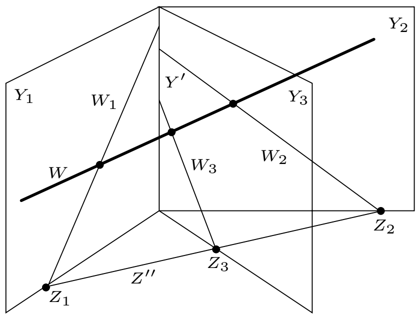
Rysunek 3.5: Pęk typu $\omega\backslash\mathrm{pt}$



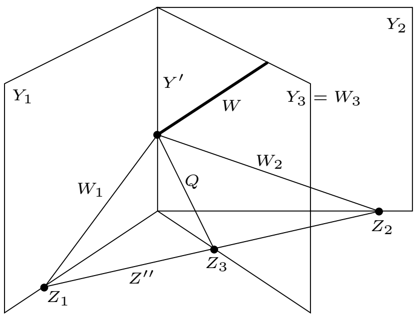
Rysunek 3.6: Pęk typu af\pt



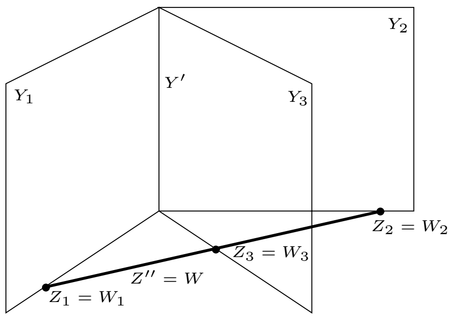
Rysunek 3.7: Pęk typu $\alpha\backslash\alpha$



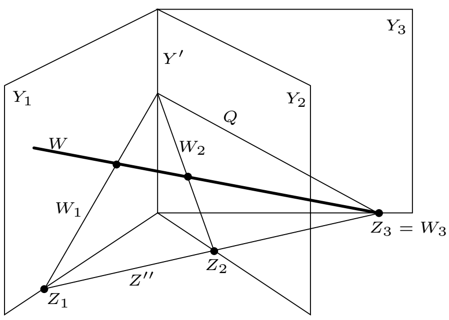
Rysunek 3.8: Pęk typu $\alpha\backslash\omega$



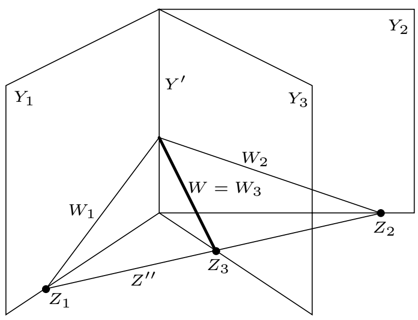
Rysunek 3.9: Pęk typu $\alpha\backslash$af



Rysunek 3.10: Pęk typu $\omega\backslash\omega$



Rysunek 3.11: Pęk typu af$\backslash\omega$



Rysunek 3.12: Pęk typu af\af

Uzyskane przykłady można zebrać w następującej tabeli.

$\zeta\backslash\eta$	pt	α	ω	af
pt	$\times$	rys. 3.1	rys. 3.2	rys. 3.3
ω	rys. 3.5	brak, por. 3.9	rys. 3.10	brak, por. 3.9
α	rys. 3.4	rys. 3.7	rys. 3.8	rys. 3.9
af	rys. 3.6	brak, por. 3.9	rys. 3.11	rys. 3.12

Tabela 3.13: Zestawienie pęków podprzestrzeni odcinkowych w przestrzeni jeżowej.

Analiza, którą wykonaliśmy w tej sekcji jest kompletna w tym sensie, że wszystkie wyróżnione w tabelach 3.10, 3.11 i 3.12 typy pęków można spotkać w odpowiednich przestrzeniach jeżowych.

Twierdzenie 3.36. *Każdy pęk podprzestrzeni odcinkowych w przestrzeni jeżowej jest jednym z pęków w tabeli* 3.13. *Na odwrót, dla każdego pęku z tabeli* 3.13 *istnieje odpowiednia przestrzeń jeżowa, w której taki pęk można skonstruować.*

3.5 Rzuty z prostej na prostą

Zanim przejdziemy do zasadniczego tematu jakim są rzuty pomiędzy podprzestrzeniami odcinkowymi w przestrzeni jeżowej, zbadamy rzuty klasyczne z prostej na prostą, w typowym dla geometrii rzutowych i afinicznych ujęciu, czyli rzuty środkowe i równoległe. Zaczynamy od określenia dwóch wygodnych pojęć: *stożka* i *walca*.

Niech $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L}\rangle$ będzie dowolną częściową przestrzenią prostych, $U \in S$ dowolnym punktem i $X \subseteq S$ zbiorem punktów. Zbiór

$$\Lambda(U, X) = \bigcup \{p \in \mathcal{L} \colon U \in p \ \text{ i } p \cap X \neq \emptyset\} \tag{3.42}$$

nazywamy *stożkiem*.

Lemat 3.37. *Niech U będzie punktem i h prostą w $\mathfrak{A}$. Jeśli $U \notin h$ i istnieją różne proste p_1, p_2 przez U przecinające h, to stożek $\Lambda(U, h)$ jest płaszczyzną w $\mathfrak{A}$.*

Dowód. Niech U_1, U_2 będą różnymi punktami z prostej h takimi, że $p_i = \overline{U, U_i}$ dla $i = 1, 2$. Wówczas zgodnie z [15] punkty U, U_1, U_2 rozpinają płaszczyznę Π w $\mathfrak{A}$. Ponieważ punkty U_1, U_2 są różne i $U_1, U_2 \in \Pi \cap h$, to $h_2 \subset \Pi$. □

Dla prostej afinicznej g i dowolnego zbioru punktów X w $\mathfrak{A}$ określamy zbiór

$$\mathrm{N_R}(X, g) = \{h \in \mathcal{G}_{k,m}(W) \colon h \cap X \neq \emptyset,\ h \,\mathrm{R}\, g\} \tag{3.43}$$

oraz *walec*

$$\mathrm{C_R}(X, g) = \bigcup \mathrm{N_R}(X, g), \tag{3.44}$$

gdzie R jest relacją równoległości $\parallel$ lub $\parallel_\blacklozenge$.

Lemat 3.38. *Niech g, h będą prostymi w $\mathfrak{A}$. Jeśli g jest prostą afiniczną, $g \nparallel h$ i istnieją dwie różne proste g_1, g_2 takie, że $g_1, g_2 \parallel g$ i g_1, g_2 przecinają h, to walec $\mathrm{C}_\parallel(h, g)$ jest płaszczyzną w $\mathfrak{A}$.*

DOWÓD. Ponieważ $g_1^\infty = g_2^\infty = U$ i $U \notin h$, to w $\mathfrak{P}$ stożek $\Pi = \Lambda(U, \overline{h})$ jest płaszczyzną. Zauważmy, że $\mathrm{C}_\parallel(h, g) = \Pi \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$ oraz $\Pi \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$ zawiera trzy niewspółliniowe punkty z $\mathfrak{A}$, zatem jest płaszczyzną w $\mathfrak{A}$. $\square$

Niech C będzie punktem i h_1, h_2 prostymi w $\mathfrak{A}$. Rozważmy następującą relację:

$$U_1 \ \xi(h_1, C, h_2)\ U_2 \quad \text{wtw., gdy} \quad U_1 \in h_1, U_2 \in h_2 \\ \text{i istnieje prosta } p \ \text{ taka, że } C, U_1, U_2 \in p. \tag{3.45}$$

Jeśli relacja ξ jest bijekcją z h_1 na h_2 to nazywamy ją *rzutem środkowym.*

STWIERDZENIE 3.39. *Następujące warunki są równoważne:*

(1) *relacja $\xi(h_1, C, h_2)$ jest rzutem środkowym,*

(2) *$C \notin h_1 \cup h_2$, zbiór $\Lambda(C, h_1)$ jest płaszczyzną, $h_2 \subset \Lambda(C, h_1)$ oraz albo proste h_1, h_2 są afiniczne i $h_1 \parallel h_2$, albo h_1, h_2 są prostymi rzutowymi tego samego typu,*

(3) *proste h_1, h_2 są tego samego typu i albo $h_1 = h_2$, albo $\overline{h_1}, \overline{h_2}$ wyznaczają pęk właściwy w $\mathfrak{L}(V)$ taki, że $h_1^\infty, h_2^\infty \in \overline{h_1} \cap \overline{h_2}$ oraz $\updownarrow\!\begin{smallmatrix}\overline{h_1}\\ C\\ \overline{h_2}\end{smallmatrix}$ jest rzutem środkowym w $\mathfrak{L}(V)$.*

Jeśli $\xi(h_1, C, h_2)$ jest rzutem, to $\xi(h_1, C, h_2) = \updownarrow\!\begin{smallmatrix}\overline{h_1}\\ C\\ \overline{h_2}\end{smallmatrix}|h_1$.

DOWÓD. (1) $\Longrightarrow$ (2) Gdyby $C \in h_1$ lub $C \in h_2$, to ξ nie byłaby bijekcją. Z 3.37 stożek $\Pi = \Lambda(C, h_1)$ jest płaszczyzną w $\mathfrak{A}$. Ponieważ każda prosta przez C przecinająca h_1 przecina h_2, to $h_2 \subset \Pi$.

Teraz załóżmy, że prosta h_1 jest afiniczna. Ponieważ Π jest mocną podprzestrzenią $\mathfrak{A}$, to na Π istnieje prosta $h := C * h_1$. Jeśli prosta h_2 przecina h_1, to h_2 przecina również h, powiedzmy w punkcie U. Wtedy musi istnieć punkt $U_1 \in h_1 \cap h$ taki aby $U_1 \ \xi(h_1, C, h_2)\ U$ co prowadzi do równości $h = h_1$ i uzyskujemy sprzeczności. Zatem h_2 musi być prostą afiniczną i $h_2 \parallel h_1$.

Zgodnie z klasyfikacją płaszczyzn $\mathfrak{A}$ w tabeli 3.6, nie istnieje płaszczyzna na której istniałyby proste rzutowe różnych typów, więc gdy obie proste h_1, h_2 są rzutowe, obie muszą być α-prostymi lub ω-prostymi.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Załóżmy, że $h_1 \neq h_2$. Zauważmy, że $\overline{h_1}, \overline{h_2}$ leżą na płaszczyźnie w $\mathfrak{P}$, i posiadają dokładnie jeden punkt wspólny U. W przestrzeni $\mathfrak{A}$ punkt U jest albo właściwy i proste h_1, h_2 są rzutowe, albo niewłaściwy i wtedy proste h_1, h_2 są równoległymi prostymi afinicznymi. W drugim przypadku mamy $U = h_1^\infty = h_2^\infty$. W obu przypadkach $\overline{h_1}, \overline{h_2}$ wyznaczają pęk właściwy w $\mathfrak{L}(V)$. Ponieważ $C \notin h_1 \cup h_2$, to $\updownarrow\!\begin{smallmatrix}\overline{h_1}\\ C\\ \overline{h_2}\end{smallmatrix}$ jest bijekcją, czyli rzutem środkowym w $\mathfrak{L}(V)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Niech $f = \updownarrow\!\begin{smallmatrix}\overline{h_1}\\ C\\ \overline{h_2}\end{smallmatrix}$ będzie rzutem środkowym w $\mathfrak{L}(V)$. Wówczas zauważmy, że $\xi = f|(h_1)$, co wystarczy za argument. $\square$

LEMAT 3.40. *Jeśli proste h_1, h_2 są afiniczne i $h_1 \parallel h_2$ lub obie h_1, h_2 są α-prostymi lub ω-prostymi, oraz h_1, h_2 są współpłaszczyznowe, to istnieje rzut środkowy f taki, że $f(h_1) = h_2$.*

DOWÓD. Niech Π będzie płaszczyzną w $\mathfrak{A}$, na której leżą proste h_1, h_2. Weźmy punkt C na Π spoza $h_1 \cup h_2$. Spełniony jest wówczas warunek (2) w 3.39, więc $\xi(h_1, C, h_2)$ jest żądanym rzutem. $\square$

Niech g, h_1, h_2 będą prostymi afinicznymi w $\mathfrak{A}$. Rozważmy następującą relację:

$$U_1\ \eta(h_1, g, h_2)\ U_2 \quad \text{wtw., gdy} \quad U_1 \in h_1, U_2 \in h_2 \qquad$$
$$\text{i istnieje prosta } p \text{ taka, że } U_1, U_2 \in p \parallel g. \qquad (3.46)$$

Jeśli relacja η jest bijekcją z prostej h_1 na h_2 to nazywamy ją *rzutem równoległym względem* $\parallel$.

STWIERDZENIE 3.41. *Następujące warunki są równoważne:*

(1) *relacja $\eta(h_1, g, h_2)$ jest rzutem równoległym względem $\parallel$,*

(2) *$h_1, h_2 \nparallel g$, $h_2 \subseteq \mathrm{C}_{\parallel}(h_1, g)$ i proste h_1, h_2 są tego samego typu,*

(3) *proste h_1, h_2 są tego samego typu i albo $h_1 = h_2$, albo $\overline{h_1}, \overline{h_2}$ wyznaczają pęk właściwy w $\mathfrak{L}(V)$ oraz $\underset{\overline{h_2}}{\overset{\overline{h_1}}{\downarrow g^{\infty}}}$ jest rzutem środkowym w $\mathfrak{L}(V)$.*

Jeśli $\eta(h_1, g, h_2)$ jest rzutem, to $\eta(h_1, g, h_2) = \underset{\overline{h_2}}{\overset{\overline{h_1}}{\downarrow g^{\infty}}}|h_1$.

DOWÓD. (1) $\Longrightarrow$ (2) Gdyby $h_1 \parallel g$ lub $h_2 \parallel g$, to η nie byłaby bijekcją. Zatem $h_1, h_2 \nparallel g$ i ze względu na 3.38 walec $\Pi = \mathrm{C}_{\parallel}(h_1, g)$ jest płaszczyzną w $\mathfrak{A}$.

Przypuśćmy, że prosta h_1 jest afiniczna. Wówczas punkty niewłaściwe h_1^{∞} i g^{∞}, ponieważ są różne, wyznaczają prostą q złożona z punktów niewłaściwych Π. Prosta q przetnie $\overline{h_2}$ na $\overline{\Pi}$. Stąd h_2 posiada punkt niewłaściwy i musi być afiniczna.

Jeśli prosta h_1 jest rzutowa, to z powyższego prosta h_2 jest również rzutowa i zgodnie z tabelą 3.6 obie proste h_1, h_2 są albo α-rzutowe albo ω-rzutowe.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Załóżmy, że $h_1 \neq h_2$. Ponieważ $h_2 \subseteq \mathrm{C}_{\parallel}(h_1, g)$, to z 3.38 walec $\mathrm{C}_{\parallel}(h_1, g)$ jest płaszczyzną w $\mathfrak{A}$. Ponieważ proste $\overline{h_1}$, $\overline{h_2}$ są współpłaszczyznowe, więc wyznaczają pęk właściwy w $\mathfrak{L}(V)$. Zauważmy, że g^{∞} jest środkiem rzutu z $\overline{h_1}$ na $\overline{h_2}$ w $\mathfrak{L}(V)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Gdy $f = \underset{\overline{h_2}}{\overset{\overline{h_1}}{\downarrow g^{\infty}}}$ jest rzutem środkowym w $\mathfrak{L}(V)$, to $\eta = f|h_1$ i η jest bijekcją. $\square$

LEMAT 3.42. *Jeśli proste h_1, h_2 są tego samego typu, leżą na płaszczyźnie Π w $\mathfrak{A}$ oraz $\Pi^{\infty} \setminus (\overline{h_1} \cup \overline{h_2}) \neq \emptyset$, to istnieje rzut równoległy f względem $\parallel$ taki, że $f(h_1) = h_2$.*

DOWÓD. Niech $C \in \Pi^{\infty} \setminus (\overline{h_1} \cup \overline{h_2})$. Ponieważ $\overline{\Pi}$ jest (z dokładnością do izomorfizmu) płaszczyzną rzutową, więc $\overline{h_2} \subseteq \Lambda(C, \overline{h_1})$. Proste przez C na $\overline{\Pi}$ w przestrzeni $\mathfrak{A}$ tworzą pęk prostych równoległych. Niech g będzie jedną z nich. Wówczas spełniony jest warunek (2) w 3.41 i $\eta(h_1, g, h_2)$ jest szukanym rzutem równoległym. $\square$

Przestrzeń jeżowa nie jest sami-afiniczną częściową przestrzenią prostych (w sensie [14]), gdzie równoległość spełnia pełny postulat Euklidesa, ale uzyskane wyniki w przypadku rzutu środkowego i równoległego pokrywają się z wynikami [14]. W przestrzeni jeżowej mamy określoną rozszerzoną równoległość $\parallel_{\blacklozenge}$ i możemy rozważać rzuty równoległe względem tej relacji.

Niech g, h_1, h_2 będą prostymi afinicznymi w $\mathfrak{A}$. Określamy następującą relację:

$$U_1\ \delta(h_1, g, h_2)\ U_2 \quad \text{wtw., gdy} \quad U_1 \in h_1, U_2 \in h_2 \text{ i istnieje prosta } p \text{ taka, że } U_1, U_2 \in p \parallel_{\blacklozenge} g. \tag{3.47}$$

Jeśli relacja δ jest bijekcją z prostej h_1 na h_2, to nazywamy ją *rzutem równoległym względem* $\parallel_{\blacklozenge}$.

Wszystkie trzy rzuty zostały określone na zbiorze prostych, można jednak te definicje rozszerzyć na dowolne podzbiory zbioru punktów $\mathfrak{A}$.

Lemat 3.43. *Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą afinicznymi podprzestrzeniami odcinkowymi w $\mathfrak{A}$. Jeśli $\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2}$ rozpinają wafel G w $\mathfrak{L}(V)$ taki, że istnieje afiniczna podprzestrzeń odcinkowa $\mathcal{X}$ na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$ i $\widetilde{\mathcal{X}} \in \mathsf{G}$, to istnieje prosta afiniczna g taka, że $\delta(\mathcal{X}_1, g, \mathcal{X}_2)$ jest rzutem równoległym względem $\parallel_{\blacklozenge}$ w $\mathfrak{A}$.*

Dowód. Weźmy $U_1 \in \mathcal{X}_1$. Ponieważ G jest waflem to istnieje $U_2 \in \widetilde{\mathcal{X}_2}$ oraz prosta g w $\mathfrak{L}(V)$ przez U_1, U_2. Prosta g przecina również $\widetilde{\mathcal{X}}$ w pewnym punkcie U. Ponieważ $\dim \operatorname{Trc} U_1 = m$ oraz z 3.20 mamy $m \leqslant \dim \operatorname{Trc} U_2$ i $m + 1 \leqslant \dim \operatorname{Trc} U$, więc z 3.7 prosta g jest prostą afiniczną w $\mathfrak{A}$. Zatem U jest punktem na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$. Weźmy dowolny punkt $D_1 \in \mathcal{X}_1$ rozumując analogicznie jak wyżej znajdziemy prostą afiniczną h w $\mathfrak{A}$ taką, że h przecina $\mathcal{X}_2$ w dokładnie jednym punkcie. Ponadto $g \parallel_{\blacklozenge} h$ bo $\mathcal{X}$ jest spójną podprzestrzenią afiniczną na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$. $\square$

Powyższy lemat mówi, że ślizgi w pewnych typach wafli w $\mathfrak{A}$ rozpiętych przez afiniczne podprzestrzenie afiniczne, posiadających odcinek osobliwy wyznaczający podprzestrzeń afiniczną na horyzoncie $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$, realizują rzut równoległy względem $\parallel_{\blacklozenge}$. Dla prostych prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Stwierdzenie 3.44. *Niech g, h_1, h_2 będą prostymi afinicznymi w $\mathfrak{A}$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *relacja $\delta(h_1, g, h_2)$ jest rzutem równoległym względem $\parallel_{\blacklozenge}$,*

(2) *$h_1, h_2 \nparallel_{\blacklozenge} g$, $h_2 \subset \mathrm{C}_{\parallel_{\blacklozenge}}(h_1, g)$ oraz albo $\delta(h_1, g, h_2) = \eta(h_1, g', h_2)$ dla pewnej prostej $g' \parallel_{\blacklozenge} g$, albo $h_1 = h_2$, albo $h_1 \parallel_{\blacklozenge} h_2$ i $h_1 \nparallel h_2$,*

(3) *$h_1, h_2 \nparallel_{\blacklozenge} g$, $h_2 \subset \mathrm{C}_{\parallel_{\blacklozenge}}(h_1, g)$ oraz albo $\delta(h_1, g, h_2) = \eta(h_1, g', h_2)$ dla pewnej prostej $g' \parallel_{\blacklozenge} g$, albo $h_1 = h_2$, albo $\overline{h_1}, \overline{h_2}$ rozpinają wafel G w $\mathfrak{L}(V)$ taki, że istnieje prosta afiniczna h na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$ i $\overline{h} \in \mathsf{G}$, oraz $\zeta_{\frac{\overline{h_1}}{\overline{h_2}}}$ jest ślizgiem w $\mathfrak{L}(V)$.*

Jeśli $\delta(h_1, g, h_2)$ jest rzutem, to $\delta(h_1, g, h_2) = \zeta_{\frac{\overline{h_1}}{\overline{h_2}}}|h_1$.

Dowód. (1) $\Longrightarrow$ (2) Gdyby $h_1 \parallel_{\blacklozenge} g$ lub $h_2 \parallel_{\blacklozenge} g$, to relacja δ nie byłaby bijekcją. Dla dowolnego punktu $U_2 \in h_2$ istnieje prosta $g' = U_2 *_{\blacklozenge} g$ taka, że $g' \cap h_1 \neq \emptyset$, więc $h_2 \subset \mathrm{C}_{\parallel_{\blacklozenge}}(h_1, g)$.

Załóżmy, że $h_1 \neq h_2$ oraz nie istnieje prosta g' taka, że $g' \parallel_{\blacklozenge} g$ i $\delta(h_1, g, h_2) = \eta(h_1, g', h_2)$. Weźmy dwa różne punkty $U_1, U_2 \in h_1$. Wówczas mamy proste $g_i = U_i *_{\blacklozenge} g$, takie że $g_1 \nparallel g_2$. Z [16, 3.4] mamy $h_1 \parallel_{\blacklozenge} h_2$ i $h_1 \nparallel h_2$.

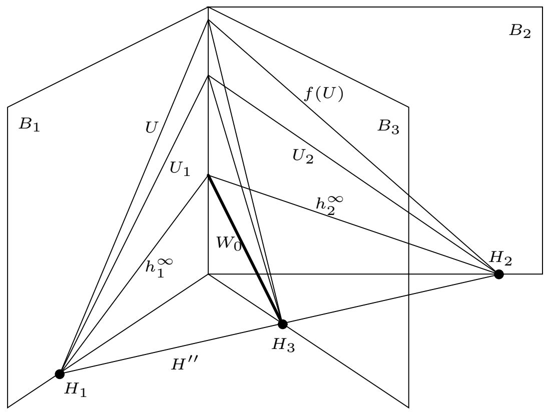
(2) $\Longrightarrow$ (3) Załóżmy, że $h_1 \neq h_2$ oraz nie istnieje prosta g' taka, że $g' \parallel_{\blacklozenge} g$ i $\delta(h_1, g, h_2) = \eta(h_1, g', h_2)$. Zauważmy, że $\overline{h_1} \cap \overline{h_2} = \emptyset$. Z faktu $h_2 \subset \mathrm{C}_{\parallel_{\blacklozenge}}(h_1, g)$

wynika, że $h_1 \lhd|\rhd h_2$, natomiast z [16, 4.7] mamy $h_1^\infty \sim h_2^\infty$. Tak więc $G = \overline{\overline{h_1, h_2}}$ jest waflem w $\mathfrak{L}(V)$. Zgodnie z [16, 4.9] $h = \mathrm{N}^\infty(g, h_1)$ spełnia tezę.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Przy założeniu, że $h_1, h_2 \nparallel_\blacklozenge g$ i $h_2 \subset \mathrm{C}_{\parallel_\blacklozenge}(h_1, g)$, jeśli $\delta(h_1, g, h_2) = \eta(h_1, g', h_2)$ dla pewnej prostej $g' \parallel_\blacklozenge g$, albo $h_1 = h_2$, to δ jest bijekcją. W pozostałym przypadku korzystamy z 3.43 i uwzględniając założenie, że $h_2 \subset \mathrm{C}_{\parallel_\blacklozenge}(h_1, g)$ dostajemy tezę. $\square$

Lemat 3.45. *Jeśli h_1, h_2 są prostymi afinicznymi w $\mathfrak{A}$ takimi, że ich punkty niewłaściwe h_1^∞, h_2^∞ są różne i leżą na prostej afinicznej na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$, to istnieje rzut równoległy f względem $\parallel_\blacklozenge$ taki, że $f(h_1) = h_2$.*

Dowód. Niech $h_i = \widehat{\mathbf{p}}(H_i, B_i)$. Z 3.1(vi) mamy $\operatorname{Trc} B_i = \operatorname{Trc} h_i^\infty$, a także $\operatorname{Trc} h_1^\infty = \operatorname{Trc} h_2^\infty$, gdyż punkty niewłaściwe leżą na prostej afinicznej. Zatem z 3.12 najmniejsza podprzestrzeń odcinkowa $\mathfrak{A}$ zawierająca h_1, h_2, czyli $[H_1 \cap H_2, B_1 + B_2]_{\mathcal{F}}$, to (z dokładnością do izomorfizmu) przestrzeń pęków prostych w trójwymiarowej przestrzeni rzutowej z usuniętą prostą W_0 (rys. 3.13).



Rysunek 3.13

Zauważmy, że proste $g = \overline{U_1, U_2}$ i $q = \overline{U, f(U)}$, gdzie $U \in h_1$, są afiniczne w $\mathfrak{A}$ oraz $\operatorname{Trc} g^\infty = \operatorname{Trc} q^\infty$. Zatem $g \parallel_\blacklozenge q$. Ponadto prosta g spełnia warunek (2) w 3.44, a więc f jest szukanym rzutem. $\square$

3.6 Rzuty między podprzestrzeniami odcinkowymi

Zaczynamy od definicji rzutu z podprzestrzeni odcinkowej na podprzestrzeń odcinkową w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$. Podobnie jak w przypadku pęków podprzestrzeni odcinkowych w $\mathfrak{A}$, rzuty są rzutami w kracie $\mathfrak{L}(V)$ zrelatywizowanymi do uniwersum przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$.

Definicja 3.46. Niech X_1, X_2 będą podzbiorami zbioru punktów przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$. Odwzorowanie $f\colon X_1 \longrightarrow X_2$ jest *rzutem* (*uogólnionym rzutem środkowym* lub *ślizgiem*) z X_1 na X_2 w przestrzeni $\mathfrak{A}$, gdy istnieje rzut F (odpowiednio, uogólniony rzut środkowy lub ślizg) w kracie $\mathfrak{L}(V)$ taki, że $f = F|\mathcal{F}_{k,m}(W)$ oraz $f^{-1} = F^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W)$. Mówimy, że rzut F *wyznacza* rzut f.

Bezpośrednio z definicji wynika kilka ważnych własności rzutów w przestrzeniach jeżowych. Zauważmy, że rzut w przestrzeni jeżowej jest odwzorowaniem odwracalnym i odwzorowanie odwrotne do rzutu w przestrzeni $\mathfrak{A}$ jest również rzutem w $\mathfrak{A}$. Ponadto wszystkie promienie rzutujące przy rzucie f są prostymi przestrzeni $\mathfrak{A}$. Ostatnia obserwacja pozwala nieco inaczej określić rzuty w przestrzeni jeżowej. Jeśli F jest uogólnionym rzutem środkowym z odcinka $\mathcal{X}_1$ na odcinek $\mathcal{X}_2$ o środku $\mathcal{Y}$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczającym rzut w $\mathfrak{A}$, to zauważmy, że promienie rzutujące przecinają $\mathcal{Y}$ w punktach właściwych lub niewłaściwych przestrzeni $\mathfrak{A}$, zgodnie z 3.2. Można zatem powiedzieć, że rzut F wyznacza uogólniony rzut środkowy f w $\mathfrak{A}$ z podprzestrzeni $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$ na $\mathcal{X}_2 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$ o środku zawartym w zbiorze

$$\mathcal{Y}_0 = (\mathcal{Y} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)) \cup (\mathcal{Y} \cap \mathcal{F}_{k,m+1}(W)),$$

dany formułą analogiczną do (1.56), a mianowicie: dla $U_i \in \mathcal{X}_i \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$

$$\begin{aligned} f(U_1) = U_2 \text{ wtw., gdy } & U_1, U_2, U_3 \text{ leżą na jednej prostej w } \mathfrak{A} \text{ lub} \\ & U_3 = \left(\overline{U_1, U_2}\right)^{\infty}, \text{gdzie } \overline{U_1, U_2} \text{ jest prostą w } \mathfrak{A}, \text{ dla pewnego } U_3 \in \mathcal{Y}_0. \end{aligned}$$

W przypadku ślizgu można powiedzieć, że ślizg w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ to odwzorowanie $f\colon \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2$ pomiędzy różnymi podprzestrzeniami odcinkowymi $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ leżącymi w waflu w $\mathfrak{A}$ dane formułą

$$f(U_1) = U_2 \text{ wtw., gdy } U_1 \sim U_2 \text{ w } \mathfrak{A},$$

gdzie $U_i \in \mathcal{X}_i$, analogiczną do (1.58) określającą ślizg w kracie.

Nie każdy rzut w kracie $\mathfrak{L}(V)$ po obcięciu do uniwersum przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ jest rzutem w $\mathfrak{A}$.

Przykład 3.47. W przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ rozważmy płaszczyznę afiniczną Π. Ustalmy punkt U na Π i weźmy trzy różne proste g_1, g_2, g_3 przez U na Π. Proste g_1, g_2, g_3 są prostymi afinicznymi. Zauważmy, że proste $\overline{g_1}, \overline{g_2}$ rozpinają pęk właściwy w kracie $\mathfrak{L}(V)$ o wierzchołku U i podstawie $\widetilde{\Pi}$. Na prostej g_3 wybierzmy punkt C różny od U. W kracie $\mathfrak{L}(V)$ możemy rozważać rzut środkowy $F = \downarrow\begin{smallmatrix}\overline{g_1}\\ C\\ \overline{g_2}\end{smallmatrix}$. Ponieważ punkty C i g_2^{∞} leżą na $\widetilde{\Pi}$, więc są sąsiednie w $\mathfrak{L}(V)$, a prosta p je łącząca przecina $\overline{g_1}$, powiedzmy w punkcie U_1. Prosta p łączy punkt właściwy z niewłaściwym w $\mathfrak{A}$, więc z 3.2 prosta p jest afiniczna w $\mathfrak{A}$. W konsekwencji punkt U_1 musi być punktem $\mathfrak{A}$. Niech $f = F|\mathcal{F}_{k,m}(W)$. Obrazem punktu U_1 przestrzeni $\mathfrak{A}$ przy f jest punkt spoza uniwersum $\mathfrak{A}$, więc zgodnie z przyjętą definicją f nie jest rzutem w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$. $\square$

W definicji 3.46 warunek mówiący, że odwzorowanie odwrotne do rzutu w $\mathfrak{A}$ jest również rzutem w $\mathfrak{A}$ jest istotny.

Przykład 3.48. W przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}_0 = \mathbf{A}_{k,m-1}(V, W)$ rozważmy wafel G rozpięty przez proste afiniczne g_1, g_2 taki, że $\mathsf{G} = p \boxtimes q$, gdzie prosta p jest α-rzutowa i q jest afiniczna. Przez $\widetilde{\mathsf{G}}$ oznaczmy pęk w $\mathfrak{L}(V)$ rozpięty przez $\widetilde{g_1}, \widetilde{g_2}$. Zgodnie z tabelą 3.9 prosta osobliwa pęku $\widetilde{\mathsf{G}}$ jest ω-rzutowa na $\mathbf{H}(\mathfrak{A}_0)$. Zauważmy, że $\mathbf{H}(\mathfrak{A}_0) = \mathfrak{A}$. Niech $\mathcal{X}_1$ będzie elementem nieosobliwym i $\mathcal{X}_2$ osobliwym w waflu $\widetilde{\mathsf{G}}$, a F ślizgiem z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$. Zauważmy, że $\mathrm{rg}(F|\mathcal{F}_{k,m}(W)) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$, ale $\mathrm{rg}(F^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W)) \nsubseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$. $\square$

Zasadniczym celem tej części pracy jest znalezienie odpowiedzi na pytanie: jakie kryteria muszą spełniać podprzestrzenie odcinkowe aby istniał rzut między nimi w przestrzeni jeżowej? Na początek sprecyzujemy pojęcie wyznaczania rzutu w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ przez rzut w kracie $\mathfrak{L}(V)$.

Lemat 3.49. *Niech F będzie rzutem z odcinka $\mathcal{X}_1$ na odcinek $\mathcal{X}_2$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *rzut F w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznacza rzut w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$,*

(2) $F(\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)) = \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$.

(3) $\operatorname{rg}(F|\mathcal{F}_{k,m}(W)) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$ *oraz* $\operatorname{rg}(F^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W)) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$,

Dowód. Oznaczmy $f := F|\mathcal{F}_{k,m}(W)$ oraz $g := F^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W)$.

(1) $\implies$ (2):

Bezpośrednio z definicji 3.46 wynika, że obrazami punków przestrzeni $\mathfrak{A}$ leżących w odcinku $\mathcal{X}_1$ przy rzucie F są punkty $\mathfrak{A}$. Stąd $F(\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)) \subseteq \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$. Analogiczna własność przysługuje F^{-1}, to znaczy, obrazami punktów $\mathfrak{A}$ z odcinka $\mathcal{X}_2$ przy F^{-1} są punkty $\mathfrak{A}$. Stąd inkluzja $F^{-1}(\mathcal{X}_2 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)) \subseteq \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$, więc żądana równość jest prawdziwa.

(2) $\implies$ (3):

Zauważmy, że z równości (2) mamy

$$\operatorname{rg}(f) = f(\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)) = F(\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)) = \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W).$$

Analogicznie

$$\operatorname{rg}(g) = g(\mathcal{X}_2 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)) = F^{-1}(\mathcal{X}_2 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)) = \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W).$$

(3) $\implies$ (1):

Zgodnie z definicją 3.46 musimy wykazać, że f jest odwzorowaniem pomiędzy podzbiorami uniwersum przestrzeni $\mathfrak{A}$ oraz $f^{-1} = g$.

Ponieważ $\operatorname{dm}(f) = \operatorname{dm}(F) \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$ i z założenia $\operatorname{rg}(f) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$, więc f jest odwzorowaniem pomiędzy podzbiorami zbioru punktów przestrzeni $\mathfrak{A}$.

Teraz weźmy $U \in \operatorname{dm}(g)$. Mamy $g(U) \in \operatorname{rg}(F^{-1}) = \operatorname{dm}(F)$, natomiast z założenia $g(U) \in \mathcal{F}_{k,m}(W)$. W konsekwencji $g(U) \in \operatorname{dm}(f)$. Zatem

$$f(g(U)) = f(F^{-1}(U)) = F(F^{-1}(U)) = U,$$

skąd $f^{-1}(U) = g(U)$, gdyż f jest bijekcją. Z dowolności U mamy $f^{-1} = g$. □

Definicja rzutu w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ pozornie dopuszcza rzuty pomiędzy dowolnymi podzbiorami uniwersum $\mathfrak{A}$. Jak się okazuje założenie o tym, że rzut w $\mathfrak{A}$ jest wyznaczony przez rzut w kracie $\mathfrak{L}(V)$ jest bardzo mocnym założeniem i między innymi poważnie ogranicza dziedzinę i obraz przy rzucie w $\mathfrak{A}$.

Stwierdzenie 3.50. *Jeśli f jest rzutem ze zbioru $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ w $\mathfrak{A}$, to $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są podprzestrzeniami odcinkowymi w $\mathfrak{A}$. Ponadto, jeśli F jest rzutem z odcinka $[Z_1, Y_1]$ na $[Z_2, Y_2]$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$, wyznaczającym f, to $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_{\mathcal{F}}$.*

Dowód. Z definicji 3.46 istnieje rzut F w kracie $\mathfrak{L}(V)$ taki, że $f = F|\mathcal{F}_{k,m}(W)$ i $f^{-1} = F^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W)$. Zatem istnieją odcinki $[Z_1, Y_1]$, $[Z_2, Y_2]$ kraty $\mathfrak{L}(V)$ takie, że $\mathrm{dm}(F) = [Z_1, Y_1]$ oraz $\mathrm{rg}(F) = [Z_2, Y_2]$. Stąd

$$\mathcal{X}_1 = \mathrm{dm}(f) = \mathrm{dm}(F) \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) = [Z_1, Y_1] \cap \mathcal{F}_{k,m}(W).$$

Ponieważ $\mathrm{dm}(F^{-1}) = \mathrm{rg}(F)$, więc

$$\mathcal{X}_2 = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{dm}(f^{-1}) = \mathrm{dm}(F^{-1}) \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) = [Z_2, Y_2] \cap \mathcal{F}_{k,m}(W),$$

co kończy dowód. □

Rzuty w kracie $\mathfrak{L}(V)$ są izomorfizmami krat i przeprowadzają proste na proste w $\mathfrak{L}(V)$. Konsekwencją tej własności jest kolejne twierdzenie.

Stwierdzenie 3.51. *Obrazem prostej przy rzucie w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ jest prosta w przestrzeni $\mathfrak{A}$.*

Dowód. Niech f będzie rzutem i g prostą w $\mathfrak{A}$ taką, że $g \subseteq \mathrm{dm}(f)$. Z definicji 3.46 istnieje rzut F w kracie $\mathfrak{L}(V)$ taki, że $f = F|\mathcal{F}_{k,m}(W)$. Z 1.79 $F(\overline{g})$ jest prostą w $\mathfrak{L}(V)$. Ponieważ

$$f(g) = F(g) = F(\overline{g} \cap \mathrm{dm}(f)) = F(\overline{g}) \cap \mathrm{rg}(f) = \widehat{F(\overline{g})},$$

więc $f(g)$ jest prostą w $\mathfrak{A}$. □

Z powyższego, do bycia kolineacją rzutowi w $\mathfrak{A}$ brakuje aby zachowywał relację równoległości.

Lemat 3.52. *Jeśli f jest rzutem w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ i F jest rzutem w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczającym rzut f, to dla prostej afinicznej g takiej, że $g \subseteq \mathrm{dm}(f)$ zachodzi $F(g^\infty) = f(g)^\infty$.*

Dowód. Z definicji rzutu w przestrzeni jeżowej $f = F|\mathcal{F}_{k,m}(W)$. Z 3.51 $f(g)$ jest prostą w $\mathfrak{A}$, natomiast z założenia $f(g) = F(g)$. Ponieważ $\overline{g} = g \cup \{g^\infty\}$, więc

$$F(\overline{g}) = F(g) \cup \{F(g^\infty)\} = f(g) \cup \{F(g^\infty)\},$$

natomiast zgodnie z 1.79 $F(\overline{g})$ jest prostą w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Rzut F jest bijekcją, dlatego też

$$F(g^\infty) \in F(\overline{g}) \setminus F(g) = \overline{F(g)} \setminus F(g) = \overline{f(g)} \setminus f(g),$$

co oznacza, że

$$F(g^\infty) = f(g)^\infty.$$

□

Tak więc rzuty w przestrzeni jeżowej zachowują równoległość i w rezultacie są kolineacjami między odpowiednimi przestrzeniami jeżowymi(por. 3.12). Zanotujemy ten fakt.

Twierdzenie 3.53. *Rzut z podprzestrzeni odcinkowej $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ w przestrzeni jeżowej wyznacza kolineację między przestrzeniami jeżowymi $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ odpowiadającymi podprzestrzeniom $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$.*

Zgodnie z [13], przekształcenie $f^\infty\colon \mathcal{X}_1^\infty \longrightarrow \mathcal{X}_2^\infty$ dane warunkiem

$$f^\infty(g^\infty) = f(g)^\infty \quad \text{dla dowolnej prostej afinicznej } g \subseteq \mathcal{X}_1 \tag{3.48}$$

jest kolineacją horyzontu $\mathbf{H}(\mathfrak{A}_1)$ na $\mathbf{H}(\mathfrak{A}_2)$. Kolejne dwa twierdzenia są konsekwencją tego faktu.

Stwierdzenie 3.54. *Jeśli f jest rzutem ze zbioru $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ w przestrzeni $\mathfrak{A}$ i F jest rzutem w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczającym rzut f, to f^∞ jest rzutem z $\mathcal{X}_1^\infty$ na $\mathcal{X}_2^\infty$ w przestrzeni jeżowej $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$ wyznaczonym przez F.*

Dowód. Z 3.46 mamy $f = F|\mathcal{F}_{k,m}(W)$ oraz $f^{-1} = F^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W)$. Zaczniemy od wykazania, że $F(\mathcal{X}_1^\infty) = \mathcal{X}_2^\infty$.

Niech $U \in F(\mathcal{X}_1^\infty)$. Zgodnie z (3.14) $U = F(g^\infty)$, gdzie g jest pewną prostą afiniczną z przestrzeni $\mathfrak{A}$ taką, że $g \subseteq \mathcal{X}_1$. Z 3.52 $U = f(g)^\infty$, natomiast z samego określenia rzutu $f(g) \subseteq \mathcal{X}_2$. Z 3.51 $f(g)$ jest prostą w $\mathfrak{A}$, więc z (3.14) mamy $U \in \mathcal{X}_2^\infty$.

Na odwrót jeśli $U \in \mathcal{X}_2^\infty$, to $U = g^\infty$, gdzie g jest prostą afiniczną zawartą w $\mathcal{X}_2$. Do F^{-1} możemy zastosować analogiczne rozumowanie jak wyżej w stosunku do F. Uzyskuje się w ten sposób

$$F^{-1}(g^\infty) = f^{-1}(g)^\infty \in \mathcal{X}_1^\infty,$$

skąd $U = F(F^{-1}(g^\infty)) \in F(\mathcal{X}_1^\infty)$.

Tak więc $F(\mathcal{X}_1^\infty) = \mathcal{X}_2^\infty$ i na mocy 3.49 rzut F wyznacza rzut z $\mathcal{X}_1^\infty$ na $\mathcal{X}_2^\infty$ na horyzoncie $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$. Natomiast z 3.52 i (3.48) mamy

$$F|\mathcal{F}_{k,m+1}(W)(g^\infty) = F(g^\infty) = f(g)^\infty = f^\infty(g^\infty),$$

dla dowolnej prostej afinicznej $g \subseteq \mathcal{X}_1$, a więc $F|\mathcal{F}_{k,m+1}(W) = f^\infty$, co kończy dowód. □

Lemat 3.55. *Jeśli f jest rzutem i g prostą afiniczną (rzutową) w przestrzeni $\mathfrak{A}$ taką, że $g \subseteq \mathrm{dm}(f)$, to $f(g)$ jest prostą afiniczną (rzutową) w przestrzeni $\mathfrak{A}$.*

Dowód. Zgodnie z 3.46 niech F będzie rzutem w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczającym f.

Z 3.51 $f(g)$ jest prostą w $\mathfrak{A}$. Jeśli g jest prostą afiniczną, to z 3.52 obrazem przy F punktu niewłaściwego prostej g jest punkt niewłaściwy prostej $f(g)$, zatem $f(g)$ musi być afiniczna. Jeśli natomiast g jest rzutowa, to prosta $f(g)$ jest albo rzutowa, albo afiniczna. W drugim jednak przypadku mielibyśmy punkt niewłaściwy na $f(g)$, którego obrazem przy F^{-1} byłby punkt niewłaściwy prostej g, co nie jest możliwe. □

Powyższy lemat nie gwarantuje jeszcze zachowywania typów prostych przez rzuty w przestrzeni jeżowej. Udowodnimy teraz jego znacznie mocniejszy wariant.

Stwierdzenie 3.56. *Niech f będzie rzutem w przestrzeni $\mathfrak{A}$. Jeśli g jest prostą w $\mathfrak{A}$ taką, że $g \subseteq \mathrm{dm}(f)$, to g i $f(g)$ są tego samego typu oraz $f|g$ jest rzutem środkowym, rzutem równoległym względem relacji $\parallel$ lub $\parallel_\blacklozenge$, albo ślizgiem z prostej na prostą w przestrzeni $\mathfrak{A}$.*

DOWÓD. Na mocy 3.46 niech F będzie rzutem z odcinka $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczającym rzut f. Z 3.55 obie proste $g, f(g)$ są albo afiniczne, albo rzutowe.

Załóżmy, że f jest uogólnionym rzutem środkowym. Jeśli $g \subseteq \mathcal{X}'$, to $f|g = \mathrm{id}_g$, a więc możemy traktować $f|g$ jako rzut środkowy lub równoległy. Jeśli natomiast $\overline{g} \cap \mathcal{X}' \neq \emptyset$, ale $\overline{g} \nsubseteq \mathcal{X}'$, to z 1.83(iii) $F|\overline{g}$ jest rzutem środkowym w $\mathfrak{L}(V)$ i proste $g, f(g)$ rozpinają pęk właściwy. W konsekwencji $g, f(g)$ leżą na jednej płaszczyźnie w $\mathfrak{A}$. Ponieważ obie proste $g, f(g)$ są rzutowe lub afiniczne, więc z tabeli 3.7 i 3.8 wynika, że są one tego samego typu. Spełniony jest zatem warunek 3.39(3) lub 3.41(3) i odpowiednio $f|g$ jest rzutem środkowym lub równoległym.

Jeśli $\overline{g} \cap \mathcal{X}' = \emptyset$, to z 1.83(ii) $F|\overline{g}$ jest ślizgiem w $\mathfrak{L}(V)$. Ten sam fakt uzyskamy, rozważając przypadek gdy f jest ślizgiem. W obu przypadkach z 1.83(ii) proste $\overline{g}, \overline{f(g)}$ wyznaczają wafel G w $\mathfrak{L}(V)$. Z tabeli 3.9 wynika, że obie proste $g, f(g)$ są tego samego typu. Gdy prosta osobliwa w G jest afiniczna na horyzoncie $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$, to wówczas $f|(g)$ jest rzutem równoległym względem $\|_{\blacklozenge}$ w $\mathfrak{A}$. W przeciwnym razie $f|(g)$ jest ślizgiem w $\mathfrak{A}$. □

Ponieważ odwzorowanie odwrotne do rzutu f w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ jest też rzutem w $\mathfrak{A}$, więc do f^{-1} możemy zastosować 3.56 i w konsekwencji rzut f^{-1} zachowuje typy prostych w $\mathfrak{A}$. Stąd możemy wysnuć następujący wniosek.

WNIOSEK 3.57. *Jeśli f jest rzutem i $\mathcal{X}$ podprzestrzenią w przestrzeni $\mathfrak{A}$ taką, że $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{dm}(f)$, to $\mathcal{X}$ oraz $f(\mathcal{X})$ są tego samego typu.*

Przedstawimy teraz opis zdegenerowanych podprzestrzeni odcinkowych, którego będziemy potrzebować dalej.

LEMAT 3.58. *Niech $\mathcal{X} = [Z, Y]_{\mathcal{F}}$ będzie podprzestrzenią $\mathfrak{A}$.*

(i) *Jeśli podprzestrzeń $\mathcal{X}$ jest zdegenerowana, to $\mathcal{X} = \emptyset$, $\mathcal{X} = \{Z\}$, $\mathcal{X} = \{Y\}$, albo $\mathcal{X} = \{Z + (W \cap Y)\}$.*

(ii) *Jeśli podprzestrzeń $\mathcal{X}^\infty$ na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$ jest zdegenerowana, to albo $\mathcal{X}^\infty = \emptyset$, albo $\mathcal{X}^\infty = \{Z + (W \cap Y)\}$.*

DOWÓD. Niech $W_0 := Z + (W \cap Y)$.

(i) Załóżmy, że $\mathcal{X} \neq \emptyset$, $\mathcal{X} \neq \{Z\}$ i $\mathcal{X} \neq \{Y\}$. Ponieważ $\mathcal{X}$ jest zdegenerowaną podprzestrzenią odcinkową, więc jest jedno-elementowa. Zatem $\mathcal{X}$ jest podprzestrzenią rzutową i z 3.21 mamy $\mathcal{X} = [W_0, Y]_k$ lub $\mathcal{X} = [Z, W_0]_k$. W takim razie albo $\dim Z = k$, albo $\dim Y = k$, albo $\dim W_0 = k$. Dwa pierwsze przypadki zostały wykluczone założeniem, więc ostatecznie $\mathcal{X} = \{W_0\}$.

(ii) Załóżmy, że $\mathcal{X}^\infty \neq \emptyset$. Ponieważ podprzestrzeń $\mathcal{X}^\infty$ jest zdegenerowana i z 3.15 mamy $\mathcal{X}^\infty = [Z, Y] \cap \mathcal{F}_{k,m+1}(W)$, więc z (i) oraz założenia o niepustości $\mathcal{X}^\infty$ albo $\mathcal{X}^\infty = \{Z\}$, albo $\mathcal{X}^\infty = \{Y\}$, albo $\mathcal{X}^\infty = \{W_0\}$. W dwóch pierwszych przypadkach podprzestrzeń $\mathcal{X}$ byłaby jedno-elementowa i w konsekwencji mielibyśmy $\mathcal{X}^\infty = \emptyset$ zgodnie z (3.14). Stąd $\mathcal{X}^\infty = \{W_0\}$. □

Kolejny lemat jest zapowiedzią charakteryzacji rzutów w przestrzeniach jeżowych. Jest to warunek konieczny na to, aby rzut w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczał rzut w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$.

LEMAT 3.59. *Niech F będzie rzutem z odcinka $[Z_1, Y_1]$ na $[Z_2, Y_2]$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Jeśli F wyznacza rzut w przestrzeni $\mathfrak{A}$ oraz $]Z_1, Y_1[\cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \neq \emptyset$, to*

$$F(Z_1 + (W \cap Y_1)) = Z_2 + (W \cap Y_2).$$

DOWÓD. Oznaczmy $f := F|\mathcal{F}_{k,m}(W)$, $\mathcal{X}_i := [Z_i, Y_i]_{\mathcal{F}}$ oraz $W_i := Z_i + (W \cap Y_i)$. Z 3.57 obie podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są albo rzutowe, albo nie są rzutowe. Z uwagi na fakt, że $f(\mathcal{X}_1) = \mathcal{X}_2$ obie podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są jednocześnie albo zdegenerowane, albo nie.

Zacznijmy rozważania od przypadku gdy podprzestrzeń $\mathcal{X}_1$ jest zdegenerowana. Założenie $]Z_1, Y_1[\, \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \neq \emptyset$ mówi, że $\mathcal{X}_1 \neq \emptyset$, $\mathcal{X}_1 \neq \{Z\}$ i $\mathcal{X}_1 \neq \{Y\}$. Zatem z 3.58(i) mamy $\mathcal{X}_1 = \{W_1\}$. Ponieważ podprzestrzeń $\mathcal{X}_2$ w tym wypadku musi być również jedno-elementowa jako obraz $\mathcal{X}_1$ przy rzucie f oraz $Z_2 = F(Z_1)$, $Y_2 = F(Y_1)$ z 1.80, więc $\mathcal{X}_2 = \{W_2\}$ z 3.58(i). W rezultacie $F(W_1) = W_2$.

Jeśli $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są niezdegenerowanymi podprzestrzeniami rzutowymi, to zgodnie z 3.21 są one postaci k-odcinków $\mathcal{X}_i = [W_i, Y_i]_k$, względnie $\mathcal{X}_i = [Z_i, W_i]_k$ w zależności od tego czy są to α, czy ω-odcinki. W obu przypadkach $F(\mathcal{X}_1) = f(\mathcal{X}_1) = \mathcal{X}_2$. Ponieważ $\mathcal{X}_1$ jest niezdegenerowanym k-odcinkiem, zatem z uwagi na 2.13 zachodzi żądana równość.

Jeśli podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ nie są rzutowe, to z 3.14 $\mathcal{X}_i^\infty \neq \emptyset$ i z 3.15 $\mathcal{X}_i^\infty$ są podprzestrzeniami odcinkowymi na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$. Z 3.54 mamy rzut f^∞ z $\mathcal{X}_1^\infty$ na $\mathcal{X}_2^\infty$ w przestrzeni jeżowej $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$. Albo $\mathcal{X}_1^\infty, \mathcal{X}_2^\infty$ są jedno-elementowe i tezę uzyskujemy z 3.58(ii), albo $\mathcal{X}_1^\infty, \mathcal{X}_2^\infty$ są niezdegenerowanymi podprzestrzeniami rzutowymi i możemy powtórzyć rozumowanie przeprowadzone wcześniej dla podprzestrzeni rzutowych $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, albo podprzestrzenie $\mathcal{X}_1^\infty, \mathcal{X}_2^\infty$ nie są rzutowe. W ostatnim przypadku powtórnie stosujemy operację wyznaczania horyzontu dla podprzestrzeni odcinkowej, rozważamy rzut $(f^\infty)^\infty$ i aplikujemy rozumowanie dla podprzestrzeni nierzutowych $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ itd. Procedura zakończy się po maksymalnie $m_{\max} - m$ krokach. □

Z uwagi na 3.30(ii) i powyższy lemat mamy

WNIOSEK 3.60. *Ślizg w $\alpha\backslash\omega$-waflu w kracie $\mathfrak{L}(V)$ nie wyznacza rzutu w żadnej przestrzeni jeżowej.*

W dalszej części udowodnimy twierdzenie odwrotne do 3.59. W tym celu będziemy jednak potrzebować kilku dodatkowych faktów o rzutach w przestrzeniach jeżowych.

STWIERDZENIE 3.61. *Jeśli f jest rzutem z podprzestrzeni odcinkowej $\mathcal{X}_1$ na podprzestrzeń odcinkową $\mathcal{X}_2$ w $\mathfrak{A}$, to istnieje rzut F z $\widetilde{\mathcal{X}_1}$ na $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczający f. Jeśli ponadto, $\mathcal{X}_1$ jest podprzestrzenią semi-afiniczną lub rzutową, to rzut F jest dokładnie jeden.*

DOWÓD. Jeśli $\mathcal{X}_1 = \emptyset$, wtedy musi być $\mathcal{X}_2 = f(\mathcal{X}_1) = \emptyset$ i szukany rzut to $F = \emptyset$. Jeśli natomiast $\mathcal{X}_1 = \{U_1\}$, to $\mathcal{X}_2 = f(\mathcal{X}_1) = \{U_2\}$ dla pewnego U_2, oraz $\widetilde{\mathcal{X}_i} = [U_i, U_i]$ z 3.23. Ponieważ $U_1 \sim U_2$, więc szukany rzut F istnieje i jest dokładnie jeden. Dalej zakładamy, że $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są niezdegenerowane.

Z definicji rzutu 3.46 mamy rzut F_0 z odcinka $\mathcal{X}_1' = [Z_1, Y_1]$ na $\mathcal{X}_2' = [Z_2, Y_2]$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$ taki, że

$$f = F_0|\mathcal{F}_{k,m}(W) \quad \text{oraz} \quad f^{-1} = F_0^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W). \tag{3.49}$$

Z 3.50 mamy

$$\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_{\mathcal{F}}, \tag{3.50}$$

natomiast z 3.57 obie podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są tego samego typu. Zaczniemy od znalezienia rzutu F z $\widetilde{\mathcal{X}_1}$ na $\widetilde{\mathcal{X}_2}$, który wyznacza f.

Rozważmy przypadek, gdy podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ nie są rzutowe. W tej sytuacji mamy $\widetilde{\mathcal{X}_i} = \mathcal{X}_i'$ z (3.50) i 3.25, a więc F_0 jest rzutem z $\widetilde{\mathcal{X}_1}$ na $\widetilde{\mathcal{X}_2}$. Zatem bierzemy $F := F_0$.

Gdy $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są podprzestrzeniami rzutowymi, to bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, że są to α-odcinki. Wówczas $\widetilde{\mathcal{X}_i} = [W_i, Y_i]$, gdzie $W_i = Z_i + (W \cap Y_i)$, zgodnie z (3.50) i 3.25. Zaobserwujmy, że $W_i \in \mathcal{X}_i'$. Rozważmy odcinki $\mathcal{E}_i := [W_i, Y_i]$, gdzie $i = 1, 2$. Zauważmy, że $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}_i'$ oraz z (3.50)

$$\mathcal{E}_i \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) = \mathrm{Sub}_k(\mathcal{E}_i) = \widetilde{\mathcal{X}_i} = \mathcal{X}_i' \cap \mathcal{F}_{k,m}(W). \tag{3.51}$$

Z 3.59 mamy $F_0(W_1) = W_2$ i w konsekwencji $F_0(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2$, gdyż rzuty w kracie $\mathfrak{L}(V)$ są izomorfizmami krat. Na mocy 1.83 obcięcie $F := F_0|\mathcal{E}_1$ jest rzutem z odcinka $\mathcal{E}_1$ na $\mathcal{E}_2$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$.

Wykażemy, że F wyznacza f. Z (3.49) i (3.51) mamy

$$f = F_0|\mathcal{F}_{k,m}(W) = F_0|\mathcal{X}_1' \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) = F|\mathcal{F}_{k,m}(W)$$

oraz

$$f^{-1} = F_0^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W) = F_0^{-1}|\mathcal{X}_2' \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) = F^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W),$$

co z uwagi na definicję 3.46 oznacza, że F wyznacza f.

Do wykazania pozostaje, że F jest jedynym takim rzutem przy założeniu, że $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są semi-afiniczne lub rzutowe. Załóżmy, że F_1 jest rzutem w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczającym f. Rzuty F, F_1 spełniają warunek

$$F(U) = f(U) = F_1(U), \quad \text{dla wszystkich} \quad U \in \mathcal{X}_1. \tag{3.52}$$

Jeśli podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są rzutowe, to z 3.21 są one postaci k-odcinków. Stąd rzuty $F|\mathcal{X}_1$, $F_1|\mathcal{X}_1$ są rzutami między k-odcinkami w przestrzeni pęków $\mathfrak{P}$, nad którą określona jest przestrzeń jeżowa $\mathfrak{A}$. Z 2.14 oraz (3.52) mamy $F = F_1$.

W przypadku, gdy $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są podprzestrzeniami semi-afinicznymi, to odpowiadające im przestrzenie jeżowe $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ (por. 3.12) zgodnie z 3.18 i 3.19 są przestrzeniami liniowych uzupełnień. Można więc domknąć jednoznacznie $\mathfrak{A}_i$ do przestrzeni pęków, $\mathfrak{P}_i$ nad którą $\mathfrak{A}_i$ jest określona (por. [13]).

Zgodnie z 3.52 i (3.48) mamy

$$F(g^\infty) = f^\infty(g^\infty) = F_1(g^\infty).$$

Zauważmy, że $f_1 = f \cup f^\infty$, gdzie odwzorowania f i f^∞ traktujemy jako zbiory par, jest jednoznacznie wyznaczoną kolineacją między rzutowymi domknięciami $\mathrm{Cl}(A_1)$ i $\mathrm{Cl}(A_2)$. W następnym kroku, analogicznie możemy rozważać $f_2 = f_1 \cup f_1^\infty$ jako kolineację $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(\mathfrak{A}_1))$ na $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(\mathfrak{A}_2))$. Kontynuując procedurę rzutowego domykania przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}_i$, do momentu, gdy $\mathfrak{A}_i$ rozszerzymy do przestrzeni pęków $\mathfrak{P}_i$, uzyskamy jednoznacznie wyznaczoną kolineację $\overline{f}$ z $\mathfrak{P}_1$ na $\mathfrak{P}_2$ spełniającą warunek

$$F(U) = \overline{f}(U) = F_1(U), \quad \text{dla wszystkich} \quad U \in \mathrm{Sub}_k(\widetilde{\mathcal{X}_1}).$$

W konsekwencji, z 2.14 uszykujemy $F = F_1$. □

Jako wniosek z udowodnionego właśnie twierdzenia oraz 3.59 zanotujmy

Stwierdzenie 3.62. *Jeśli $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są niepustymi podprzestrzeniami odcinkowymi w $\mathfrak{A}$ i istnieje rzut z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ w $\mathfrak{A}$, to podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są współpękowe w $\mathfrak{A}$.*

Dowód. Niech $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_{\mathcal{F}}$ oraz $W_i := Z_i + (W \cap Y_i)$. Skoro istnieje rzut f z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ w $\mathfrak{A}$, to z 3.61 istnieje rzut F w $\mathfrak{L}(V)$ z $\widetilde{\mathcal{X}_1}$ na $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ wyznaczający f. Stąd, odcinki $\widetilde{\mathcal{X}_1}$, $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ leżą w pewnym pęku G w $\mathfrak{L}(V)$. Zgodnie z definicją pęku podprzestrzeni odcinkowych w $\mathfrak{A}$, a mianowicie 3.33, musimy wykazać, że $\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2} \in \widehat{\mathsf{G}}$.

Gdyby $]Z_1, Y_1[\cap \mathcal{F}_{k,m}(W) = \emptyset$, to z niepustości $\mathcal{X}_1$, albo $\mathcal{X}_1 = \{Z_1\}$, albo $\mathcal{X}_1 = \{Y_1\}$. W pierwszym przypadku $\widetilde{\mathcal{X}_1} = [Z_1, Z_1]$ z 3.23. Ponieważ $f(Z_1) = Z_2$, więc Z_1, Z_2 są elementami właściwymi prostej $\overline{Z_1, Z_2}$ i w konsekwencji (3.6) $\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2} \in \widehat{\mathsf{G}}$. Analogicznie rozumuje się gdy $\mathcal{X}_1 = \{Y_1\}$.

Możemy zatem przyjąć, że $]Z_1, Y_1[\cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \neq \emptyset$. Z uwagi na 3.25 oraz 3.57 do rozważenia są trzy przypadki: $\widetilde{\mathcal{X}_i} = [W_i, Y_i]$, $\widetilde{\mathcal{X}_i} = [Z_i, W_i]$ lub $\widetilde{\mathcal{X}_i} = [Z_i, Y_i]$. Weźmy $U \in \mathcal{X}_1$. W każdym z trzech przypadków $U, W_1 \in \widetilde{\mathcal{X}_1}$, więc $U \cap W_1 \sim F(U \cap W_1)$. Zatem, z 3.59 otrzymujemy

$$\dim U \cap W_1 = \dim F(U \cap W_1) = \dim F(U) \cap W_2.$$

Po przeliczeniu wymiarów, wykorzystując fakt 3.10(i), uzyskujemy równość

$$\dim \operatorname{Trc} Z_1 = \dim \operatorname{Trc} Z_2. \tag{3.53}$$

Podobnie $U + W_1 \sim F(U + W_1)$, skąd w analogiczny sposób jak wyżej otrzymujemy

$$\dim \operatorname{Trc} Y_1 = \dim \operatorname{Trc} Y_2. \tag{3.54}$$

Z 3.11 $\operatorname{Trc} W_i = \operatorname{Trc} Y_i$, więc z (3.54) mamy

$$\dim \operatorname{Trc} W_1 = \dim \operatorname{Trc} W_2.$$

Stąd oraz z (3.53), (3.54), 3.7 i (3.6) mamy $\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2} \in \widehat{\mathsf{G}}$, co należało pokazać. □

Udowodnimy teraz ogólne kryterium na to kiedy rzut w kracie wyznacza rzut w przestrzeni jeżowej.

Twierdzenie 3.63. *Niech G będzie pękiem odcinków w $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W, odcinki $[Z_1, Y_1]$, $[Z_2, Y_2]$ będą elementami $\widehat{\mathsf{G}}$ takimi, że $]Z_1, Y_1[\cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \neq \emptyset$ i niech F będzie rzutem z odcinka $[Z_1, Y_1]$ na $[Z_2, Y_2]$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $F(Z_1 + (W \cap Y_1)) = Z_2 + (W \cap Y_2)$,

(2) $\operatorname{Trc} U_1 = \operatorname{Trc} U_2$ *wtw., gdy* $\operatorname{Trc} F(U_1) = \operatorname{Trc} F(U_2)$ *oraz* $\operatorname{Ctr} U_1 = \operatorname{Ctr} U_2$ *wtw., gdy* $\operatorname{Ctr} F(U_1) = \operatorname{Ctr} F(U_2)$ *dla* $U_1, U_2 \in [Z_1, Y_1]$,

(3) *F wyznacza rzut w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$.*

Uwaga. Wszystkie implikacje z wyjątkiem (3) $\Longrightarrow$ (1), (2) pozostają prawdziwe przy słabszym założeniu $[Z_1, Y_1]_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ zamiast $]Z_1, Y_1[\cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \neq \emptyset$.

Dowód. Oznaczmy $f := F|\mathcal{F}_{k,m}(W)$, $g := F^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W)$, $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_{\mathcal{F}}$ oraz $W_i := Z_i + (W \cap Y_i)$. Zauważmy, że $W_i \in [Z_i, Y_i]$, ponadto z modularności kraty $\mathfrak{L}(V)$ mamy $W_i = (Z_i + W) \cap Y_i$.

(1) $\Longrightarrow$ (2):

Weźmy $U_1, U_2 \in [Z_1, Y_1]$ i załóżmy, że $\operatorname{Trc} U_1 = \operatorname{Trc} U_2$. Na mocy 3.10(ii) mamy $U_1 \cap W_1 = U_2 \cap W_1$. Z założenia, że $F(W_1) = W_2$ oraz faktu, że F jest izomorfizmem krat (por. 1.78) otrzymujemy

$$F(U_1) \cap W_2 = F(U_1) \cap F(W_1) = F(U_1 \cap W_1) = F(U_2 \cap W_1) = \\ = F(U_2) \cap F(W_1) = F(U_2) \cap W_2.$$

Zatem z 3.10(ii) mamy $\operatorname{Trc} F(U_1) = \operatorname{Trc} F(U_2)$. Pokazaliśmy, że jeśli ślady elementów U_1, U_2 są takie same to, również ślady ich obrazów przy rzucie F są takie same. Gdy więc za F weźmiemy F^{-1}, które też jest rzutem, to otrzymamy implikację odwrotną w dowodzonej równoważności.

Dla $\operatorname{Ctr} U_1, \operatorname{Ctr} U_2$ rozumowanie jest dualne.

(2) $\implies$ (1):

Z 3.11 mamy $\operatorname{Trc} W_1 = \operatorname{Trc} Y_1$, zatem zgodnie z warunkiem (2) $\operatorname{Trc} F(W_1) = \operatorname{Trc} F(Y_1)$, co z kolei dzięki 3.10(ii) daje $F(W_1) \cap W_2 = F(Y_1) \cap W_2$. Stąd, jeśli uwzględnimy 1.80 otrzymamy

$$F(W_1) \cap W_2 = F(Y_1) \cap W_2 = Y_2 \cap W_2 = W_2,$$

co oznacza, że $W_2 \subseteq F(W_1)$.

Ponieważ na podstawie 3.11 mamy $\operatorname{Ctr} W_1 = \operatorname{Ctr} Z_1$, więc z (2) uzyskujemy $\operatorname{Ctr} F(W_1) = \operatorname{Ctr} F(Z_1)$. Teraz z 3.10(iii) mamy $F(W_1) + W_2 = F(Z_1) + W_2$, co z uwagi na 1.80 daje

$$F(W_1) + W_2 = F(Z_1) + W_2 = Z_2 + W_2 = W_2.$$

Zatem $F(W_1) \subseteq W_2$ i w rezultacie $F(W_1) = W_2$.

(1) $\implies$ (3):

Założenie mówi, że $F(W_1) = W_2$. Zgodnie z 3.49 do wykazania są inkluzje $\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$.

Ponieważ $\operatorname{dm}(f) = \mathcal{X}_1 \neq \emptyset$, weźmy więc $U_1 \in \operatorname{dm}(f)$ i oznaczmy $U_2 := F(U_1)$. Mamy więc $U_1 \in \mathcal{X}_1$ i $U_2 \in [Z_2, Y_2]$. Z określenia rzutu $U_1 \sim U_2$, zatem $\dim U_2 = k$. Ponieważ F jest izomorfizmem krat, więc

$$F(U_1 \cap W_1) = F(U_1) \cap F(W_1) = U_2 \cap W_2.$$

Stąd i z określenia rzutu wynika, że $U_1 \cap W_1 \sim U_2 \cap W_2$, skąd otrzymujemy równość

$$\dim U_1 \cap W_1 = \dim U_2 \cap W_2. \tag{3.55}$$

Korzystając z 3.10(i) uzyskujemy $U_i \cap W_i = Z_i + (U_i \cap W)$. Zatem

$$\dim(U_i \cap W_i) = \dim Z_i + \dim \operatorname{Trc} U_i - \dim(Z_i \cap U_i \cap W) = \\ \dim Z_i + \dim \operatorname{Trc} U_i - \dim \operatorname{Trc} Z_i.$$

Podstawiając do (3.55) i uwzględniając, że $Z_1 \sim Z_2$, czyli $\dim Z_1 = \dim Z_2$, otrzymujemy równanie

$$m - \dim \operatorname{Trc} Z_1 = \dim \operatorname{Trc} U_2 - \dim \operatorname{Trc} Z_2. \tag{3.56}$$

Z założenia odcinki $[Z_i, Y_i]$ są nieosobliwe w pęku G, więc albo $Z_1 = Z_2$, albo Z_1, Z_2 są elementami właściwymi na prostej $\overline{Z_1, Z_2}$. W obu przypadkach mamy

$\operatorname{Trc} Z_1 \sim \operatorname{Trc} Z_2$ zgodnie z 3.2 i 3.1(vi). Zatem (3.56) daje $\dim \operatorname{Trc} U_2 = m$, co oznacza, że $U_2 \in \mathcal{F}_{k,m}(W)$. Ponadto $U_2 = F(U_1) = f(U_1)$, zatem $U_2 \in \operatorname{rg}(f)$. Z dowolności wyboru U_1 mamy $\operatorname{rg}(f) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$.

Odwzorowaniu F^{-1} przysługują te same własności co rzutowi F, więc rozumując analogicznie można wykazać, że $\operatorname{rg}(g) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$.

(3) $\implies$ (1):

Bezpośredni wniosek z 3.59. □

Zwróćmy uwagę na związek jaki występuje pomiędzy odcinkiem $[Z_1, Y_1]$, na którym określony jest rzut F, a przestrzenią jeżową $\mathfrak{A}$ w powyższym twierdzeniu. Otóż, twierdzenie 3.63 można odczytać w ten sposób, że jeśli rzut F wyznacza rzut w pewnej przestrzeni jeżowej, to wyznacza rzuty we wszystkich przestrzeniach jeżowych których uniwersa kroją się z odcinkiem otwartym $]Z_1, Y_1[$ niepusto. Jest to konsekwencją faktu, że warunki (1) i (2) nie zależą od wyboru przestrzeni jeżowej.

Inny, istotny wniosek jaki płynie z 3.63 to

LEMAT 3.64. *Niech* G *będzie pękiem odcinków w* $\mathfrak{L}(V)$ *z ustalonym* W*, odcinki* $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$ $(i = 1, 2)$ *będą elementami* $\widehat{\mathsf{G}}$ *takimi, że* $[Z_1, Y_1]_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ *oraz niech* F *będzie rzutem z odcinka* $\mathcal{X}_1$ *na* $\mathcal{X}_2$*. Jeśli* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *leżą w pęku właściwym i*

$$Z_1 + (W \cap Y_1) = Z_2 + (W \cap Y_2),$$

lub $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *leżą w waflu, ale nie* $\alpha\backslash\omega$*-waflu, to rzut* F *wyznacza rzut w przestrzeni jeżowej* $\mathfrak{A}$*.*

DOWÓD. Niech $W_i := Z_i + (W \cap Y_i)$. Jeśli $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ leżą w pęku właściwym, i $W_1 = W_2$, to $W_1 \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$, z uwagi na to, że $W_i \in \mathcal{X}_i$. Zatem $F(W_1) = W_1 = W_2$ i z 3.63 rzut F wyznacza rzut w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$.

Jeśli natomiast $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ leżą w waflu, to F jest ślizgiem i z 3.30 mamy $W_1 \sim W_2$. Zatem $F(W_1) = W_2$ i z 3.63 rzut F wyznacza rzut w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$. □

Przyjrzyjmy się dokładniej pękowi właściwemu i uogólnionemu rzutowi środkowemu między jego elementami.

LEMAT 3.65. *Niech* G *będzie pękiem odcinków w* $\mathfrak{L}(V)$ *z ustalonym* W*, odcinki* $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$ $(i = 1, 2, 3)$ *będą elementami* $\widehat{\mathsf{G}}$ *takimi, że* $[Z_1, Y_1]_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ *oraz niech* $F = \overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\updownarrow \mathcal{Y}}}$*, gdzie* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}_3$*. Jeśli* $Z_3 + (W \cap Y_3) \in \mathcal{Y}$*, to* F *wyznacza rzut w przestrzeni jeżowej* $\mathfrak{A}$*.*

DOWÓD. Jeśli odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są elementami nieosobliwymi pęku właściwego G, to zgodnie z 3.28 i 3.29 elementy W_i są albo równe, albo sąsiednie w zależności od rodzaju pęku. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że G jest typu gwiazda, czyli $\mathsf{G} = \{Z\} \boxtimes q$ dla pewnej prostej q w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Gdy q jest α-prostą lub prostą afiniczną, to $W_1 = W_2$ i tak jak to zostało powiedziane w 3.64 wszystkie rzuty z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczają rzuty we wszystkich przestrzeniach jeżowych, których uniwersa kroją się niepusto z $\mathcal{X}_1$.

W przypadku gdy q jest ω-prostą, to z 3.2 mamy $\mathsf{G} = \widehat{\mathsf{G}}$ i z 3.29 wszystkie elementy postaci $Z + (W \cap Y)$, gdzie $[Z, Y] \in \mathsf{G}$, leżą na jednej prostej p. Zauważmy, że jeśli weźmiemy dowolny rzut $F = \overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\updownarrow \mathcal{Y}}}$, gdzie $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}_3 = [Z, Y_3]$, to element $W_3 = Z + (W \cap Y_3)$ również leży na prostej p. Zatem, jeśli $W_3 \in \mathcal{Y}$, to zgodnie z określeniem uogólnionego rzutu środkowego w kracie $\mathfrak{L}(V)$, mamy $F(W_1) = W_2$, a co za tym idzie z uwagi na 3.63, rzut F wyznacza rzut w $\mathfrak{A}$. □

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 3.66. *Niech* G *będzie pękiem odcinków w* $\mathfrak{L}(V)$ *z ustalonym elementem* W*, odcinki* $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$ $(i = 1, 2)$ *będą elementami* $\widehat{\mathsf{G}}$ *takimi, że* $]Z_1, Y_1[\cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \neq \emptyset$ *i niech* F *będzie rzutem z odcinka* $\mathcal{X}_1$ *na* $\mathcal{X}_2$*. Rzut* F *wyznacza rzut w przestrzeni* $\mathfrak{A}$ *wtw., gdy*

(i) $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *leżą w waflu różnym od* $\alpha\backslash\omega$*-wafla, albo*

(ii) $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *leżą w pęku właściwym* G *i spełniony jest jeden z warunków:*

(a) $Z_1 + (W \cap Y_1) = Z_2 + (W \cap Y_2)$,

(b) $F = \overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\updownarrow \mathcal{Y}}}$ *dla pewnych odcinków* $\mathcal{Y}, \mathcal{X}_3$ *takich, że* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$ *oraz* $Z_3 + (W \cap Y_3) \in \mathcal{Y}$*.*

Dowód. Oznaczmy $W_i := Z_i + (W \cap Y_i)$.

$\Rightarrow$: Z definicji rzutu w kracie $\mathfrak{L}(V)$ albo $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ leżą w waflu i z 3.60 spełnione jest (i), albo w pęku właściwym G. Bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, że G jest typu gwiazda, to znaczy $\mathsf{G} = \{Z\} \boxtimes q$. Wówczas $F = \overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\updownarrow \mathcal{Y}}}$ dla pewnych $\mathcal{Y}, \mathcal{X}_3$ takich, że $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$. Jeśli q jest α-prostą lub prostą afiniczną, to z 3.29 mamy $W_1 = W_2$ czyli prawdziwe jest (a). Jeśli natomiast q jest ω-prostą, to zauważmy, że $\mathsf{G} = \widehat{\mathsf{G}}$ z 3.2 i (3.6), a z 3.29 zbiór

$$\mathcal{W} = \{Z + (W \cap Y) \colon [Z, Y] \in \mathsf{G}\}$$

jest prostą. Skoro rzut F wyznacza rzut w $\mathfrak{A}$, to z 3.59 mamy $F(W_1) = W_2$. Na mocy definicji uogólnionego rzutu środkowego 1.76 oznacza to, że prosta przez W_1, W_2, czyli $\mathcal{W}$, przecina $\mathcal{Y}$. Zatem $W_3 \in \mathcal{Y}$ i spełnione jest (b).

$\Leftarrow$: Bezpośredni wniosek z 3.64 oraz 3.65. $\square$

W ten sposób uzyskaliśmy odpowiedź na postawione wcześniej pytanie o kryteria jakie muszą spełniać podprzestrzenie odcinkowe, aby istniał między nimi rzut w przestrzeni jeżowej.

Jak się okazuje typ prostej wierzchołków i prostej podstaw odcinków leżących w pęku w decydujący sposób wpływa na ślady i koślady punktów i ich obrazów przy rzucie w tym pęku.

Stwierdzenie 3.67. *Niech* F *będzie rzutem z odcinka* $\mathcal{X}_1$ *na* $\mathcal{X}_2$ *w* $\mathfrak{L}(V)$*.*

(i) *Jeśli* $Y_1 \neq Y_2$ *i* $\operatorname{Trc} Y_1 = \operatorname{Trc} Y_2$*, to dla* $U \in \mathcal{X}_1$ *mamy* $\operatorname{Trc} U = \operatorname{Trc} F(U)$*.*

(ii) *Jeśli* $Z_1 \neq Z_2$ *i* $\operatorname{Ctr} Z_1 = \operatorname{Ctr} Z_2$*, to dla* $U \in \mathcal{X}_1$ *mamy* $\operatorname{Ctr} U = \operatorname{Ctr} F(U)$*.*

W obu przypadkach F *wyznacza rzut w przestrzeni* $\mathfrak{A}$ *o ile* $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \neq \emptyset$*.*

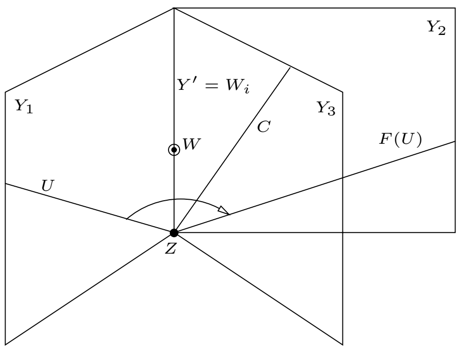
Dowód. (i) Niech $U \in \mathcal{X}_1$. Jeśli $F = \mathrm{id}$, to $F(U) = U$, a zatem $\operatorname{Trc} U = \operatorname{Trc} F(U)$.

Załóżmy więc, że $F \neq \mathrm{id}$. Rozważmy odcinek $\mathcal{E}_1 = [U, Y_1]$ i oznaczmy $\mathcal{E}_2 = F(\mathcal{E}_1)$. Z 1.83 mamy albo $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, albo $\overline{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$ jest pękiem odcinków i $F|(\mathcal{E}_1)$ rzutem z $\mathcal{E}_1$ na $\mathcal{E}_2$. Zatem zgodnie z 1.80 mamy $\mathcal{E}_2 = [F(U), F(Y_1)]$. Ponieważ F jest rzutem z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$, więc z 1.80 mamy $F(Y_1) = Y_2$, a więc $\mathcal{E}_2 = [F(U), Y_2]$. Z 3.9(ii) i z założenia $\operatorname{Trc} Y_1 = \operatorname{Trc} Y_2$ mamy $\operatorname{Trc} U = \operatorname{Trc} F(U)$.

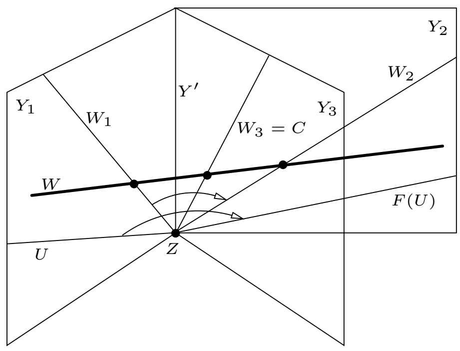
Teraz rozważmy $U \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{F}_{k,m}(W)$. Ponieważ $F(U) \sim U$ i $\dim U = k$, więc $\dim F(U) = k$. Z udowodnionej wyżej własności F mamy $\dim \operatorname{Trc} F(U) = m$, zatem $F(U) \in \mathcal{F}_{k,m}(W)$ i w rezultacie $\operatorname{rg}(F|\mathcal{F}_{k,m}(W)) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$. Wynik ten możemy zaaplikować w stosunku do rzutu F^{-1} i dostaniemy $\operatorname{rg}(F^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W)) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$. Dlatego też, zgodnie z 3.49 rzut F wyznacza rzut w $\mathfrak{A}$, co było do okazania.

(ii) Dualnie do (i). $\square$

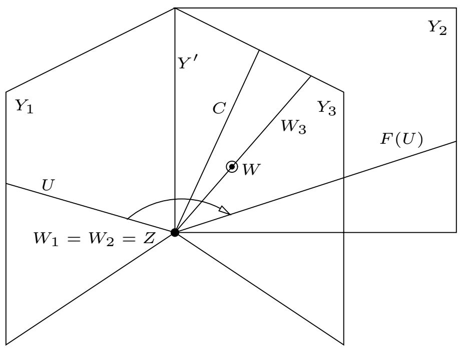
Przedstawimy teraz przykłady rzutów kratowych wyznaczających rzuty w przestrzeniach jeżowych. Bierzemy pod uwagę wszystkie możliwe typy pęków (por. tab. 3.13). Przestrzeń jeżowa w jakiej te rzuty rozpatrujemy to przestrzeń pęków prostych w trójwymiarowej przestrzeni rzutowej z usuniętą podprzestrzenią W, czyli $\mathfrak{A}_0 = \mathbf{A}_{2,0}(V, W)$, gdzie $\dim V = 4$. Przyjmujemy standardowe oznaczenia: $[Z_i, Y_i]$ są współpękowymi odcinkami kraty wyznaczającymi podprzestrzenie $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_{\mathcal{F}}$ w $\mathfrak{A}_0$, $W_i = Z_i + (W \cap Y_i)$, C jest środkiem rzutu w przypadku rzutów środkowych.



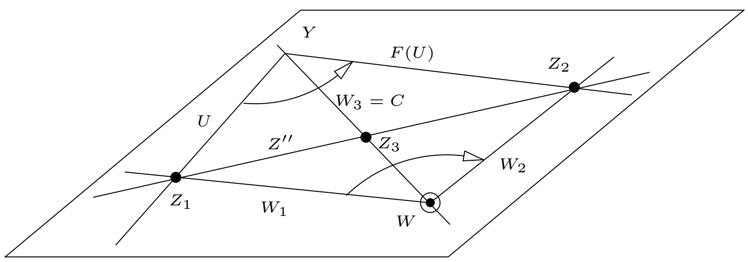
Rysunek 3.14: Rzut w pęku typu pt\α



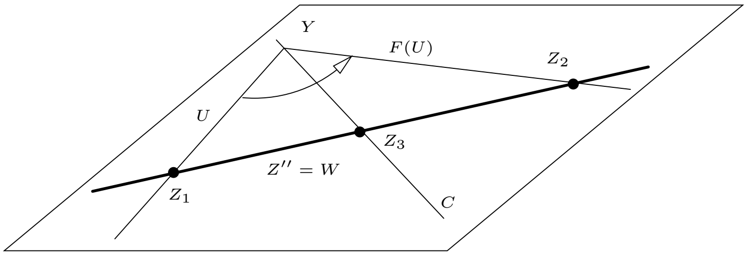
Rysunek 3.15: Rzut w pęku typu pt\ω



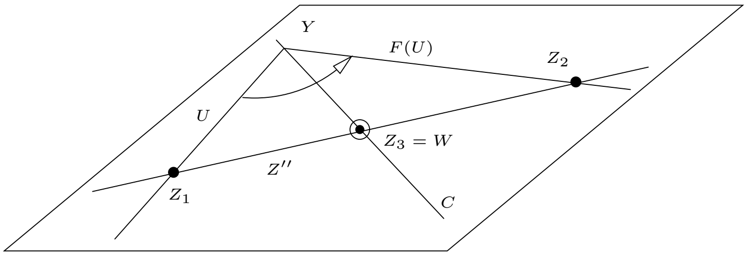
Rysunek 3.16: Rzut w pęku typu pt\af



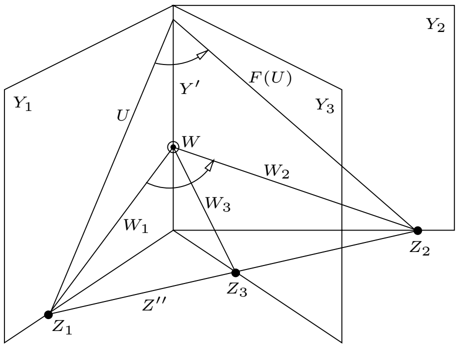
Rysunek 3.17: Rzut w pęku typu α\pt



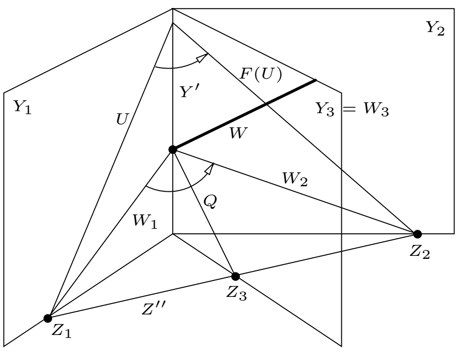
Rysunek 3.18: Rzut w pęku typu $\omega\backslash$pt



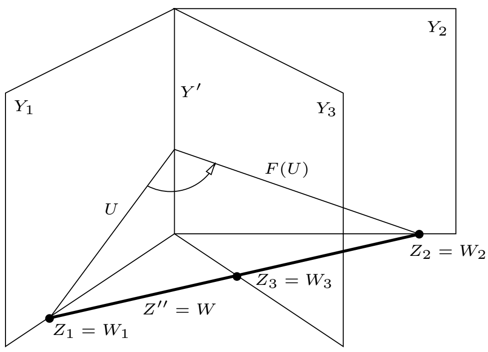
Rysunek 3.19: Rzut w pęku typu af$\backslash$pt



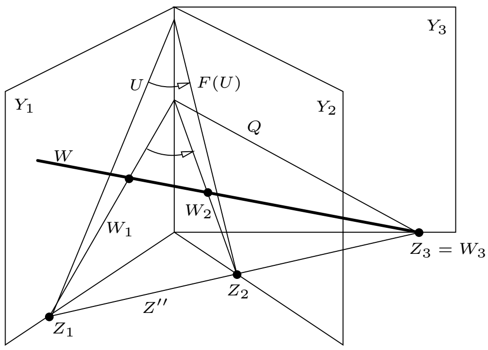
Rysunek 3.20: Rzut w pęku typu $\alpha\backslash\alpha$



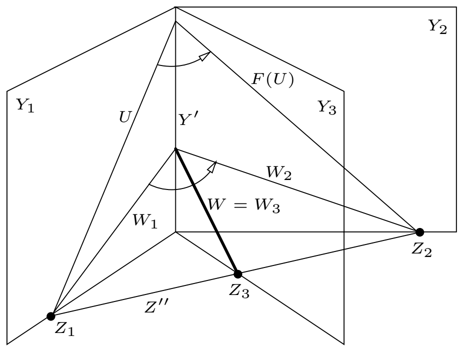
Rysunek 3.21: Rzut w pęku typu $\alpha\backslash$af



Rysunek 3.22: Rzut w pęku typu $\omega\backslash\omega$



Rysunek 3.23: Rzut w pęku typu af$\backslash\omega$



Rysunek 3.24: Rzut w pęku typu af$\backslash$af

Możemy teraz zebrać uzyskane wyniki dotyczące rzutów w przestrzeniach jeżowych w tabeli, analogicznie jak to zrobiliśmy w przypadku pęków podprzestrzeni odcinkowych (por. tab. 3.13).

$\zeta\backslash\eta$	pt	α	ω	af
pt	$\times$	tak, por. 3.67	gdy $F(W_1) = W_2$	tak, por. 3.67
ω	tak, por. 3.67	$\times$	tak, por. 3.67	$\times$
α	gdy $F(W_1) = W_2$	tak, por. 3.67	brak, por. 3.60	tak, por. 3.64
af	tak, por. 3.67	$\times$	tak, por. 3.64	tak, por. 3.64

Tabela 3.14: Zestawienie możliwości obcinania rzutów w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ wyznaczonych przez rzut F w kracie $\mathfrak{L}(V)$, ze względu na pęki podprzestrzeni odcinkowych w $\mathfrak{A}$.

Na podstawie dokonanej analizy rzutów w przestrzeniach jeżowych nasuwa się następujący wniosek: aby rzut F określony w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczał rzut w przestrzeni jeżowej musi być rzutem z odcinka nieosobliwego, na odcinek nieosobliwy w pęku odcinków w $\mathfrak{L}(V)$, nie może być ślizgiem w $\alpha\backslash\omega$-waflu, a w pękach typu $\alpha\backslash$pt oraz pt$\backslash\omega$ obrazem W_1 przy F musi być W_2. W przypadku uogólnionego rzutu środkowego nie nakłada się żadnego ograniczenia na środek rzutu. W szczególności może on leżeć w odcinku osobliwym pęku odcinków kraty. Zwróćmy uwagę na fakt, że zgodnie z tabelą 3.14 w pękach typu af$\backslash\eta$ oraz $\zeta\backslash$af, czyli w tych pękach gdzie występują odcinki osobliwe, wszystkie rzuty kratowe F wyznaczają rzuty w przestrzeni jeżowej. Natomiast w przypadku pęków $\alpha\backslash$pt, pt$\backslash\omega$, gdzie na rzut F nakłada się dodatkowe wymagania aby wyznaczał rzut w przestrzeni $\mathfrak{A}$, nie ma odcinków osobliwych. Tak więc to, czy uogólniony rzut środkowy F w kracie wyznacza rzut w przestrzeni jeżowej, nie zależy od tego czy środek rzutu F wybierzemy w odcinku osobliwym, czy też nie. Decydują o tym inne własności rzutu F i pęku, na którym jest określony.

3.6.1 Rzuty w przestrzeni śladów i kośladów

Tak jak w [19] przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ przyporządkowujemy *przestrzeń śladów* $\operatorname{Trc}\mathfrak{A}$, która jest przestrzenią pęków o zbiorze punktów $\operatorname{Trc}(\mathcal{F}_{k,m}(W))$ oraz *przestrzeń kośladów* $\operatorname{Ctr}\mathfrak{A}$, która jest przestrzenią pęków o zbiorze punktów $\operatorname{Ctr}(\mathcal{F}_{k,m}(W))$. Zgodnie z [19] mamy $\operatorname{Trc}\mathfrak{A} = \mathbf{P}_m(W)$ oraz $\operatorname{Ctr}\mathfrak{A} \cong \mathbf{P}_{k-m}(V/W)$.

Kilkakrotnie odwołujemy się do pewnej własności środka uogólnionego rzutu środkowego, której dowód teraz przedstawimy.

Lemat 3.68. *Niech* $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$ $(i = 1, 2)$ *będą różnymi odcinkami leżącymi w pęku* G *w kracie* $\mathfrak{L}(V)$ *z ustalonym* W *i niech* F *będzie uogólnionym rzutem środkowym z* $\mathcal{X}_1$ *na* $\mathcal{X}_2$ *takim, że* $F = \underset{\mathcal{X}_2}{\overset{\mathcal{X}_1}{\updownarrow \mathcal{Y}}}$ *dla pewnego odcinka* $\mathcal{Y}$, *oraz* $F(W_1) = W_2$, *gdzie* $W_i = Z_i + (W \cap Y_i)$.

(i) *Jeśli* G *jest typu* $\mathrm{pt}\backslash\omega$, *to* $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$ *i* $\operatorname{Trc} Z \prec \operatorname{Trc} C$.

(ii) *Jeśli* G *jest typu* $\alpha\backslash\mathrm{pt}$, *to* $\mathcal{Y} = [Z_3, C]$ *i* $\operatorname{Ctr} C \prec \operatorname{Ctr} Y$.

Dowód. (i) Z założenia $\mathsf{G} = \{Z\} \boxtimes q$, gdzie $Z = Z_1 = Z_2$, a q jest ω-prostą w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Ponieważ $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$, więc z 3.2 mamy

$$\operatorname{Trc} Y_1 \neq \operatorname{Trc} Y_2, \quad \text{i} \quad \operatorname{Trc} Y_1 \sim \operatorname{Trc} Y_2. \tag{3.57}$$

Z 1.75(i) mamy $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$ dla pewnych C, Y_3 takich, że $Z \prec C$, $Y_3 \in q$ oraz C, Y' uzupełniają się w odcinku $[Z, Y_3]$. Z założenia $F(W_1) = W_2$ i (1.57) prawdziwa jest równość

$$(Z + (W \cap Y_1) + C) \cap Y_2 = Z + (W \cap Y_2).$$

Po dodaniu do obu stron $C + (W \cap Y_1)$ otrzymujemy

$$C + (W \cap Y_1) = C + (W \cap Y_1) + (W \cap Y_2),$$

a stąd

$$W \cap Y_2 \subseteq C + (W \cap Y_1).$$

Po pomnożeniu obu stron przez W, z modularności dostaniemy

$$W \cap Y_2 \subseteq (C + (W \cap Y_1)) \cap W = (W \cap Y_1) + (C \cap W). \tag{3.58}$$

Ponieważ $Z \prec C$, więc z 1.1 mamy $Z \cap W \preceq C \cap W$. Gdyby $Z \cap W = C \cap W$, to $(W \cap Y_1) + (C \cap W) = W \cap Y_1$ i z (3.58) mielibyśmy $W \cap Y_2 \subseteq W \cap Y_1$, ale z (3.57) i 1.10 uzyskalibyśmy sprzeczność. Zatem $Z \cap W \prec C \cap W$, co było do okazania.

(ii) Dowód przebiega dualnie. □

Niech X, Y będą podzbiorami elementów kraty $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W i niech $F\colon X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem takim, że dla $U_1, U_2 \in X$ zachodzi

$$\text{jeśli } \operatorname{Trc} U_1 = \operatorname{Trc} U_2, \text{ to } \operatorname{Trc} F(U_1) = \operatorname{Trc} F(U_2). \tag{3.59}$$

Odwzorowanie F indukuje odwzorowanie $F_{\mathrm{Trc}}\colon \operatorname{Trc} X \longrightarrow \operatorname{Trc} Y$ dane następującą formułą

$$F_{\mathrm{Trc}}(\operatorname{Trc} U) = \operatorname{Trc} F(U) \text{ dla } U \in X. \tag{3.60}$$

Analogicznie jeśli odwzorowanie F spełnia warunek

$$\text{jeśli } \operatorname{Ctr} U_1 = \operatorname{Ctr} U_2, \text{ to } \operatorname{Ctr} F(U_1) = \operatorname{Ctr} F(U_2), \tag{3.61}$$

dla $U_1, U_2 \in X$, to indukuje ono odwzorowanie $F_{\mathrm{Ctr}}\colon \operatorname{Ctr} X \longrightarrow \operatorname{Ctr} Y$ dane formułą

$$F_{\mathrm{Ctr}}(\operatorname{Trc} U) = \operatorname{Ctr} F(U) \text{ dla } U \in X. \tag{3.62}$$

Dla quasi-pęku odcinków G w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W piszemy

$$\operatorname{Trc} \mathsf{G} = \{\operatorname{Trc} \mathcal{X}\colon \mathcal{X} \in \mathsf{G}\}, \tag{3.63}$$
$$\operatorname{Ctr} \mathsf{G} = \{\operatorname{Ctr} \mathcal{X}\colon \mathcal{X} \in \mathsf{G}\}. \tag{3.64}$$

Twierdzenie 3.69. *Niech G będzie pękiem odcinków w $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \widehat{\mathsf{G}}$ i niech F będzie rzutem z odcinka $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *F_{Trc} i F_{Ctr} są bijekcjami,*

(2) *dla k, m takich, że $]Z_1, Y_1[\cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \neq \emptyset$, gdzie $\mathcal{X}_1 = [Z_1, Y_1]_{\mathcal{F}}$, rzut F wyznacza rzut w przestrzeni jeżowej $\mathbf{A}_{k,m}(V, W)$.*

Gdy spełniony jest warunek (2) *oraz* $\operatorname{Trc} \mathcal{X}_1 \neq \operatorname{Trc} \mathcal{X}_2$, *to F_{Trc} jest rzutem w $\mathfrak{L}(V)$, jeśli natomiast* $\operatorname{Trc} \mathcal{X}_1 = \operatorname{Trc} \mathcal{X}_2$, *to F_{Trc} jest permutacją. Podobnie, gdy spełniony jest warunek* (2) *oraz* $\operatorname{Ctr} \mathcal{X}_1 \neq \operatorname{Ctr} \mathcal{X}_2$, *to F_{Ctr} jest rzutem w $\mathfrak{L}(V)$, jeśli* $\operatorname{Ctr} \mathcal{X}_1 = \operatorname{Ctr} \mathcal{X}_2$, *to F_{Ctr} jest permutacją.*

Dowód. Niech $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$, $p := \overline{Z_1, Z_2}$, $q := \overline{Y_1, Y_2}$.

(1) $\Longrightarrow$ (2):

Zgodnie z założeniem F_{Trc} jest bijekcją, zatem równość $\operatorname{Trc} U_1 = \operatorname{Trc} U_2$ równoważna jest równości $F_{\mathrm{Trc}}(\operatorname{Trc} U_1) = F_{\mathrm{Trc}}(\operatorname{Trc} U_2)$. Z uwagi na (3.60) ostatnia równość równoważna jest $\operatorname{Trc} F(U_1) = \operatorname{Trc} F(U_2)$.

Analogicznie wykazać można równoważność równości $\operatorname{Ctr} U_1 = \operatorname{Ctr} U_2$ z równością $\operatorname{Ctr} F(U_1) = \operatorname{Ctr} F(U_2)$. W ten sposób pokazaliśmy, że prawdziwy jest warunek (2) w 3.63, co kończy rozumowanie.

(2) $\Longrightarrow$ (1):

Bezpośredni wniosek z 3.63.

Teraz załóżmy, że spełniony jest warunek (2). Zatem F_{Trc} jest bijekcją tak jak wykazaliśmy wyżej oraz

$$\operatorname{Trc} U \sim \operatorname{Trc} F(U) \text{ dla każdego } 9U \in \mathcal{X}_1. \tag{3.65}$$

Jeśli F jest uogólnionym rzutem środkowym takim, że $F = \overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\mathcal{Y}}}$, to zgodnie z określeniem tego rzutu (por. 1.76 i (1.57)) albo $U \in \mathcal{X}'$ i wtedy $U = F(U)$, albo $U \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ i istnieje $U_0 \in \mathcal{Y}$ takie, że $U, F(U), U_0$ leżą na jednej prostej, powiedzmy h. Zauważmy, że w ostatnim przypadku $\operatorname{Trc} U_0 \in \operatorname{Trc} \mathcal{Y} \cap \operatorname{Trc} h$. Zatem z 3.2 niezależnie od typu prostej h prawdziwe jest stwierdzenie

$$\operatorname{Trc} U = \operatorname{Trc} F(U) \quad \text{lub} \quad \overline{\operatorname{Trc} U, \operatorname{Trc} F(U)} \cap \operatorname{Trc} \mathcal{Y} \neq \emptyset \quad \text{dla każdego } U \in \mathcal{X}_1. \tag{3.66}$$

Zgodnie z założeniem, że odcinki $[Z_i, Y_i]$ są nieosobliwe w G, jeśli p jest prostą, to Z_1, Z_2 są jej elementami właściwymi. Podobnie, gdy q jest prostą, to Y_1, Y_2 są jej elementami właściwymi. W przypadku, gdy q jest α-prostą lub prostą afiniczną, to $Y_1 \neq Y_2$ i jednocześnie z 3.2 mamy $\operatorname{Trc} Y_1 = \operatorname{Trc} Y_2$. Zatem z 3.67(i) wynika, że

$\operatorname{Trc} U = \operatorname{Trc} F(U)$ dla $U \in \operatorname{dm}(F)$. Zgodnie z (3.60) mamy więc $\operatorname{Trc} U = F_{\operatorname{Trc}}(\operatorname{Trc} U)$ dla każdego $U \in \operatorname{dm}(F)$, co oznacza, że $F_{\operatorname{Trc}} = \operatorname{id}$.

Z uwagi na założenie, że F wyznacza rzuty w przestrzeniach jeżowych i 3.60 do rozważenia pozostają następujące typy pęku G:

(a) $\mathrm{pt}\backslash\omega$ — $|p| = 1$ i q jest ω-prostą,

(b) $\omega\backslash\omega$ — p i q są ω-prostymi,

(c) $\mathrm{af}\backslash\omega$ — p jest prostą afiniczną i q jest ω-prostą,

(d) $\alpha\backslash\mathrm{pt}$ — p jest α-prostą i $|q| = 1$,

(e) $\omega\backslash\mathrm{pt}$ — p jest ω-prostą i $|q| = 1$,

(f) $\mathrm{af}\backslash\mathrm{pt}$ — p jest prostą afiniczną i $|q| = 1$.

Jeśli $\operatorname{Trc} \mathcal{X}_1 = \operatorname{Trc} \mathcal{X}_2$, to F_{Trc} jest permutacją, gdyż F_{Trc} jest bijekcją oraz

$$\operatorname{dm}(F_{\operatorname{Trc}}) = \operatorname{Trc} \mathcal{X}_1 = \operatorname{rg}(F_{\operatorname{Trc}}).$$

Możemy w takim razie dalej założyć, że $\operatorname{Trc} \mathcal{X}_1 \neq \operatorname{Trc} \mathcal{X}_2$, skąd $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$.

W przypadku (a) zauważmy, że $\operatorname{Trc} \mathsf{G} = \{\operatorname{Trc} Z\} \boxtimes \operatorname{Trc} q$, gdzie $Z = Z_1 = Z_2$ oraz $\operatorname{Trc} q$ jest ω-prostą z 3.2. Zatem $\operatorname{Trc} \mathsf{G}$ jest pękiem właściwym. Z 3.68(i) dla F istnieje odcinek $\mathcal{Y}$ taki, że $F = \left\updownarrow\begin{smallmatrix}\mathcal{X}_1\\ \mathcal{Y}\\ \mathcal{X}_2\end{smallmatrix}\right.$, $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$ i $\operatorname{Trc} Z \prec \operatorname{Trc} C$. Zauważmy, że $\operatorname{Trc} Y' \prec \operatorname{Trc} Y_3$, gdyż $\operatorname{Trc} q$ jest prostą. Ponieważ $\operatorname{Trc} \mathcal{X}' = [\operatorname{Trc} Z, \operatorname{Trc} Y']$ oraz $\operatorname{Trc} \mathcal{Y} = [\operatorname{Trc} C, \operatorname{Trc} Y_3]$, więc odcinki $\operatorname{Trc} \mathcal{X}'$, $\operatorname{Trc} \mathcal{Y}$ są kowymiaru 1 w odcinku $\operatorname{Trc} \mathcal{X}_3 = [\operatorname{Trc} Z, \operatorname{Trc} Y_3]$. Z 1.75(i) mamy $C \cap Y' = Z$, skąd $\operatorname{Trc} C \cap \operatorname{Trc} Y' = \operatorname{Trc} Z$. Zgodnie z 1.23 odcinki $\operatorname{Trc} \mathcal{X}'$, $\operatorname{Trc} \mathcal{Y}$ są komplementarne, kowymiaru 1 w odcinku $\operatorname{Trc} \mathcal{X}_3$, więc $F_0 := \left\updownarrow\begin{smallmatrix}\operatorname{Trc}\mathcal{X}_1\\ \operatorname{Trc}\mathcal{Y}\\ \operatorname{Trc}\mathcal{X}_2\end{smallmatrix}\right.$ jest uogólnionym rzutem środkowym w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Na mocy (3.66) mamy $F_{\operatorname{Trc}} = F_0$.

W przypadku (b) pęk G jest waflem. Z uwagi na 3.2 $\operatorname{Trc} \mathsf{G}$ jest quasi-pękiem. Zauważmy jednak, że $Z'' \cap Y' = Z'$ z 1.41. Po obustronnym pomnożeniu tej równości przez W otrzymujemy

$$\operatorname{Trc} Z'' \cap \operatorname{Trc} Y' = Z'' \cap W \cap Y' \cap W = Z' \cap W = \operatorname{Trc} Z',$$

więc $\operatorname{Trc} \mathsf{G}$ jest waflem zgodnie z 1.41. Z (3.65) odwzorowanie F_{Trc} jest ślizgiem.

W przypadku (c) z 3.2 i 3.1(vi) mamy $\operatorname{Trc} p = [\operatorname{Trc} Z', \operatorname{Trc} Z'']$, przy czym $\operatorname{Trc} Z' = \operatorname{Trc} Z_1 = \operatorname{Trc} Z_2$, $\operatorname{Trc} Z'' = \operatorname{Trc} p^\infty$ i $\operatorname{Trc} p$ jest łańcuchem długości 1. Ponadto $\operatorname{Trc} q$ jest ω-prostą. Ponieważ $\operatorname{Trc} Z' \subseteq \operatorname{Trc} Z'' \subseteq \operatorname{Trc} Y_0$, gdzie Y_0 jest elementem na prostej q, takim że $\mathsf{G}^\infty = [p^\infty, Y_0]$. Zatem $\operatorname{Trc} \mathsf{G} = \{\operatorname{Trc} Z'\} \boxtimes \operatorname{Trc} q$ jest pękiem właściwym typu gwiazda. Zauważmy, że $\operatorname{Trc}(\mathsf{G}^\infty) = [\operatorname{Trc} Z'', \operatorname{Trc} Y_0]$ oraz $\operatorname{Trc} Z' \prec \operatorname{Trc} Z''$. Stąd $\operatorname{Trc}(\mathsf{G}^\infty)$ jest kowymiaru 1 w odcinku $[\operatorname{Trc} Z', \operatorname{Trc} Y_0]$. Z 1.26 i 1.14(i) mamy

$$\bigcap \operatorname{Trc} \mathsf{G} = \operatorname{Trc} \mathcal{X}_1 \cap \operatorname{Trc} \mathcal{X}_2 = [\operatorname{Trc} Z_1 + \operatorname{Trc} Z_2, \operatorname{Trc} Y_1 \cap \operatorname{Trc} Y_2] = [\operatorname{Trc} Z', \operatorname{Trc} Y'].$$

Stąd odcinek $\bigcap \operatorname{Trc} \mathsf{G}$ jest kowymiaru 1 w odcinku $[\operatorname{Trc} Z', \operatorname{Trc} Y_0]$, gdyż $\operatorname{Trc} q$ jest prostą i $\operatorname{Trc} Y' \prec \operatorname{Trc} Y_0$. Ponieważ $Z'' \cap Y' = Z'$ z 1.41, więc $\operatorname{Trc} Z'' \cap \operatorname{Trc} Y' = \operatorname{Trc} Z'$ i z 1.23 odcinki $\bigcap \operatorname{Trc} \mathsf{G}$ i $\operatorname{Trc}(\mathsf{G}^\infty)$ są komplementarne, kowymiaru 1 w odcinku $[\operatorname{Trc} Z', \operatorname{Trc} Y_0]$. Zatem $F_0 := \left\updownarrow\begin{smallmatrix}\operatorname{Trc}\mathcal{X}_1\\ \operatorname{Trc}(\mathsf{G}^\infty)\\ \operatorname{Trc}\mathcal{X}_2\end{smallmatrix}\right.$ jest uogólnionym rzutem środkowym.

Ponieważ w tym wypadku F jest ślizgiem, więc dla każdego $U \in \mathcal{X}_1$ istnieje element $U_0 \in \mathsf{G}^\infty$ taki, że $U, F(U), U_0$ leżą na jednej prostej h. Jeśli h jest α-prostą lub prostą afiniczną, to z 3.2, 3.1(vi) i (3.65) mamy $\operatorname{Trc} U = \operatorname{Trc} F(U) \in \bigcap \operatorname{Trc} \mathsf{G}$. W konsekwencji $F_{\mathrm{Trc}}(U) = \operatorname{Trc} U = F_0(\operatorname{Trc} U)$. Gdy natomiast h jest ω-prostą, to z 3.2 również $\operatorname{Trc} h$ jest prostą. Zatem $\operatorname{Trc} U, \operatorname{Trc} F(U)$ i $\operatorname{Trc} U_0$ leżą na jednej prostej $\operatorname{Trc} h$ oraz $\operatorname{Trc} U_0 \in \operatorname{Trc}(\mathsf{G}^\infty)$, stąd $F_{\mathrm{Trc}}(U) = F_0(\operatorname{Trc} U)$.

W sytuacji (d) i (f) mamy $\operatorname{Trc} \mathcal{X}_1 = \operatorname{Trc} \mathcal{X}_2$ więc F_{Trc} jest permutacją.

W przypadku (e) pęk G jest pękiem właściwym typu układ, czyli $Y_1 = Y_2 = Y$, a rzut F jest uogólnionym rzutem środkowym. Zgodnie z 1.75(ii) $F = \begin{smallmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{Y} \\ \mathcal{X}_2 \end{smallmatrix}$, gdzie $\mathcal{Y} = [Z_3, C]$, $Z_3 \subseteq C \prec Y$, $C \cap Z'' = Z_3$ i $C + Z'' = Y$. Jeśli do obu stron ostatniej równości dodamy W dostaniemy

$$C + W + Z'' + W = Y + W.$$

Ponieważ p jest tutaj ω-prostą, więc zgodnie z 3.2 $\operatorname{Ctr} Z_1 = \operatorname{Ctr} Z_2 = \operatorname{Ctr} Z''$. Stąd w powyższej równości, jeśli uwzględnimy fakt, że $\operatorname{Ctr} Z'' = \operatorname{Ctr} Z_3 \subseteq \operatorname{Ctr} C$ otrzymamy

$$\operatorname{Ctr} C = \operatorname{Ctr} Y. \tag{3.67}$$

Z uwagi na to, że $C \prec Y$ mamy $\operatorname{Trc} C \preceq \operatorname{Trc} Y$. Gdyby $\operatorname{Trc} C = \operatorname{Trc} Y$, to po dodaniu C do obu stron tej równości z modularności kraty i (3.67) dostaniemy

$$C = C + (W \cap Y) = (C + W) \cap Y = (Y + W) \cap Y = Y,$$

co przeczy $C \prec Y$. Tak więc $\operatorname{Trc} C \prec \operatorname{Trc} Y$. Ponadto mamy $\operatorname{Trc} Z_3 \prec \operatorname{Trc} Z''$, gdyż z 3.2 $\operatorname{Trc} p$ jest prostą. Zatem odcinki $\operatorname{Trc} \mathcal{X}' = [\operatorname{Trc} Z'', \operatorname{Trc} Y]$ oraz $\operatorname{Trc} \mathcal{Y}' = [\operatorname{Trc} Z_3, \operatorname{Trc} C]$ są kowymiaru 1 w odcinku $\operatorname{Trc} \mathcal{X}_3 = [\operatorname{Trc} Z_3, \operatorname{Trc} Y]$. Jeśli obie strony równości $C \cap Z'' = Z_3$ pomnożymy przez W, to otrzymamy $\operatorname{Trc} C \cap \operatorname{Trc} Z'' = \operatorname{Trc} Z_3$, co z 1.23 oznacza, że odcinki $\operatorname{Trc} \mathcal{X}'$ i $\operatorname{Trc} \mathcal{Y}'$ są komplementarne, kowymiaru 1 w odcinku $\operatorname{Trc} \mathcal{X}_3$. Ta obserwacja pozwala rozważać uogólniony rzut środkowy $F_0 := \begin{smallmatrix} \operatorname{Trc} \mathcal{X}_1 \\ \operatorname{Trc} \mathcal{Y} \\ \operatorname{Trc} \mathcal{X}_2 \end{smallmatrix}$. Z (3.65) mamy $F_{\mathrm{Trc}} = F_0$.

Dla F_{Ctr} dowód przebiega dualnie. $\square$

Niemal bezpośrednio z 3.69 wynika, że rzut F w kracie $\mathfrak{L}(V)$ wyznacza rzut w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ wtw., gdy F_{Trc} wyznacza rzut w przestrzeni śladów i F_{Ctr} wyznacza rzut w przestrzeni kośladów. Aby sprecyzować ten fakt udowodnimy najpierw następujący lemat.

Lemat 3.70. *Jeśli* $\mathcal{X} = [Z, Y]_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, *to*

(i) $\operatorname{Trc} \mathcal{X} = [\operatorname{Trc} Z, \operatorname{Trc} Y]_m$,

(ii) $\operatorname{Ctr} \mathcal{X} = [\operatorname{Ctr} Z, \operatorname{Ctr} Y]_d$.

Dowód. (i) $\subseteq$: Prawdziwość inkluzji wynika z 1.52 oraz faktu, że $\mathcal{X}$ jest zbiorem tych elementów odcinka $[Z, Y]$, których ślady mają wysokość m.

$\supseteq$: Niech $Q \in [\operatorname{Trc} Z, \operatorname{Trc} Y]_m$ i niech $W_0 = Z + (W \cap Y)$. Z założenia, że $\mathcal{X} \neq \emptyset$ mamy $Z \subseteq Y$ i stąd $W_0 \in [Z, Y]$. Możemy rozważać uzupełnienie U elementu W_0 względem odcinka $[Z, Y]$. Element U spełnia warunki

$$\text{(a)} \quad Z = U \cap W_0, \qquad \text{(b)} \quad Y = U + W_0. \tag{3.68}$$

Zgodnie z przyjętymi w (3.16) i (3.17) oznaczeniami mamy

$$\dim W_0 = z + m_y - m_z,$$

skąd razem z (3.68)

$$y = \dim(U + W_0) = \dim U + \dim W_0 - \dim(U \cap W_0) = \dim U + m_y - m_z,$$

a więc

$$\dim U = y - m_y + m_z.$$

Z założenia o niepustości $\mathcal{X}$ mamy $z \leqslant k \leqslant y$, $m_z \leqslant m \leqslant m_y$ oraz $d_z \leqslant d \leqslant d_y$. Stąd

$$z \leqslant k - m + m_z \leqslant y - m_y + m_z = \dim U.$$

W odcinku $[Z, U]$ możemy zatem wybrać element U_0 o wysokości $k - m + m_z$. Z (3.68)(a) po obustronnym wymnożeniu przez W otrzymamy $Z \cap W = U \cap W_0 \cap W$. Z 3.11 mamy $W_0 \cap W = Y$, więc

$$Z \cap W = U \cap Y \cap W = U \cap W.$$

Stąd

$$Z \cap W \subseteq U_0 \cap W \subseteq U \cap W = Z \cap W,$$

co oznacza, że $\operatorname{Trc} Z = \operatorname{Trc} U_0$. Ponieważ $Q \subseteq W$, więc

$$Q \cap U_0 = Q \cap W \cap U_0 = Q \cap \operatorname{Trc} Z = \operatorname{Trc} Z.$$

Zatem

$$\dim Q + U_0 = \dim Q + \dim U_0 - \dim Q \cap U_0 = m + k - m + m_z - m_z = k.$$

Z modularności kraty $\mathfrak{L}(V)$ oraz faktu, że $Q \subseteq W$ mamy

$$\operatorname{Trc}(Q + U_0) = (Q + U_0) \cap W = Q + (U_0 \cap W) = Q + \operatorname{Trc} Z = Q,$$

co oznacza, że $Q + U_0 \in \mathcal{X}$ oraz $\operatorname{Trc}(Q + U_0) = Q$, więc inkluzja jest prawdziwa.

(ii) Dualnie do (i). □

Twierdzenie 3.71. *Niech F będzie rzutem z odcinka $[Z_1, Y_1]$ na odcinek $[Z_2, Y_2]$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$ i niech $\mathcal{X}_i := [Z_i, Y_i]_{\mathcal{F}}$, $]Z_1, Y_1[\cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \neq \emptyset$, $\operatorname{Trc}([Z_1, Y_1]) \neq \operatorname{Trc}([Z_2, Y_2])$ oraz $\operatorname{Ctr}([Z_1, Y_1]) \neq \operatorname{Ctr}([Z_2, Y_2])$. Rzut F wyznacza rzut f z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ wtw., gdy spełnione są dwa warunki*

(i) *F_{Trc} jest rzutem w $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczającym rzut f_{Trc} z $\operatorname{Trc}(\mathcal{X}_1)$ na $\operatorname{Trc}(\mathcal{X}_2)$ w przestrzeni śladów $\operatorname{Trc}(\mathfrak{A})$ oraz*

(ii) *F_{Ctr} jest rzutem w $\mathfrak{L}(V)$ wyznaczającym rzut f_{Ctr} z $\operatorname{Ctr}(\mathcal{X}_1)$ na $\operatorname{Ctr}(\mathcal{X}_2)$ w przestrzeni kośladów $\operatorname{Ctr}(\mathfrak{A})$.*

DOWÓD. $\Rightarrow$: Załóżmy, że rzut F wyznacza rzut f z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$. Na mocy 3.63 i 3.69 F_{Trc} jest rzutem. Ponieważ F_{Trc} jest odwzorowaniem $\mathrm{Trc}([Z_1, Y_1])$ na $\mathrm{Trc}([Z_2, Y_2])$, więc jest rzutem w kracie $\mathfrak{L}(W)$. Zatem, zgodnie z 2.11 rzut F_{Trc} wyznacza rzut f_{Trc} z $\mathrm{Sub}_m\Big(\mathrm{Trc}([Z_1, Y_1])\Big)$ na $\mathrm{Sub}_m\Big(\mathrm{Trc}([Z_2, Y_2])\Big)$ w przestrzeni śladów $\mathrm{Trc}(\mathfrak{A}) = \mathbf{P}_m(W)$. Z 1.52 i 3.70 mamy

$$\mathrm{Sub}_m\Big(\mathrm{Trc}([Z_i, Y_i])\Big) = [\mathrm{Trc}\, Z_i, \mathrm{Trc}\, Y_i]_m = \mathrm{Trc}\, \mathcal{X}_i.$$

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla F_{Ctr}.

$\Leftarrow$: Ponieważ w tym wypadku F_{Trc} i F_{Ctr} są bijekcjami, więc dowód jest zakończony z uwagi na 3.69. □

3.6.2 Rzuty między rzutowymi i afinicznymi podprzestrzeniami odcinkowymi

W tej sekcji dokładniej zbadane zostaną rzuty w przestrzeni jeżowej pomiędzy podprzestrzeniami rzutowymi i afinicznymi. Zaczniemy od wprowadzenia nowego pojęcia.

Mówimy, że odcinek $\mathcal{X}$ kraty $\mathfrak{L}(V)$ wyznacza *zbiór kierunkowy* dla przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$, gdy przekrój $\mathcal{X}$ z uniwersum $\mathfrak{A}$ jest pusty i jednocześnie przekrój $\mathcal{X}$ z uniwersum horyzontu $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$ jest niepusty.

LEMAT 3.72. *Jeśli odcinek $\mathcal{X} = [Z, Y]$ kraty $\mathfrak{L}(V)$ wyznacza zbiór kierunkowy dla $\mathfrak{A}$, to $\dim \mathrm{Trc}\, Z = m + 1$ lub $\dim \mathrm{Ctr}\, Y = d - 1$, gdzie $d = k + \dim W - m$.*

DOWÓD. Stosujemy oznaczenia (3.16), (3.17) i (3.19). Zakładamy, że

$$\text{(a)} \quad \mathcal{X} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) = \emptyset \qquad \text{oraz} \qquad \text{(b)} \quad \mathcal{X} \cap \mathcal{F}_{k,m+1}(W) \neq \emptyset.$$

Możemy skorzystać z analizy podprzestrzeni odcinkowych przeprowadzonej na stronach 72-73. Tak więc zgodnie z 3.23 oraz (a) mamy: $m < m_z$ lub $m_y < m$ lub $d < d_z$ lub $d_y < d$. Jednocześnie z 3.23 i (b) mamy

$$\begin{cases} m_z \leqslant m + 1 \leqslant m_y, \\ d_z \leqslant d - 1 \leqslant d_y. \end{cases} \tag{3.69}$$

Zauważmy, że $m + 1 \leqslant m_y$ razem z $m_y < m$ daje sprzeczność. Podobnie $d < d_z$ razem z $d_z \leqslant d - 1$. Pozostają więc do sprawdzenia dwa z czterech przypadków.

Rozważmy sytuację, w której $m < m_z$. Ponieważ $m_z \leqslant m + 1$ z (3.69), więc $m_z = m + 1$.

Gdy natomiast $d_y < d$, to z (3.69) mamy $d \leqslant d_y + 1$, skąd $d = d_y + 1$, czyli $d_y = d - 1$. □

Dowodząc kolejne własności rzutów często odwołujemy się do następującego faktu.

LEMAT 3.73. *Niech p będzie prostą w kracie $\mathfrak{L}(V)$ i U_1, U_2 elementami tej prostej takimi, że U_1 jest punktem przestrzeni $\mathfrak{A}$.*

(i) *Jeśli $\mathcal{X}$ jest rzutową podprzestrzenią odcinkową w $\mathfrak{A}$ i $U_2 \in \widetilde{\mathcal{X}}$, to U_2 jest punktem w $\mathfrak{A}$.*

(ii) *Jeśli* $\mathcal{X}$ *jest semi-afiniczną podprzestrzenią odcinkową w* $\mathfrak{A}$ *i* $U_2 \in \widetilde{\mathcal{X}}$*, to* U_2 *jest punktem właściwym lub niewłaściwym w* $\mathfrak{A}$*.*

(iii) *Jeśli odcinek* $\mathcal{X}$ *kraty* $\mathfrak{L}(V)$ *wyznacza zbiór kierunkowy dla* $\mathfrak{A}$ *i* $U_2 \in \mathcal{X}$*, to* U_2 *jest punktem niewłaściwym w* $\mathfrak{A}$*.*

We wszystkich trzech przypadkach, gdy dodatkowo $U_1 \neq U_2$*, to* $\widehat{p}$ *jest prostą w przestrzeni* $\mathfrak{A}$*.*

DOWÓD. Z założeń $\dim U_1 = k$ i $U_1 \sim U_2$, więc $\dim U_2 = k$.

(i) Fakt, że $\dim U_2 = k$ wystarczy by U_2 był punktem $\mathfrak{A}$ ze względu na 3.25 i 3.21. Z definicji przestrzeni jeżowej, prosta w kracie $\mathfrak{L}(V)$ jeśli przechodzi przez dwa różne punkty $\mathfrak{A}$, jest prostą w $\mathfrak{A}$.

(ii) Ponieważ U_1 jest punktem przestrzeni $\mathfrak{A}$, więc $\dim \operatorname{Trc} U_1 = m$. Zatem z 3.5 mamy $m - 1 \leqslant \dim \operatorname{Trc} U_2 \leqslant m + 1$. Natomiast z 3.18 mamy $\dim \operatorname{Ctr} U_2 \leqslant d$, a z 3.19 mamy $m \leqslant \dim \operatorname{Trc} U_2$. Ostatnie dwa warunki są jednak równoważne. Tak więc U_2 jest albo punktem właściwym, albo niewłaściwym w $\mathfrak{A}$.

(iii) Początek rozumowania biegnie jak w (ii). Mamy $\dim \operatorname{Trc} U_1 = m$ oraz oszacowanie wymiaru śladu U_2, to znaczy, $m - 1 \leqslant \dim \operatorname{Trc} U_2 \leqslant m + 1$. Następnie korzystamy z 3.72, skąd otrzymamy $m + 1 \leqslant \dim \operatorname{Trc} U_2$ lub $\dim \operatorname{Ctr} U_2 \leqslant d - 1$. Ponieważ te dwa warunki są równoważne, więc $\dim \operatorname{Trc} U_2 = m + 1$, co oznacza, że U_2 jest punktem niewłaściwym w $\mathfrak{A}$.

Jeśli $U_1 \neq U_2$, to $p = \overline{U_1, U_2}$. Jeśli ponadto U_2 jest punktem $\mathfrak{A}$, to z definicji prostych w $\mathfrak{A}$, $\widehat{p}$ jest prostą w $\mathfrak{A}$. Natomiast gdy U_2 jest punktem niewłaściwym $\mathfrak{A}$, to z 3.7 wynika, że $\widehat{p} = p \setminus \{U_2\} \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$, więc $\widehat{p}$ jest prostą w $\mathfrak{A}$. □

Interesującym jest jak zmienią się ogólne kryteria na to aby istniał rzut pomiędzy podprzestrzeniami odcinkowymi w przestrzeni jeżowej jeśli dodatkowo założymy, że podprzestrzenie te są rzutowe lub afiniczne.

STWIERDZENIE 3.74. *Niech* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *będą rzutowymi podprzestrzeniami odcinkowymi w* $\mathfrak{A}$*. Jeśli* F *jest rzutem z* $\widetilde{\mathcal{X}_1}$ *na* $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ *w* $\mathfrak{L}(V)$*, to* F *wyznacza rzut w* $\mathfrak{A}$*.*

DOWÓD. Niech $U \in \mathcal{X}_1$. Z określenia rzutu w $\mathfrak{L}(V)$ mamy $F(U) \in \widetilde{\mathcal{X}_2}$ i $U \sim F(U)$. Z 3.73(i) $F(U)$ jest punktem przestrzeni $\mathfrak{A}$. Zatem $\operatorname{rg}(F|\mathcal{F}_{k,m}(W)) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$.

Odwzorowanie F^{-1} jest rzutem z $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ na $\widetilde{\mathcal{X}_1}$, więc stosując udowodniony wyżej fakt do F^{-1} dostajemy $\operatorname{rg}(F^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W)) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$. Dlatego też, na mocy 3.49 rzut F wyznacza rzut w $\mathfrak{A}$. □

STWIERDZENIE 3.75. *Niech* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *będą semi-afinicznymi podprzestrzeniami odcinkowymi w* $\mathfrak{A}$*. Jeśli* F *jest uogólnionym rzutem środkowym z* $\widetilde{\mathcal{X}_1}$ *na* $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ *w* $\mathfrak{L}(V)$ *oraz*

(i) $\mathcal{X}_1^{\infty} = \mathcal{X}_2^{\infty}$*, lub*

(ii) $F = \overset{\widetilde{\mathcal{X}_1}}{\underset{\widetilde{\mathcal{X}_2}}{\Big\downarrow\mathcal{Y}}}$*, gdzie* $\mathcal{Y}$ *wyznacza zbiór kierunkowy dla* $\mathfrak{A}$*,*

to F *wyznacza rzut w* $\mathfrak{A}$*.*

DOWÓD. Niech $U \in \mathcal{X}_1$. Jeśli $U \in \widetilde{\mathcal{X}_1} \cap \widetilde{\mathcal{X}_2}$, to zgodnie z (1.57) $F(U) = U$, a zatem $F(U) \in \mathcal{X}_2$. Możemy więc dalej założyć, że $U \in \mathcal{X}_1 \setminus \widetilde{\mathcal{X}_2}$.

Z definicji 1.76 uogólnionego rzutu środkowego w kracie $\mathfrak{L}(V)$, $F(U) \in \widetilde{\mathcal{X}_2}$ oraz $U \sim F(U)$. Z 3.73(ii) $F(U)$ jest albo punktem właściwym, albo niewłaściwym w $\mathfrak{A}$.

W przypadku (i), gdyby $F(U)$ był punktem niewłaściwym to z założenia, że $\mathcal{X}_1^\infty = \mathcal{X}_2^\infty$ mielibyśmy $F(U) \in \widetilde{\mathcal{X}_1} \cap \widetilde{\mathcal{X}_2}$, co zgodnie z 1.75(iv) oznaczałoby, że $F(U) = U$ i uzyskalibyśmy sprzeczność, bo U jest punktem właściwym w $\mathfrak{A}$. Zatem $F(U)$ musi być punktem właściwym $\mathfrak{A}$.

W przypadku (ii), z określenia uogólnionego rzutu środkowego istnieje prosta p w $\mathfrak{L}(V)$ przez U i $F(U)$, przecinająca $\mathcal{Y}$ w pewnym U_0, przy czym $U_0 \neq U, F(U)$. Gdy odcinek $\mathcal{Y}$ wyznacza zbiór kierunkowy dla $\mathfrak{A}$, to z 3.73(iii) U_0 jest punktem niewłaściwym $\mathfrak{A}$. Zatem, z 3.7 prosta p jest prostą afiniczną w $\mathfrak{A}$. Ponieważ $U_0 \neq F(U)$, więc $F(U)$ jest punktem właściwym w $\mathfrak{A}$.

Wykazaliśmy, że przy założeniu (i) jak i (ii) zachodzi $F(U) \in \mathcal{X}_2$, więc z dowolności wyboru U mamy $\operatorname{rg}\big(F|\mathcal{F}_{k,m}(W)\big) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$.

Odwzorowanie F^{-1} jest rzutem z $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ na $\widetilde{\mathcal{X}_1}$, zatem możemy zastosować wyżej udowodniony fakt. W rezultacie $\operatorname{rg}\big(F^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W)\big) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$ i zgodnie z 3.49 rzut F wyznacza rzut w $\mathfrak{A}$. □

Zgodnie z 3.74, w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ możemy rzutować z rzutowej podprzestrzeni odcinkowej na rzutową podprzestrzeń odcinkową, o ile tylko są one współpękowe. Natomiast 3.75 mówi, że semi-afiniczną podprzestrzeń odcinkową $\mathcal{X}_1$ można zrzutować na semi-afiniczną podprzestrzeń odcinkową $\mathcal{X}_2$, gdy leżą one w pęku właściwym i $\mathcal{X}_1 \parallel \mathcal{X}_2$ lub środek rzutu jest niewłaściwy. Uzyskany wynik jest typowy dla geometrii afinicznych i rzutów w pękach prostych.

Kolejny lemat jest próbą odpowiedzi na pytanie w jakich pękach podprzestrzeni odcinkowych można się spodziewać, że środek rzutu będzie zawsze niewłaściwy.

Lemat 3.76. *Niech $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$ $(i = 1, 2)$ będą różnymi odcinkami leżącymi w pęku G w kracie $\mathfrak{L}(V)$ z ustalonym W i niech F będzie uogólnionym rzutem środkowym z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ o środku $\mathcal{Y}$. Jeśli odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ wyznaczają podprzestrzenie afiniczne w $\mathfrak{A}$, $]Z_1, Y_1[\cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \neq \emptyset$, rzut F wyznacza rzut w $\mathfrak{A}$ oraz*

(i) *G jest typu $\mathrm{pt}\backslash\omega$, lub*

(ii) *G jest typu $\alpha\backslash\mathrm{pt}$,*

to $\mathcal{Y}$ wyznacza zbiór kierunkowy dla $\mathfrak{A}$.

Dowód. Załóżmy, że spełnione są założenia (i). Z 3.59 mamy

$$F(Z_1 + (W \cap Y_1)) = Z_2 + (W \cap Y_2),$$

zatem możemy zastosować 3.68(i) skąd otrzymamy $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$ i $\operatorname{Trc} Z \prec \operatorname{Trc} C$. Odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ wyznaczają podprzestrzenie afiniczne w $\mathfrak{A}$, więc $\dim \operatorname{Trc} Z = m$ zgodnie z 3.20, co oznacza, że $\dim \operatorname{Trc} C = m + 1$. Zatem $\mathcal{Y} \cap \mathcal{F}_{k,m}(W) = \emptyset$.

Z założenia o $\mathcal{X}_1$, istnieje punkt U_1 przestrzeni $\mathfrak{A}$ leżący w $\mathcal{X}_1$. Definicja uogólnionego rzutu środkowego 1.76 mówi zatem, że istnieje przynajmniej jedna prosta p w $\mathfrak{L}(V)$ przez U_1, która przecina $\mathcal{Y}$, powiedzmy w U_0. Stąd, oraz z 3.5, mamy

$$m - 1 \leqslant \dim \operatorname{Trc} U_0 \leqslant m + 1.$$

Z drugiej strony $m + 1 = \dim \operatorname{Trc} C \leqslant \dim \operatorname{Trc} U_0$, a więc $\dim \operatorname{Trc} U_0 = m + 1$. Dlatego też $\mathcal{Y} \cap \mathcal{F}_{k,m+1}(W) \neq \emptyset$, co kończy dowód.

Przy założeniach (ii) dowód przebiega dualnie. □

Uszczegółowieniem 3.66 dla rzutowych i afinicznych podprzestrzeni odcinkowych jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.77. *Niech* $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_{\mathcal{F}}$ $(i = 1, 2)$ *będą niepustymi afinicznymi lub rzutowymi podprzestrzeniami odcinkowymi w przestrzeni jeżowej* $\mathfrak{A}$ *takimi, że* $]Z_1, Y_1[\cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \neq \emptyset$ *i niech* F *będzie rzutem z odcinka* $\widetilde{\mathcal{X}_1}$ *na* $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ *w kracie* $\mathfrak{L}(V)$. *Rzut* F *wyznacza rzut w przestrzeni* $\mathfrak{A}$ *wtw., gdy*

(i) $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *są* α*-odcinkami lub* ω*-odcinkami, albo*

(ii) $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *są podprzestrzeniami afinicznymi i spełniony jest jeden z warunków:*

  (a) $\operatorname{Trc} Y_1 = \operatorname{Trc} Y_2$,

  (b) $\operatorname{Ctr} Z_1 = \operatorname{Ctr} Z_2$,

  (c) *F jest uogólnionym rzutem środkowym postaci* $F = \overset{\widetilde{X_1}}{\underset{\widetilde{X_2}}{\mathcal{Y}}}$, *gdzie* $\mathcal{Y}$ *wyznacza zbiór kierunkowy dla* $\mathfrak{A}$,

  (d) *F jest ślizgiem i odcinek osobliwy wafla* $\overline{\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2}}$ *wyznacza zbiór kierunkowy dla* $\mathfrak{A}$.

Dowód. $\Rightarrow$: Oznaczmy $f := F|\mathcal{F}_{k,m}(W)$. Zakładamy, że f jest rzutem z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ w $\mathfrak{A}$. Z 3.57 obie podprzestrzenie $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są α-rzutowe, ω-rzutowe lub afiniczne. Pozostaje zatem do wykazania, że gdy $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są afiniczne, to zachodzi jeden z czterech warunków w (ii). Gdy $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$, to prawdziwe jest (a) i (b). Załóżmy więc, że $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$. Z 3.62 wynika, że $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są współpękowe w $\mathfrak{A}$. Z założenia F jest rzutem w kracie $\mathfrak{L}(V)$, więc F jest albo uogólnionym rzutem środkowym, albo ślizgiem.

W pierwszym przypadku $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ wyznaczają pęk właściwy w $\mathfrak{A}$, więc bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że jest to pęk typu gwiazda, czyli $Z_1 = Z_2 = Z$. Prosta $\overline{Y_1, Y_2}$ może być albo α-rzutowa, albo afiniczna albo ω-rzutowa. Zgodnie z 3.62 oraz 3.33 Y_1, Y_2 są elementami właściwymi prostej $\overline{Y_1, Y_2}$. Zatem z 3.2 w dwóch pierwszych przypadkach $\operatorname{Trc} Y_1 = \operatorname{Trc} Y_2$ i spełnione jest (a), w ostatnim natomiast z 3.76(i) zachodzi (c).

Gdy $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ wyznaczają wafel w $\mathfrak{A}$, to na podstawie 3.60 oraz tabeli 3.12 zauważmy, że

(1) prosta podstaw $\overline{Y_1, Y_2}$ jest α-rzutowa, albo

(2) prosta wierzchołków $\overline{Z_1, Z_2}$ jest ω-rzutowa, albo

(3) odcinek osobliwy wafla $\overline{\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2}}$ wyznacza zbiór kierunkowy dla $\mathfrak{A}$.

Z 3.2 w sytuacji (1) mamy $\operatorname{Trc} Y_1 = \operatorname{Trc} Y_2$, w (2) $\operatorname{Ctr} Z_1 = \operatorname{Ctr} Z_2$, natomiast (3) odpowiada (d).

$\Leftarrow$:

(i) Bezpośredni wniosek z 3.74.

(ii) Gdy spełniony jest warunek (a) lub (b), to teza wynika wprost z 3.67, natomiast w przypadku (c) z 3.75(ii). Rozważmy więc przypadek (d).

Niech $U_1 \in \mathcal{X}_1$ i $U_2 := F(U_1)$. Ponieważ F jest ślizgiem w $\mathfrak{L}(V)$, więc $\widetilde{\mathcal{X}_2}$, $\widetilde{\mathcal{X}_1}$ rozpinają wafel G, $U_2 \in \widetilde{\mathcal{X}_2}$, $U_1 \sim U_2$ oraz $U_1 \neq U_2$. Niech p będzie prostą w kracie $\mathfrak{L}(V)$ przechodzącą przez U_1, U_2. Z 1.48 prosta p przecina odcinek osobliwy G^∞, powiedzmy w U_0. Zgodnie z 3.73(iii) U_0 jest punktem niewłaściwym $\mathfrak{A}$. Zatem $\widehat{p}$ jest prostą afiniczną w $\mathfrak{A}$ z uwagi na 3.2. Elementy G są rozłączne (por. 1.31), a więc $U_0 \neq U_2$ i stąd U_2 jest punktem właściwym $\mathfrak{A}$. Pokazaliśmy, że

$$\mathrm{rg}(F|\mathcal{F}_{k,m}(W)) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W).$$

Ponieważ, F^{-1} jest rzutem z $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ na $\widetilde{\mathcal{X}_1}$, więc analogicznie można wykazać, że $\mathrm{rg}(F^{-1}|\mathcal{F}_{k,m}(W)) \subseteq \mathcal{F}_{k,m}(W)$. Na mocy 3.49 rzut F wyznacza rzut w $\mathfrak{A}$. □

3.6.3 Rzuty między mocnymi podprzestrzeniami

Mocne podprzestrzenie pełnią rolę wygodnego atlasu podczas badania właściwości częściowych przestrzeni prostych. Tak jest również w przypadku przestrzeni jeżowych. Z tego powodu uszczegóławiamy nasze wcześniejsze wyniki dla mocnych podprzestrzeni.

Cechą wyróżniającą afiniczne mocne podprzestrzenie przestrzeni jeżowej jest to, że ich horyzonty są zawsze rzutowe, co dowodzimy w następującym lemacie.

Lemat 3.78. *Niech $\mathcal{X}$ będzie niepustą podprzestrzenią odcinkową przestrzeni $\mathfrak{A}$.*

(i) *Jeśli $\mathcal{X}$ jest podprzestrzenią α-semi-afiniczną, to zbiór $\mathcal{X}^\infty$ jest podprzestrzenią ω-rzutową na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$ wtw., gdy $\mathcal{X}$ jest gwiazdą.*

(ii) *Jeśli $\mathcal{X}$ jest podprzestrzenią ω-semi-afiniczną, to zbiór $\mathcal{X}^\infty$ jest podprzestrzenią α-rzutową na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$ wtw., gdy $\mathcal{X}$ jest układem.*

Dowód. (i) Przyjmijmy, że $\mathcal{X} = [Z, Y]_{\mathcal{F}}$. Z 3.19 mamy $m_z = m < m_y$ i $d_z < d \leqslant d_y$. Na mocy 3.15 zbiór $\mathcal{X}^\infty$ jest podprzestrzenią odcinkową na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$.

Z 3.17 i (3.14) odcinek $\mathcal{X}^\infty$ jest ω-odcinkiem, wtw., gdy $d_z = d - 1$. Z (3.20) mamy $d_z - z = w - m_z$, czyli

$$d_z - w + m = z.$$

Ponieważ $d = k + w - m$, zgodnie z (3.19), więc równość $d_z = d - 1$ jest równoważna równości $z = k - 1$, co należało pokazać.

(ii) Wynika z (i) i prawa dualności. □

Wniosek 3.79. *Niech $\mathcal{X}$ będzie niepustą, afiniczną podprzestrzenią odcinkową przestrzeni $\mathfrak{A}$. Zbiór $\mathcal{X}^\infty$ jest podprzestrzenią rzutową (α-odcinkiem, ω-odcinkiem) na $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$ wtw., gdy $\mathcal{X}$ jest mocną podprzestrzenią (odpowiednio układem, gwiazdą).*

W takim razie znamy dokładnie postać horyzontów afinicznych mocnych podprzestrzeni.

Lemat 3.80. *Niech $\mathcal{X} = [Z, Y]_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$.*

(i) *Jeśli $\mathcal{X}$ jest α-semi-afiniczną gwiazdą, to $\mathcal{X}^\infty = [Z, Z + (W \cap Y)]_k$.*

(ii) *Jeśli $\mathcal{X}$ jest ω-semi-afinicznym układem, to $\mathcal{X}^\infty = [Z + (W \cap Y), Y]_k$.*

Dowód. (i) Zgodnie z 3.78(i) zbiór $\mathcal{X}^\infty$ jest podprzestrzenią ω-rzutową na horyzoncie $\mathbf{H}(\mathfrak{A})$. Ponieważ $\mathbf{H}(\mathfrak{A}) = \mathbf{A}_{k,m+1}(V, W)$ (por. [13]) oraz

$$\mathcal{X}^\infty = [Z, Y] \cap \mathcal{F}_{k,m+1}(V, W)$$

z 3.15, więc z 3.21 otrzymujemy $\mathcal{X}^\infty = [Z, Z + (W \cap Y)]_k$.

(ii) Dowód przebiega dualnie do (i). □

Zbadamy teraz szczególny przypadek 3.66 charakterystyczny dla mocnych podprzestrzeni.

STWIERDZENIE 3.81. *Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą niepustymi afinicznymi gwiazdami leżącymi w pęku właściwym typu gwiazda (lub układami leżącymi w pęku właściwym typu układ) w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$ takimi, że $]Z_1, Y_1[\cap \mathcal{F}_{k,m}(W) \neq \emptyset$ i niech F będzie rzutem z odcinka $\widetilde{\mathcal{X}_1}$ na $\widetilde{\mathcal{X}_2}$ w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Rzut F wyznacza rzut w przestrzeni $\mathfrak{A}$ wtw., gdy spełniony jest jeden z warunków*

(i) $\mathcal{X}_1 \parallel \mathcal{X}_2$ *lub*

(ii) $F = \overset{\widetilde{\mathcal{X}_1}}{\underset{\widetilde{\mathcal{X}_2}}{\downarrow \mathcal{Y}}}$, *gdzie $\mathcal{Y}$ wyznacza zbiór kierunkowy dla $\mathfrak{A}$.*

DOWÓD. Rozważamy sytuację, w której $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są afinicznymi gwiazdami leżącymi w pęku właściwym typu gwiazda. W przypadku układów dowód biegnie dualnie.

Niech $\mathcal{X}_i = [Z, Y_i]_{\mathcal{F}}$, $W_i := Z + (W \cap Y_i)$ i niech G oznacza pęk, w którym leżą $\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{X}_2}$. Z 3.25 $\widetilde{\mathcal{X}_i} = [Z, Y_i]$, a więc $\mathsf{G} = \{Z\} \boxtimes q$, dla pewnej prostej q w $\mathfrak{L}(V)$, na której leżą Y_1, Y_2. Zauważmy, że rzut F jest uogólnionym rzutem środkowym. Niech $\mathcal{Y}$ oznacza środek tego rzutu.

$\Rightarrow$: Jeśli $W_1 = W_2$, to ponieważ z 3.80(i) mamy $\mathcal{X}_i^\infty = [Z, W_i]_k$, więc $\mathcal{X}_1^\infty = \mathcal{X}_2^\infty$, co z uwagi na 3.16 oznacza, że $\mathcal{X}_1 \parallel \mathcal{X}_2$.

Gdy natomiast $W_1 \neq W_2$, to zgodnie z 3.29 prosta q musi być ω-prostą, a wówczas z 3.2 spełnione są założenia 3.76(i). Stąd $\mathcal{Y}$ wyznacza zbiór kierunkowy dla przestrzeni $\mathfrak{A}$.

$\Leftarrow$: Bezpośredni wniosek z 3.16 oraz 3.75. □

Zwróćmy uwagę, że 3.81 odpowiada twierdzeniu o wykonalności rzutu między prostymi afinicznymi w $\mathfrak{A}$. Mianowicie, taki rzut jest wykonalny, gdy proste te są równoległe w sensie $\parallel$ lub rzut jest rzutem równoległym względem $\parallel$ (por. 3.39, 3.41).

3.6.4 Własności uogólnionych rzutów środkowych w kracie

Teoria przestrzeni jeżowych, jak się okazuje, dostarcza wygodny aparat, który pozwala dokładniej zbadać naturę uogólnionych rzutów środkowych w kracie $\mathfrak{L}(V)$ oraz w przestrzeni pęków $\mathbf{P}_k(V)$.

Zbiór elementów kraty $\mathfrak{L}(V)$ sąsiednich z elementem U oznaczamy przez $[U]_\sim$, formalnie

$$[U]_\sim := \{Q \in \mathrm{Sub}(V) \colon Q \sim U\}. \tag{3.70}$$

LEMAT 3.82. *Niech $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_{\mathcal{F}}$ $(i = 1, 2)$ będą odcinkami rozpinającymi pęk właściwy G w $\mathfrak{L}(V)$, $F = \overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\downarrow \mathcal{Y}}}$ uogólnionym rzutem środkowym i $U_0 \in \mathrm{Sub}_k(\mathcal{Y})$.*

(i) *Jeśli G jest typu gwiazda, to*

$$\mathcal{X}_i \cap [U_0]_\sim = [Y_i \cap U_0, Y_i]_k,$$

gdzie $\dim Y_i \cap U_0 = k - 1$ *oraz* $Y_1 \cap U_0 = Y_2 \cap U_0 \in \mathcal{X}'$ *dla* $i = 1, 2$. *Ponadto*

$$F\Big([Y_1 \cap U_0, Y_1]_k\Big) = [Y_2 \cap U_0, Y_2]_k \quad i \quad F\Big([Y_1 \cap U_0, Y_1]\Big) = [Y_2 \cap U_0, Y_2].$$

(ii) *Jeśli* G *jest typu układ, to*

$$\mathcal{X}_i \cap [U_0]_\sim = [Z_i, Z_i + U_0]_k,$$

gdzie $\dim Z_i + U_0 = k + 1$ *oraz* $Z_1 + U_0 = Z_2 + U_0 \in \mathcal{X}'$ *dla* $i = 1, 2$. *Ponadto*

$$F\Big([Z_1, Z_1 + U_0]_k\Big) = [Z_2, Z_2 + U_0]_k \quad i \quad F\Big([Z_1, Z_1 + U_0]\Big) = [Z_2, Z_2 + U_0].$$

Dowód. (i) Niech $\mathcal{X}_i = [Z, Y_i]$ oraz $\mathcal{Y} = [C, Y_0] \subseteq [Z, Y_0] \in \mathsf{G}$. Zauważmy, że $\mathcal{F}_{k,k-1}(U_0)$ to zbiór wszystkich elementów kraty $\mathfrak{L}(V)$ sąsiednich z U_0. Zatem

$$\mathcal{X}_i \cap [U_0]_\sim = [Z, Y_i] \cap \mathcal{F}_{k,k-1}(U_0).$$

Rozważmy przestrzeń jeżową $\mathfrak{A}_0 = \mathbf{A}_{k,k-1}(V, U_0)$ i ustalmy parametry odcinka $\mathcal{E}_i = [Z, Y_i] \cap \mathcal{F}_{k,k-1}(U_0)$ w tej przestrzeni. Zaczynamy od wyliczenia wymiaru $Y_i \cap U_0$. Ponieważ

$$Y_i \subseteq Y_i + U_0 \subseteq Y'' \quad \text{oraz} \quad Y_i \prec Y'',$$

gdzie $Y'' = Y_1 + Y_2$, więc albo $Y_i + U_0 = Y_i$ albo $Y_i + U_0 = Y''$. W pierwszym przypadku $U_0 \subseteq Y_i$, co przeczy definicji uogólnionego rzutu środkowego (por. 1.75), w drugim otrzymujemy

$$\dim Y_i \cap U_0 = k - 1. \tag{3.71}$$

Ze wspomnianej definicji 1.75 wynika również, że $Z \prec C \subseteq U_0$, skąd $\dim Z \leqslant k - 1$. Ponadto mamy $k + 1 \leqslant \dim Y''$. Podsumowując uzyskujemy

$$\begin{cases} \dim Z \cap U_0 = \dim Z \leqslant m_0 = k - 1 = \dim Y_i \cap U_0, \\ \dim Z + U_0 = \dim U_0 = k < d_0 = k + 1 \leqslant \dim Y_i + U_0 = \dim Y''. \end{cases}$$

Zgodnie z 3.17 odcinek $\mathcal{E}_i$ jest α-rzutowy w $\mathfrak{A}_0$. Możemy więc zastosować 3.21 skąd

$$\mathcal{E}_i = [Z + (U_0 \cap Y_i), Y_i]_k = [Y_i \cap U_0, Y_i]_k.$$

Aby pokazać, że $Y_i \cap U_0 \in \mathcal{X}'$ wystarczy zauważyć, że $Y_i \cap U_0 \subseteq Y_i \cap Y_0 = Y'$, skąd $Y_i \cap U_0 \in [Z, Y'] = \mathcal{X}'$.

Teraz wykażemy, że obrazem odcinka $\mathcal{E}_1$ przy F jest odcinek $\mathcal{E}_2$. Niech $U_1 \in \mathcal{E}_1$. Z określenia rzutu F elementy $U_1, F(U_1), U_0$ leżą na jednej prostej w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Zauważmy, że $F(U_1) \in \mathcal{X}_2$ i $F(U_1) \sim U_0$, a więc $F(U_1) \in \mathcal{E}_2$ zgodnie z określeniem zbioru $\mathcal{E}_2$. Zatem $F(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{E}_2$.

Na odwrót jeśli weźmiemy $U_2 \in \mathcal{E}_2$, to z określenia rzutu F istnieje $U_1 \in \mathcal{X}_1$ taki, że $F(U_1) = U_2$ oraz elementy U_1, U_2, U_0 leżą na jednej prostej w kracie $\mathfrak{L}(V)$. Z określenia $\mathcal{E}_1$ mamy $U_1 \in \mathcal{E}_1$. Dlatego też $\mathcal{E}_2 \subseteq F(\mathcal{E}_1)$. Zatem

$$F\big([Y_1 \cap U_0, Y_1]_k\big) = [Y_2 \cap U_0, Y_2]_k.$$

Zauważmy, że zgodnie z (3.71) atomy kraty $[Y_2 \cap U_0, Y_2]$ to obrazy atomów kraty $[Y_1 \cap U_0, Y_1]$ przy rzucie F. Ponieważ F, zgodnie z 1.78, jest izomorfizmem krat, więc

$$F\big([Y_1 \cap U_0, Y_1]\big) = [Y_2 \cap U_0, Y_2].$$

Stąd, z uwagi na 1.80 oraz fakt, że $Y_i \cap U_0 \in \mathcal{X}'$ mamy $Y_1 \cap U_0 = F(Y_1 \cap U_0) = Y_2 \cap U_0$, co kończy dowód.

(ii) Dowód biegnie dualnie do przypadku (i). $\square$

Lemat 3.82 mówi o pewnej generalnej własności uogólnionych rzutów środkowych w kracie $\mathfrak{L}(V)$ i przestrzeni pęków $\mathbf{P}_k(V)$. Teraz zbadamy dokładniej podprzestrzenie przylegające do środka rzutu w przestrzeni jeżowej $\mathfrak{A}$.

Lemat 3.83. *Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą odcinkami rozpinającymi pęk właściwy G w $\mathfrak{L}(V)$ i $F = \begin{smallmatrix}\mathcal{X}_1\\ \mathcal{Y}\\ \mathcal{X}_2\end{smallmatrix}$ uogólnionym rzutem środkowym. Jeśli $Q_i \in \mathrm{Sub}_k(\mathcal{Y})$ i k-odcinek $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{X}_1$ przylega do Q_i dla $i = 1, 2$, to albo $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, albo $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{U\}$ i $U \in \mathcal{X}'$, albo $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ są rozłączne.*

Dowód. Załóżmy, że G jest typu gwiazda. Wówczas z 3.82 $\mathcal{E}_i = [Y_1 \cap Q_i, Y_1]_k$ jest nietrywialną gwiazdą i $Y_1 \cap Q_i \in \mathcal{X}'$ dla $i = 1, 2$.

Gdy $Q_1 = Q_2$, to $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ z określenia $\mathcal{E}_i$. Na odwrót, jeśli $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, to musi być $Q_1 = Q_2$, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy sprzeczność z 1.75(iii).

Teraz załóżmy, że $Q_1 \neq Q_2$ i $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ nie są rozłączne. Pokażemy, że $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{U\}$ dla pewnego $U \in \mathcal{X}'$. Punkt U istnieje, gdyż z założenia $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ przecinają się. Gdyby $|\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2| \geqslant 2$, to $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ ponieważ $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ są gwiazdami. Równość $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ pociąga za sobą równość $Q_1 = Q_2$ i mielibyśmy sprzeczność z założeniem, że Q_1, Q_2 są różne. Stąd $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{U\}$. W konsekwencji

$$Y_1 \cap Q_1, Y_1 \cap Q_2 \prec U.$$

Ponieważ $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$, więc $Y_1 \cap Q_1 \neq Y_1 \cap Q_2$ i otrzymujemy równość

$$(Y_1 \cap Q_1) + (Y_1 \cap Q_2) = U.$$

Wierzchołki $Y_1 \cap Q_1, Y_1 \cap Q_2$ leżą w $\mathcal{X}'$ zatem $U \in \mathcal{X}'$, bo $\mathcal{X}'$ jest podkratą $\mathfrak{L}(V)$.

Jeśli G jest typu układ dowód biegnie analogicznie. □

Z uwagi na 1.75 dla każdego $U \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ istnieje dokładnie jeden element $U_0 \in \mathcal{Y}$ taki, że $U \sim U_0$. Zatem 3.82 i 3.83 razem z 2.9 mówią, że

Twierdzenie 3.84. *W przestrzeni pęków $\mathfrak{P} = \mathbf{P}_k(V)$ uogólniony rzut środkowy $f = \begin{smallmatrix}\mathcal{X}_1\\ \mathcal{Y}\\ \mathcal{X}_2\end{smallmatrix}$ można wyrazić jako sumę rzutów środkowych $h_U = \begin{smallmatrix}\mathcal{H}^1_U\\ U\\ \mathcal{H}^2_U\end{smallmatrix}$, gdzie $\mathcal{H}^i_U = \mathcal{X}_i \cap [U]_\sim$ są mocnymi podprzestrzeniami w $\mathfrak{P}$, zaś U przebiega $\mathrm{Sub}_k(\mathcal{Y})$. Każdy z rzutów h_U jest rzutem środkowym w odpowiedniej przestrzeni rzutowej, natomiast każde dwie różne podprzestrzenie $\mathcal{H}^i_{U_1}, \mathcal{H}^i_{U_2}$, dla $U_1, U_2 \in \mathrm{Sub}_k(\mathcal{Y})$, są albo rozłączne, albo przecinają się w jednym punkcie leżącym w $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$.*

Bibliografia

[1] Albert, L., and Wells, J. Universal projective embeddings of the Grassmannian, half spinor, and dual orthogonal geometries. *Quart. J. Math., Oxford 2*, 34 (1983), 375–386.

[2] Bichara, A., and Tallini, G. On a characterization of Grassmann space representing the h-dimensional subspaces in a projective space. *Annals of Discrete Math. 18* (1983), 113–132.

[3] Birkhoff, G. *Lattice theory.* American Mathematical Society, Providence, 1967.

[4] Gräetzer, G. *General lattice theory.* Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1978.

[5] Hirschfeld, J. W. P., and Thas, J. A. *General Galois geometries*, first ed. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, Oxford, 1991.

[6] Huang, W.-L. Adjacency preserving transformations of Grassmann spaces. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamb.*, 68 (1998), 65–77.

[7] Karzel, H., and Meissner, H. Geschlitze inzidenzgruppen und normale fastmoduln. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamb.*, 31 (1967), 69–88.

[8] Karzel, H., and Pieper, I. Bericht über geschlitzte inzidenzgruppen. *Jber. Deutsh. Math.-Verein.*, 70 (1970), 70–114.

[9] Kordos, M. *Podstawy geometrii rzutowej i rzutowo-metrycznej*, vol. 57 of *Biblioteka Matematyczna.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warsaw, 1984.

[10] Oryszczyszyn, H., and Prażmowski, K. On projections in projective spaces. *Demonstratio Math. XXXI*, 1 (1998), 193–202.

[11] Oryszczyszyn, H., and Prażmowski, K. On projections in spaces of pencils. *Demonstratio Math. XXXI*, 4 (1998), 825–833.

[12] Porteous, I. R. *Topological geometry.* Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[13] Prażmowski, K. On a construction of affine grassmannians and spine spaces. *J. Geom. 72* (2001), 172–187.

[14] Prażmowski, K., and Radziszewski, K. Projections nad projective collineations in semiaffine line spaces. *Rend. Sem. Mat. Messina VI* (1999), 33–52.

[15] Prażmowski, K., and Żynel, M. Affine geometry of spine spaces. To appear in Demonstratio Math.

[16] Prażmowski, K., and Żynel, M. Extended parallelity in spine spaces. To appear in J. Geom.

[17] Prażmowski, K., and Żynel, M. General projections in spaces of pencils. Submitted to Beiträge Algebra Geom.

[18] Prażmowski, K., and Żynel, M. Geometry of the structure of linear complements. To appear in J. Geom.

[19] Prażmowski, K., and Żynel, M. Automorphisms of spine spaces. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamb. 72* (2002), 59–77.

[20] Tallini, G. Partial line spaces and algebraic varieties. *Symp. Math.*, 28 (1986), 203–217.

[21] Żynel, M. Subspaces and embeddings of spaces of pencils. Submitted to Rend. Sem. Mat. Messina.