

Analiza matematyczna 1

Relacje

1. Rozstrzygnąć, czy relacja $\mathcal{R}$, określona następująco $\forall x, y \in \mathcal{S} x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y = 3$, gdzie $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$, jest zwrotna, symetryczna, antysymetryczna, przechodnia.
2. Sprawdzić, czy relacja $\mathcal{R}$ określona na zbiorze $X = \{1, 3, 6\}$ jest zwrotna, symetryczna, antysymetryczna, przechodnia, jeżeli $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 6), (6, 3), (6, 6)\}$.
3. W zbiorze $X \times Y$ dana jest relacja $\mathcal{R}$. Wypisać wszystkie pary należące do tej relacji
 - a) $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{6, 7, 8\}, \mathcal{R} = \{(x, y) : x|y\}$
 - b) $X = Y = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 10\}$
 - c) $X = \{2, 5, 8, 12\}, Y = \{3, 4, 10\}, \mathcal{R} = \{(x, y) : \text{liczba } x \text{ ma z liczbą } y \text{ tylko jeden wspólny dzielnik}\}$.
4. W zbiorze $\mathbb{N}$ określona jest relacja dwuargumentowa $\mathcal{R}$ wzorem $m + n = 7$. Zapisać tę relację jako zbiór par uporządkowanych.
5. Niech $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ oraz $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2|x - y$. Czy $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności?
6. W zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$ dana jest relacja $\mathcal{R}$. Sprawdzić czy ta relacja jest zwrotna, symetryczna, przechodnia, czyli czy jest relacją równoważności. Jeżeli tak, to wyznaczyć jej klasy abstrakcji
 - a) $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (a, d), (c, a), (c, d), (d, a), (d, c)\}$
 - b) $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (c, b), (b, c)\}$
 - c) $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (d, d), (c, d), (d, c), (c, b), (b, c)\}$
 - d) $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, b), (b, c)\}$
 - e) $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (a, d), (c, d)\}$
 - f) $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$
 - g) $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, b), (b, c), (a, c), (c, a)\}$
 - h) $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$
 - i) $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b)\}$
 - j) $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c)\}$
 - k) $\mathcal{R} = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (d, d)\}$.
7. Niech $X = \{1, 2, \dots, 16\}, \mathcal{R} \subseteq X \times X, \forall x, y \in X x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 4|x^2 - y^2$. Sprawdzić, czy $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności. Jeżeli tak, to podać klasy abstrakcji.
8. Niech $X = \{-5, -4, \dots, 1, 2\}, \mathcal{R} \subseteq X \times X, \forall x, y \in X x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$. Sprawdzić, czy $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności. Jeżeli tak, to podać klasy abstrakcji.
9. Sprawdzić, czy następująca relacja $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2, (m_1, n_1)\mathcal{R}(m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1$ jest relacją równoważności.
10. Sprawdzić, czy następująca relacja $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), (m_1, n_1)\mathcal{R}(m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 n_2 = m_2 n_1$ jest relacją równoważności.
11. Niech $A = \{a, b, c, d\}$. Sprawdzić, czy podzbiór $B \subset A \times A$, którego elementy oznaczono na rysunku kółeczkami ($\otimes$), jest relacją równoważności

	d	$\circ$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$		d	$\circ$	$\circ$	$\otimes$	$\otimes$		d	$\circ$	$\circ$	$\otimes$	$\otimes$
	c	$\circ$	$\circ$	$\otimes$	$\otimes$		c	$\circ$	$\circ$	$\otimes$	$\otimes$		c	$\otimes$	$\circ$	$\otimes$	$\otimes$
a)	b	$\circ$	$\otimes$	$\circ$	$\otimes$	b)	b	$\circ$	$\otimes$	$\circ$	$\circ$	c)	b	$\circ$	$\otimes$	$\circ$	$\circ$
	a	$\otimes$	$\circ$	$\circ$	$\circ$		a	$\otimes$	$\circ$	$\otimes$	$\circ$		a	$\otimes$	$\circ$	$\otimes$	$\circ$
	a	b	c	d			a	b	c	d			a	b	c	d	

12. Sprawdzić, czy podane niżej relacje są relacjami równoważności. Jeżeli tak, podać ich klasy abstrakcji
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} \subset A \times A$, $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow 3|(x + y)$
 - $B = \{1, 2, \dots, 9\}$, $\mathcal{R} \subset B \times B$, $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow |x - y| \leq 6$
 - $C = \{1, 2, \dots, 15\}$, $\mathcal{R} \subset C \times C$, $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow 4|(2x^2 + 2y^2)$.
13. Znaleźć najmniejszą relację równoważności $\mathcal{R} \subset A \times A$, gdzie $A = \{a, b, c, d\}$, zawierającą elementy
- $(a, c), (a, d)$
 - $(a, c), (b, d)$
- Podać odpowiadający im podział zbioru A na klasy abstrakcji.
14. Niech $X = \{a, b, c, d, e\} = [a] \cup [b] \cup [c] = \{a\} \cup \{b, e\} \cup \{c, d\}$. Podać relację równoważności odpowiadającą temu podziałowi.
15. Dany jest zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ oraz określona na nim relacja $\mathcal{R}$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x|y$. Sprawdzić, czy jest to relacja równoważności.
16. Zbadać, które z niżej określonych relacji w $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ są relacjami równoważności
- $n_1\mathcal{R}n_2 \Leftrightarrow n_1 + n_2$ jest liczbą nieparzystą
 - $n_1\mathcal{R}n_2 \Leftrightarrow n_1 + n_2$ jest liczbą parzystą
 - $n_1\mathcal{R}n_2 \Leftrightarrow n_1 - n_2 = 5k, k \in \mathbb{Z}$.
17. Określmy na przestrzeni $X \times Y = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ relację $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$. Czy ta relacja jest odwzorowaniem?
18. Zbadać czy określone poniżej relacje $\mathcal{R} \subset X \times Y$ są odwzorowaniami przestrzeni X w Y
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \supset \mathcal{R} = \{(n_1, n_2) : (n_1 - n_2)(n_1 + n_2 - 2) = 0\}$
 - $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \supset \mathcal{R} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$
 - $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \supset \mathcal{R} = \{(x, y) : (x^2 + y^2)(y - \sin \frac{1}{x}) = 0\}$
 - $\mathbb{R} \times [-1, 1] \supset \mathcal{R} = \{(x, y) : y = \cos x\}$
 - $\mathbb{R} \times (0, +\infty) \supset \mathcal{R} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$
 - $[0, 4] \times [-4, 5] \supset \mathcal{R} = \{(x, y) : y + x^2 - 2x - 4 = 0\}$
 - $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \supset \mathcal{R} = \{(n_1, n_2) : (n_1 - 2n_2)(n_1 + n_2 - 5) = 0\}$
 - $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \supset \mathcal{R} = \{(n_1, n_2) : (n_1 - 3n_2)(n_1 + n_2 + 5) = 0\}$.
19. Czy podane relacje są odwzorowaniami? Jeżeli tak określić czy jest to surjekcja, iniekcja i bijekcja.
- $X = Y = \mathbb{N}$, $f \subset X \times Y$, $f = \{(x, y) : 2x - y - 1 = 0\}$
 - $X = Y = \mathbb{N}$, $g \subset X \times Y$, $g = \{(x, y) : x - 2y - 1 = 0\}$
 - $X = Y = \mathbb{R}$, $h \subset X \times Y$, $h = \{(x, y) : xy = 3\}$
 - $X = Y = \mathbb{N}$, $r \subset X \times Y$, $r = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$
 - $X = Y = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} \subset X \times Y$, $\mathcal{R} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$
 - $X = Y = \mathbb{R}_+$, $\varphi \subset X \times Y$, $\varphi = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$
 - $X = Y = \mathbb{R}$, $\psi \subset X \times Y$, $\psi = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$

20. W zbiorze liczb naturalnych zadajemy relację taką, że dwie liczby naturalne są w relacji wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się ostatnią cyfrą. Czy jest to relacja równoważności? Wypisać kilka elementów należących do tej relacji.
21. Jaka jest najmniejsza relacja równoważności w zbiorze $X = \{*, \circ, \diamond, \nabla\}$?
22. W zbiorze A wielomianów stopnia co najwyżej 2

$$A = \{p(x) = ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

wprowadzamy relację $\mathcal{R}$:

$$(p(x), q(x)) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow p(0) = q(0).$$

Czy jest to relacja równoważności?

23. W zbiorze $B = \{a, b, c, d, e\}$ wprowadzono relację równoważności $R \subset B \times B$, która podzieliła B na klasy rozłączne:

$$B = \{a\} \cup \{b, e\} \cup \{c, d\}.$$

Podać relację R .

24. W zbiorze klas równoważności relacji $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zadanej następująco

$$(m, n) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow 3|(m - n),$$

zadano działanie

$$[a] \circ [b] = [a + b + 1].$$

Czy to działanie jest poprawnie określone, tzn. czy nie zależy od wyboru reprezentanta?

Analiza matematyczna 1

Relacja porządkująca, relacja równoliczności, moce zbiorów

1. Sprawdzić, czy relacja $\mathcal{R}$ określona na zbiorze $A = \{1, 2, 3, 4\}$ jest częściowym porządkiem, jeżeli
 - a) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (1, 4)\}$
 - b) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$
2. Sprawdzić, czy relacja $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (b, d), (c, d)\}$ określona na zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$ jest relacją częściowego porządku.
3. Powiemy, że zbiory X, Y są równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja z X na Y . Czy relacja równoliczności jest relacją równoważności?
4. Podać przykład co najmniej 4 właściwych podzbiorów liczb naturalnych mających tę samą moc, co cały zbiór liczb naturalnych.
5. Zbadać równoliczność zbiorów
 - a) $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$
 - b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{N}$
 - c) Parzyste₊ i $\mathbb{N}$
 - d) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i $\mathbb{R}$
 - e) $[a, b]$ i $[c, d]$, $a \neq b, c \neq d, a, b, c, d \in \mathbb{R}$
 - f) $(0, 1)$ i $\mathbb{R}$.
6. Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wypisać wszystkie klasy abstrakcji względem relacji równoliczności określonej w zbiorze 2^X .
7. Udowodnić, że dla każdego zbioru $\mathbb{Z}$, zbiór U wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{Z}$ jest mocy większej niż zbiór $\mathbb{Z}$, tzn. $\overline{\overline{\mathbb{Z}}} < \overline{\overline{U}}$.
8. Wykazać, że zbiór wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny.
9. Udowodnić, że
 - a) suma zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym
 - b) iloczyn kartezjański zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.
10. Niech Z będzie niepustą rodziną zbiorów $X \neq \emptyset$. Wykazać, że relacja inkluzji $\mathcal{R} \subset Z \times Z : A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$ jest relacją porządkującą zbiór Z .
11. Wykazać, że zbiór $\mathbb{N}$ jest uporządkowany przez relację $|$ ($n|m \Leftrightarrow n$ jest dzielnikiem m)

Analiza matematyczna 1

Funkcje

- Naszkieować wykresy funkcji:
 - $f(x) = 2^x$
 - $f(x) = \log_2 x$
 - $f(x) = \frac{x+3}{x+4}$
 - $f(x) = [x]$
 - $f(x) = \max\{x, 1-x\}$
 - $f(x) = \operatorname{sgn} x$
 - $f(x) = \operatorname{sgn} \frac{x+3}{x+4}$
 - $f(x) = |x^2 - 4|$
 - $f(x) = 2 + \arctan x$
 - $f(x) = \min\{x, x^2\}$
 - $f(x) = \log_2 |x|$
 - $f(x) = ||x+1| - 2|$
 - $f(x) = \frac{1}{2} \arccos(x-3)$
 - $f(x) = -2 \arcsin(x+1)$
- Narysować wykres funkcji f i wyznaczyć jej okres podstawowy T :
 - $f(x) = x - [x]$ dla $x \geq 0$
 - $f(x) = |\cos x|$
 - $f(x) = \sin 3x$
- Sporządzić wykres funkcji f , wychodząc z wykresu funkcji g :
 - $f(x) = 2\sqrt{-3(x+1.5)} - 1.2$, $g(x) = \sqrt{x}$
 - $f(x) = -3\sin(2x+8)$, $g(x) = \sin x$
 - $f(x) = \frac{1}{3} \arccos(\frac{2}{3} - \frac{x}{2}) - \frac{3}{2}$, $g(x) = \arccos x$
- Określić dziedziny i zbiory wartości podanych funkcji
 - $f(x) = \sqrt[3]{x}$
 - $g(x) = \sqrt{-x^2}$
 - $h(x) = \sin \frac{1}{x}$
 - $d(x) = \log_3 |\cos x|$
 - $h(x) = \sqrt{\sin x}$
- Wyznaczyć dziedzinę funkcji
 - $f(x) = \log_{0,1} \left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)^{1/2}$
 - $h(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}} + \sqrt{\cos^2 x}$
 - $g(x) = \log_{x^2-3}(x^2 + 2x + 3)$
 - $i(x) = \log[\operatorname{ctg}(\log x)] + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
- Czy odwzorowanie $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ dane wzorem $f(x) = x + 1$ jest injekcją, surjekcją, bijekcją?
- Niech będzie dane odwzorowanie $T : X \rightarrow Y$ zadane wzorem $x \rightarrow T(x) = \sin x$. Zbadać, czy odwzorowanie to jest bijekcją, jeżeli
 - $X = \mathbb{R}, Y = [-1, 1]$
 - $X = [0, \frac{\pi}{2}], Y = [0, 2]$
 - $X = [0, \frac{\pi}{2}], Y = [0, 1]$
 - $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$
- Zbadać, czy odwzorowanie $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, $f(m, n) = \max(m, n)$ jest bijekcją? Znaleźć przeciwobraz $f^{-1}(\{5\})$.
- Które z podanych funkcji są parzyste (nieparzyste)
 - $f(x) = \sin x + \cos x$
 - $g(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$
 - $h(x) = \log \frac{x-1}{x+1}$
- Sprawdzić, czy funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ jest różnowartościowa.
- Czy odwzorowanie odwrotne do bijekcji jest również bijekcją, czy superpozycja bijekcji jest bijekcją?
- Zbadać odwracalność odwzorowania $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonego wzorem $f(x) = x + [x]$. Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x .

13. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana następująco

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0 \\ x & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 2x - 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} 2x + 3 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \\ 3 & \text{dla } x = -1 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \\ \text{b) } f(x) &= \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x < 1 \\ 3 & \text{dla } x = 1 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases} & \text{e) } f(x) &= \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2}, & x \neq -2 \\ 2, & x = -2 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) &= 2^x - 2^{-x}. \end{aligned}$$

Zbadać czy f jest bijekcją, a jeżeli tak to wyznaczyć f^{-1} .

14. Określić funkcje złożone $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, jeżeli

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x^2, g(x) = 2^x & \text{c) } f(x) &= \frac{1}{x}, g(x) = x^2 \\ \text{b) } f(x) &= 2 + \cos x, g(x) = \sqrt{x} & f(x) &= \log_2 x, g(x) = 2^x. \end{aligned}$$

15. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami określonymi wzorami $f(x, y) = 2x - y$, $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Czy istnieje $f \circ g$, $g \circ f$? Jeżeli tak, to znaleźć to złożenie.

16. Niech $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami określonymi wzorami

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases} & g(x) &= \frac{x}{x^2+1} \\ \text{b) } f(x) &= \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 2x + 3, & x > 0 \end{cases} & g(x) &= \begin{cases} x^2, & x < 3 \\ -x - 2, & x \geq 3 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ x + 3, & x \geq 0 \end{cases} & g(x) &= \begin{cases} -2x + 3, & x \leq 3 \\ x^2, & x > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Utworzyć złożenie $g \circ f$.

17. Wykonać złożenie funkcji

$$\begin{aligned} \text{a) } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & & \text{b) } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & & \text{c) } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x, y) = 2x + y & & f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ x^2 + x, & x \geq 1 \end{cases} & & f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases} \\ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{x}{1+x^2}, & & g(x) = \frac{x}{1+x^2}, & & g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

18. Niech $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami określonymi wzorami

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [0, 1] \\ -x + 3, & x \in (1, 3] \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x \in [0, 1) \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & x \in [1, 3] \end{cases}.$$

Wyznaczyć $h = f \circ g$ oraz wyznaczyć $h^{-1}((0, \frac{3}{2}])$.

19. Utworzyć możliwe złożenia funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ określonych wzorami $f(x, y) = xy + x^2$ i $g(x) = (x, \sin x)$.

20. Niech $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będą funkcjami zdefiniowanymi wzorami $f(x, y) = (x + 2y, x - y^2)$ i $g(x, y) = (x - y, x + y)$. Wyznaczyć funkcję $g \circ f$.

21. Utworzyć możliwe złożenia funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określonych wzorami $f(x) = (x-2, x^2)$ i $g(x, y) = (x - y, x + y)$.

22. Dla odwzorowań

$$\begin{aligned} f_1 : (x, y, z) &\mapsto xyz, & f_1 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ f_2 : (x, y) &\mapsto (x + y, 2x + y), & f_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ f_3 : (x, y) &\mapsto (xy, x^2 - y^2, 1), & f_3 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

wypisać te złożenia spośród $f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_2, f_2 \circ f_3, f_1 \circ f_3 \circ f_2, f_2^2, f_3^2$, które mają sens.

23. Wyznaczyć odwzorowanie odwrotne

$$\begin{array}{llll} \text{a) } f(x) = 3x - 7, & \text{c) } f(x) = \sin x, & \text{e) } f(x) = \operatorname{tg} x, & \text{g) } f(x) = \frac{3}{x-2}, \\ \text{b) } f(x) = x^2 - 3, & \text{d) } f(x) = \cos x, & \text{f) } f(x) = \operatorname{ctg} x, & \text{h) } f(x) = \ln x. \end{array}$$

24. Wykazać, że dla $A, B \in D_f$ oraz $C, D \in ZW_f$ zachodzą następujące własności

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B), & \text{c) } f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \\ \text{b) } f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D), & \text{d) } f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D). \end{array}$$

25. Dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = ||x - 1| - 2|$ znaleźć zbiór $f^{-1}((-\infty, 2))$.

26. Dla funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danych wzorami

$$f(x, y) = (x + y, x - 2y + 3), \quad g(x, y) = x - y,$$

znaleźć funkcję $h = g \circ f$ oraz ustalić h^{-1} na odcinku $[1, 3]$.

27. Czy funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

jest iniekcją? Wyznaczyć jej zbiór wartości.

Analiza matematyczna 1

Ciągi Cauchy'ego

1. Sprawdzić, które z następujących ciągów są ciągami Cauchy'ego:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a_n = 1 + \frac{1}{n} & \text{c) } c_n = \frac{n+b}{n}, \quad b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{e) } e_n = \frac{n}{n+2} \\ \text{b) } b_n = (-1)^n \cdot n & \text{d) } d_n = (-1)^{n(n+1)} & \text{f) } f_n = \frac{n^2+3n-2}{n^3-2n+1}. \end{array}$$

2. Posługując się warunkiem Cauchy'ego dowieść rozbieżności ciągu $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

3. Udowodnić, że dla $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ciągów zbieżnych zachodzi:

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, & 2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ 3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, & 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}. \end{array}$$

Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe? Jeżeli nie, podaj kontrprzykład.

4. Wykazać, że ciąg o wyrazie ogólnym

$$\text{a) } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{b) } b_n = \frac{3^n}{3^n+2}$$

jest ograniczony z góry.

5. Wykazać, że ciąg o wyrazie ogólnym

$$\text{a) } a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \quad \text{b) } b_n = \frac{n^2+2n+1}{n^2-3}$$

jest ograniczony z dołu.

6. Zbadać monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a_n = \frac{2n}{n+3}, & \text{c) } c_n = \frac{3n^2}{1-n}, & \text{e) } e_n = \frac{2^n}{3^n+1}, \\ \text{b) } b_n = \frac{2^n}{n+1}, & \text{d) } d_n = \frac{2^n}{n!}, & \text{f) } f_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{array}$$

7. Zbadać monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym

$$\text{a) } a_n = \frac{n^2}{n^2+n+2} \quad \text{b) } b_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} \quad \text{c) } c_n = \left(1 + \frac{1}{1^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Analiza matematyczna 1

Granica ciągu liczbowego

1. Korzystając z definicji granicy ciągu udowodnić, że
 - a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+3} = \frac{1}{2}$
 - b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n} = 1$
 - c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{2n^2+2} \neq 2$.
 - d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0$
 - e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{n^2+2} = 0$
 - f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n} = 0$
 - g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$
2. Korzystając z definicji granicy ciągu udowodnić, że
 - a) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^2 = \infty$
 - b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_{n+1} 5 = 0$
 - c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - 3n) = -\infty$.
3. Wykazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p}, p \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$.
4. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ (wsk: skorzystać z tw. o trzech ciągach).
5. Zbadać istnienie granic ciągów
 - a) $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{n}} \sqrt[n]{n}$
 - b) $b_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$.
6. Wiedząc, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$, czy można powiedzieć ile wynosi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$?
7. a) Jeżeli dla ciągu $\{u_n\}$ istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = q < 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$;
b) Jeżeli dla ciągu $\{u_n\}$ istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = q > 1$, to $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, zatem ciąg $\{u_n\}$ jest rozbieżny.
8. Wykazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0, p \in \mathbb{N}$.
9. Wykazać, że jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.
10. Zbadać istnienie granic ciągów
 - a) $a_n = \frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3} \right]$
 - b) $b_n = \left(\cos \frac{2\pi n}{3} \right)^n$.
11. Obliczyć granice ciągów
 - a) $a_n = \frac{(-1)^n}{3n+2}$
 - b) $b_n = \frac{3^{2n+1}-7}{9n+4}$
 - c) $c_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$
 - d) $d_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
 - e) $e_n = \frac{\sin(n!)}{n}$
 - f) $f_n = \frac{5n^6-3n^4+2}{5-10n^6}$
 - g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7}$
 - h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-2}}{\sqrt{n+10}}$
 - i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1}$
 - j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$
 - k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^{2n}-1}{4 \cdot 9^n+7}$
 - l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+4+6+\dots+2n}{n} - \frac{2n-1}{2} \right)$
 - m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{n+3}}}$
12. Wykazać, że ciąg o wyrazie ogólnym
 - a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n \cdot (n+1)}\right)$
 - b) $b_n = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{k^n}\right), k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.jest ograniczony z góry.

13. Wykazać, że ciąg o wyrazie ogólnym

a) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-2}$ b) $b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

jest ograniczony z dołu.

14. Wykazać, że ciąg $\{\cos \frac{1}{n}\}$ jest rosnący.

15. Zbadać zbieżność ciągów

a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{k^n}\right)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

b) $b_n = \left(1 + \frac{1}{1^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

c) $c_n = \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n \cdot (n+1)}\right)$.

16. Obliczyć granice ciągów

a) $a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2}$

f) $f_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^2}$

k) $k_n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}$

b) $b_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^3-1}}$

g) $g_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

l) $l_n = \frac{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

c) $c_n = 2^{-n} \cdot a \cdot \cos(n\pi)$

h) $h_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$

m) $m_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

d) $d_n = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{3}{n}}$

i) $i_n = \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}$

n) $a_n = \frac{n}{\sqrt[2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n]{n}}$

e) $e_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2+1}$

j) $j_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1}}$.

17. Obliczyć granice ciągów

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n-1}{n^4+3n+4}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3n+2}{3+4n-n^2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n-4}{4n^2-3n+2}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4+2n^3+n^2-1}{4n^3-3n+1}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(2n-5)}{n^2+3n-1}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}\right)$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^{123}}{(2n-1)^{100}(n+4)^{23}}$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2+1} - \frac{n^4}{n^2+3}\right)$

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3}}{n-1}$

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+2}-n^4}{n^3+3n-1}$

m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+3}+n^2}{n^2+3n+2}$

n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n}}$

o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+2}{3n+1}\right)^3$

p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2-3n+1}{3n^2+1}\right)^n$

q) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+3}-n}$

r) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^3+4} - n^2)$

s) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+3})$

t) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n-2}{n+10}}$

u) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$

w) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{n+1}\right)^n$

x) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2+5n})$

y) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n}{7^{n+1}}$

Analiza matematyczna 1

Indukcja matematyczna, ciągi rekurencyjne

1. Udowodnić indukcyjnie

- a) $\forall n \in \mathbb{N} \ 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- b) $\forall n \in \mathbb{N} \ 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- c) $\forall n \in \mathbb{N} \ 3 | 10^n + 4^n - 2$
- d) $\forall n \in \mathbb{N} \ 8 | 5^{2n} + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$
- e) $\forall n \in \mathbb{N} \ 11 | 2^{6n+1} + 3^{2n+2}$
- f) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ dla $x > -1$ (*nierówność Bernoulliego*)
- g) $(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2$ dla $x > -1$
- h) Niech $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+1} = a_{n+1} + a_n$ (*ciąg Fibonacciego*). Pokazać, że $2 | a_{3n}$
- i) $(x_1y_1 + \dots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$ (*nierówność Schwarza*)
- j) $\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$

Wsk: pokazać pomocniczo, że 1) $\forall k \in \mathbb{N} \ (1 + \frac{1}{k})^k < 3$; 2) $\forall k \in \mathbb{N} \ 2 \leq (1 + \frac{1}{k})^k$.

2. Obliczyć granicę ciągu danego wzorem rekurencyjnym

- a) $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}c, \quad c \in (0, 1) \\ a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}c + a_{n-1}^2 \right) \end{cases}$.

Analiza matematyczna 1

Własności zbioru liczb rzeczywistych, kresy, punkty skupienia

1. Niech $(F, +, 0, \cdot, 1)$ będzie ciałem. Pokazać, że dla dowolnych $x, y, z \in F$ zachodzi

- | | | |
|--|---|---|
| a) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$ | g) $x \neq 0 \wedge xy = 1 \Rightarrow y = x^{-1}$ | m) $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$ |
| b) $x + y = x \Rightarrow y = 0$ | h) $x \neq 0 \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x$ | n) $x > 0 \wedge y < z \Rightarrow xy < xz$ |
| c) $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ | i) $0x = 0$ | o) $x < 0 \wedge y < z \Rightarrow xy > xz$ |
| d) $-(-x) = x$ | j) $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$ | p) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ |
| e) $x \neq 0 \wedge xy = xz \Rightarrow y = z$ | k) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$ | q) $-y < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$ |
| f) $x \neq 0 \wedge xy = x \Rightarrow y = 1$ | l) $(-x)(-y) = xy$ | |

2. Wykazać, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

- | | | |
|---------------------------|--|--|
| a) $ x \geq 0$ | e) $ x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ | i) $ x - y \leq x - y \leq x + y $ |
| b) $ x = -x $ | f) $y \neq 0 \Rightarrow \left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }$ | j) $ x - y \leq x - y $ |
| c) $- x \leq x \leq x $ | g) $ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$ | k) $ x - y \leq x + y $ |
| d) $ xy = x \cdot y $ | h) $ x + y \leq x + y $ | |

3. Znaleźć kresy zbiorów

- | | |
|--|---|
| a) $A = \{k + \frac{1}{n} : k \in \{0, 1, 2\}, n \in \mathbb{N}\}$ | d) $D = \{1 + \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ |
| b) $B = \{1 + \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ | e) $E = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} : n \in \mathbb{N}\}$ |
| c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 5 < 3\}$ | |

4. Wykazać, że $\sup\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 < 3\} = \sqrt{3}$.

5. Niech $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$. Oznaczmy $A \oplus B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$, $A \otimes B = \{a \cdot b : a \in A \wedge b \in B\}$, $t \circ A = \{ta : a \in A\}$. Udowodnić, że jeżeli zbiory A i B są niepuste i ograniczone, to zbiory $A \oplus B, A \otimes B, t \circ A$ są też ograniczone oraz

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\sup(A \oplus B) = \sup A + \sup B$ | c) $\sup(A \otimes B) = \sup A \cdot \sup B,$ | $A \subseteq \mathbb{R}_+, B \subseteq \mathbb{R}_+$ |
| b) $\inf(A \oplus B) = \inf A + \inf B$ | | |

Analiza matematyczna 1

Szeregi

1. Dane są szeregi liczbowe

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{10^n} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

Wyznaczyć ich sumę częściową S_n oraz sumę S .

2. Mając sumę częściową szeregu, znaleźć jego wyraz ogólny i zbadać zbieżność

$$\text{a) } S_n = 1 - \frac{1}{n+2} \quad \text{b) } S_n = \frac{4}{n} + \frac{n+1}{n+2} \quad \text{c) } S_n = \ln \frac{n+1}{n} \quad \text{c) } S_n = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right).$$

3. Zamienić ułamki okresowe mieszane na ułamki zwykłe

$$\text{a) } 0,3(25) \quad \text{b) } 0,12(123).$$

4. Zbadać zbieżność szeregu $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$

5. Sprawdzić, czy dane szeregi spełniają warunek konieczny zbieżności

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n n} & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n!} & \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2} \right)^{2n^2+1} & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(2n+1)}{n\sqrt{n}} & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}. \end{array}$$

6. Pokazać, że jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich i takim, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący, to $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

7. Udowodnić, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ też jest zbieżny. Czy będzie to prawdą, jeżeli wyrazy a_n będą dowolne?

8. Udowodnić, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich jest ograniczony, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n}$ jest szeregiem rozbieżnym. Wykorzystać to do pokazania, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ jest rozbieżny.

9. Udowodnić, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny, to zbieżny jest też szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

10. Stosując kryterium porównawcze zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n \sqrt{n}} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

11. Zbadać zbieżność następujących szeregów

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2} & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}} & \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n^3+1)n!} & \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3+\frac{1}{n})^n} & \text{m) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} \cdot 2^n}{(6n+1) \cdot 5^n} \\ \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n} & \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n+5} & \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!} & \text{n) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2) \cdot 5^n}{\sqrt{n} \cdot 7^{(2n+3)}} \\ \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{|\sin n|} & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) & \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n} & \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right) & \text{o) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\sin \frac{1}{n}}. \end{array}$$

12. Czy następujące szeregi są zbieżne? Przy odpowiedzi wykorzystać znane kryteria. Przy szeregach naprzemiennych określić rodzaj zbieżności

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})^n}{n^n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{2n+1}}{n \cdot 3^n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^{n^2}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\log_2 n}}{n^2}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+9}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3n}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{\sqrt{n \cdot 3^{n+1}}}$

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n!}$

h) $\frac{\ln 1}{1} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} - \frac{\ln 4}{4} + \dots$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n-1)}.$

Analiza matematyczna 1

Granica i ciągłość funkcji

1. Wykazać na podstawie definicji Heinego i Cauchy'ego

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) = 0 & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{3}{5} & \text{e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x) = +\infty \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x-3} = 27 & \text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x) = +\infty & \end{array}$$

2. Obliczyć granice

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} & \text{q)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^{2x+1} & \text{j)} \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} & \text{r)} \lim_{x \rightarrow 0} \arccos \left(\frac{e^x - 1}{2x} \right) \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x \cdot \cos x}}{x^2} & \text{k)} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} & \text{s)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}) \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] & \text{l)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} & \text{t)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \sqrt{x+2} \cdot \sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} & \text{m)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{\sin(4x)} & \text{u)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}) \\ \text{f)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2} & \text{n)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} & \text{w)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}} \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} & \text{o)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x-x}} & \text{x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}} \\ \text{h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(7x)}{\operatorname{tg}(4x)} & \text{p)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x}{x - \frac{\pi}{2}} & \end{array}$$

3. Zbadać istnienie granic

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3) \sin \frac{\pi}{2x} \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow -1} \cos \frac{2\pi}{x+1} & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \text{ gdzie } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x < 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

4. Wykazać, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ dla $a > 0$ i $a \neq 1$.

5. Znaleźć granice jednostronne w punkcie $x = 0$ funkcji $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$.

6. Pokazać z definicji Heinego i Cauchy'ego ciągłość funkcji $f(x)$ w punkcie x_0

$$\text{a)} f(x) = x^3, x_0 = 0 \quad \text{b)} f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 2.$$

7. Wykazać, że jeżeli funkcja f jest ciągła w pewnym punkcie, to jest ograniczona w pewnym otoczeniu tego punktu.

8. Zbadać ciągłość następujących funkcji

$$\begin{array}{lll} \text{a)} f(x) = x - [x] & \text{d)} f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} & \text{g)} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{nx} + x e^{nx} + e^{nx} + 1}{e^{nx} + 2}, x \in \mathbb{R} \\ \text{b)} f(x) = [x] \sin(\pi x) & \text{e)} f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} & \text{h)} f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1 \\ |x - 1|, & |x| > 1 \end{cases} \\ \text{c)} f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) & \text{f)} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - x^{-x}}{n^x + n^{-x}} & \text{i)} f(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{|4x-x^3|}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\} \\ 0, & x \in \{-2, 0, 2\} \end{cases} \end{array}$$

9. Dobrać parametry a, b, c tak, aby funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ była ciągła w dziedzinie.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x \leq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \sin \frac{ax}{x}, & x < 0 \\ \frac{x^3-1}{x^2+x-2}, & 0 \leq x < 1 \\ c, & x = 1 \\ \frac{x^2+(b-1)x-b}{x-1}, & x > 1 \end{cases}.$$

10. Dane są funkcje

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -\log_{\frac{1}{2}}(x+3), & -3 < x \leq -2 \\ \frac{\pi}{2}, & -2 < x \leq 0 \\ \arctan \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \arctan(x + \frac{\pi}{2}), & x < -\frac{\pi}{2} \\ \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\operatorname{tg} x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ 1, & x \geq \pi \end{cases}$$

$$\text{c) } h(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{x+1}, & x \leq -1 \\ x^2 + (1 + \frac{\pi}{2})x - \frac{\pi}{2}, & -1 < x < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{ctg} x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 0, & \pi \leq x \leq 2\pi \\ |\sin x|, & x \geq 2\pi \end{cases}$$

Wyznaczyć punkty nieciągłości danej funkcji i określić ich rodzaj.

11. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną w następujący sposób: jeśli x jest liczbą niewymierną, to $f(x) = 0$; jeśli x jest liczbą wymierną, $x = \frac{p}{q}$ (zakładamy, że ułamek ten jest nieskracalny), to $f(x) = \frac{1}{q}$. Pokazać, że funkcja ta, zwana *funkcją Riemanna*, jest ciągła w punktach niewymiernych i nieciągła w punktach wymiernych.
12. Udowodnić, że każde równanie stopnia n nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, tzn. równanie postaci $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.
13. Dana jest funkcja $f(x) = \cos x - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x$. Wykazać, że istnieje taki punkt $c \in [0, \frac{\pi}{2})$, że $f(c) = 0$.
14. Zbadać jednostajną ciągłość następujących funkcji
- a) $f(x) = x^2, |x| \leq M = \text{const.}$ d) $f(x) = \sin \frac{1}{x}, x \in (0, 1)$ f) $f(x) = \sin^2 x, |x| < M = \text{const.}$
b) $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ e) $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$
c) $f(x) = \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}_+$ f) $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, 1)$
15. Pokazać, że jeżeli funkcje $f, g : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathcal{I}$ - przedział) są ciągłe, to funkcje $\phi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ też są ciągłe na $\mathcal{I}$.

Analiza matematyczna 1

Szeregi potęgowe

1. Wyznaczyć promień zbieżności, przedziały zbieżności oraz zbieżność szeregów na końcach przedziałów zbieżności

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} (x-4)^{2n-1}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n(3n)!} x^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{2n} (2x-3)^{2n-1}$