Wykład 2
Własności ciała liczb zespolonych

1 Moduł, sprzężenie, część rzeczywista i część urojona

Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi i niech

$$z = a + bi. \tag{1}$$

Przypomnijmy, że liczbą sprzężoną do z jest $\overline{z} = a - bi$. Ponadto **częścią rzeczywistą** liczby z jest liczba (rzeczywista) $re(z) = a$, zaś **częścią urojoną** liczby z jest liczba (rzeczywista) $im(z) = b$.

Modułem liczby z postaci (1) nazywamy liczbę rzeczywistą nieujemną

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{2}$$

Z tych określeń mamy od razu, że

$$re(z) \leq |z| \text{ oraz } im(z) \leq |z|, \tag{3}$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2. \tag{4}$$

Twierdzenie 2.1. Dla dowolnych liczb zespolonych $z, w, z_1, \ldots, z_n$ zachodzą następujące wzory:

$$\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_n} \tag{5}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n} \tag{6}$$

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n \tag{7}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, \ w \neq 0. \tag{8}$$

Dowód. (5). Istnieją liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ takie, że $z_k = a_k + b_k i$ dla $k = 1, \ldots, n$. Zatem $z_1 + \ldots + z_n = (a_1 + b_1 i) + \ldots + (a_n + b_n i) = (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n)i$, skąd $\overline{z_1 + \ldots + z_n} = (a_1 + \ldots + a_n) - (b_1 + \ldots + b_n)i$ oraz $\overline{z_1} + \ldots + \overline{z_n} = (a_1 - b_1 i) + \ldots + (a_n - b_n i) = (a_1 + \ldots + a_n) - (b_1 + \ldots + b_n)i$, skąd mamy wzór (5).

(6). Dla $n = 2$ istnieją liczby rzeczywiste a_1, a_2, b_1, b_2 takie, że $z_1 = a_1 + b_1 i$ oraz $z_2 = a_2 + b_2 i$. Stąd $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$, czyli $\overline{z_1 \cdot z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$ oraz $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$, czyli teza zachodzi dla $n = 2$. Załóżmy teraz, że teza zachodzi dla pewnego naturalnego n. Wówczas dla liczb zespolonych $z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}$ na mocy pierwszej części dowodu mamy, że $\overline{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n \cdot z_{n+1}} = \overline{(z_1 \cdot \ldots \cdot z_n) \cdot z_{n+1}} = \overline{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n} \cdot \overline{z_{n+1}}$, więc na mocy założenia indukcyjnego $\overline{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n \cdot z_{n+1}} = \overline{z_1} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n} \cdot \overline{z_{n+1}}$. Stąd na mocy zasady indukcji mamy tezę.

(7). Wystarczy w poprzednim wzorze podstawić $z = z_1 = \ldots = z_n$.

(8). Ponieważ $w \neq 0$, więc też $\overline{w} \neq 0$ (dlaczego?). Z (5) mamy, że $\overline{z} = \overline{w \cdot \frac{z}{w}} = \overline{w} \cdot \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$, skąd po podzieleniu obu stron przez $\overline{w}$ uzyskamy tezę. □

Twierdzenie 2.2. Dla dowolnych liczb zespolonych $z, w, z_1, \ldots, z_n$ zachodzą następujące wzory:

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \tag{9}$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},\ w \neq 0 \tag{10}$$

$$|z^n| = |z|^n \tag{11}$$

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| \tag{12}$$

$$|z - w| = \text{odległość punktu } z \text{ od punktu } w. \tag{13}$$

Dowód. (9). Na mocy wzorów (4) i (5): $|z_1 \cdot \ldots \cdot z_n|^2 = (z_1 \cdot \ldots \cdot z_n) \cdot \overline{(z_1 \cdot \ldots \cdot z_n)} = z_1 \cdot \ldots \cdot z_n \cdot \overline{z_1} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n} = (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot \ldots \cdot (z_n \cdot \overline{z_n}) = |z_1|^2 \cdot \ldots \cdot |z_n|^2$, skąd po spierwiastkowaniu obu stron uzyskamy tezę.

(10). Ponieważ $w \neq 0$, więc też $|w| \neq 0$ (dlaczego?). Na mocy wzoru (9) $|z| = \left|w \cdot \frac{z}{w}\right| = |w| \cdot \left|\frac{z}{w}\right|$, więc po podzieleniu obu stron przez $|w|$ uzyskamy tezę.

(11). Wystarczy podstawić $z = z_1 = \ldots = z_n$ we wzorze (9).

(12). Stosujemy indukcję względem n. Niech $n = 2$. Jeśli $z_1 + z_2 = 0$, to nasz wzór zachodzi. Załóżmy dalej, że $z_1 + z_2 \neq 0$. Wtedy $|z_1 + z_2| > 0$. Ponadto $1 = re\left(\frac{z_1}{z_1+z_2} + \frac{z_2}{z_1+z_2}\right) = re\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) + re\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right) \leq \left|\frac{z_1}{z_1+z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1+z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_1+z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1+z_2|}$, skąd po pomnożeniu obu stron przez $|z_1 + z_2|$ uzyskamy tezę dla $n = 2$.

Załóżmy teraz, że nasza nierówność zachodzi dla pewnej liczby naturalnej n i niech $z_1, \ldots, z_{n+1}$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Wówczas z pierwszej części dowodu i z założenia indukcyjnego mamy, że $|z_1 + \ldots + z_{n+1}| = |(z_1 + \ldots + z_n) + z_{n+1}| \leq |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|$, czyli nasza nierówność zachodzi dla liczby $n+1$. Stąd na mocy zasady indukcji mamy tezę.

(13). Istnieją liczby rzeczywiste a_1, a_2, b_1, b_2 takie, że $z = a_1 + b_1 i \equiv (a_1, b_1)$ oraz $w = a_2 + b_2 i \equiv (a_2, b_2)$. Ponadto $z - w = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$, więc $|z - w| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$. Zatem z geometrii analitycznej mamy tezę. □

Przykład 2.3. Wyznaczymy wszystkie liczby zespolone z takie, że

$$|z| + \overline{z} = 2 + i.$$

W tym celu zapiszmy liczbę z w postaci algebraicznej $z = x + yi$, gdzie x, y są szukanymi liczbami rzeczywistymi. Ponieważ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\overline{z} = x - yi$, więc nasze równanie przybiera postać

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x - yi = 2 + i,$$

czyli

$$(\sqrt{x^2 + y^2} + x) + (-y)i = 2 + i.$$

Zatem $\sqrt{x^2+y^2}+x=2$ oraz $-y=1$. Stąd $y=-1$ oraz $\sqrt{x^2+1}=2-x$. Po podniesieniu stronami do kwadratu ostatniej równości uzyskamy, że $x^2+1=4-4x+x^2$, skąd $x=\frac{3}{4}$. Zatem jedynym rozwiązaniem naszego równania jest $z=\frac{3}{4}-i$.□

2 Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z \neq 0$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Wtedy istnieją liczby rzeczywiste a, b takie, że $z=a+bi$ oraz $a\neq 0$ lub $b\neq 0$. Liczbę z możemy traktować jako punkt (a,b) płaszczyzny, którego odległość od punktu $(0,0)$ jest równa $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Oznaczmy przez ϕ miarę kąta skierowanego jaki tworzy wektor $\overrightarrow{Oz}$ z osią OX w orientacji płaszczyzny przeciwnej do ruchów wskazówek zegara. Wtedy mamy, że $\phi \in \langle 0, 2\pi)$ oraz

$$\begin{array}{l} \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}.$$

Otrzymujemy stąd wzór

$$z=|z|(\cos\phi + i\sin\phi), \tag{14}$$

który nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej z. Liczbę ϕ nazywamy **argumentem głównym** liczby z i oznaczamy przez $\mathrm{Arg}(z)$. Natomiast każdą liczbę rzeczywistą $\alpha=\phi+2k\pi$ dla całkowitych k nazywamy **argumentem** liczby z i oznaczamy przez $\arg(z)$. Oczywiście dla takich α mamy, że $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$. Możemy więc napisać wzór

$$z=|z|[\cos\arg(z)+i\sin\arg(z)].$$

Na odwrót, niech r będzie dodatnią liczbą rzeczywistą i niech β będzie liczbą rzeczywistą taką, że $z=r(\cos\beta+i\sin\beta)$. Wówczas $|z|=|r|\cdot|\cos\beta+i\sin\beta|=r\cdot\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta}=r$, skąd $\cos\beta=\cos\phi$ oraz $\sin\beta=\sin\phi$, więc z trygonometrii mamy, że istnieje liczba całkowita k taka, że $\beta=\phi+2k\pi$.

Dla niezerowych liczb zespolonych z, w równość $\arg(z)=\arg(w)$ będziemy dalej rozumieli w ten sposób, że liczby $\arg(z)$ i $\arg(w)$ różnią się jedynie o całkowitą wielokrotność liczby 2π.

Przykład 2.4. Zauważmy, że $1=\cos 0+i\cdot\sin 0$, $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}$, $1+i=\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$, $\sqrt{3}+i=2\cdot(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$.□

Twierdzenie 2.5. Dla dowolnych niezerowych liczb zespolonych z, w zachodzą wzory:

$$\arg(z\cdot w)=\arg(z)+\arg(w) \tag{15}$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right)=\arg(z)-\arg(w). \tag{16}$$

Dowód. (15). Oznaczmy $\arg(z)=\alpha$, $\arg(w)=\beta$. Wtedy $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ oraz $w=|w|(\cos\beta+i\sin\beta)$. Zatem $z\cdot w=|z|\cdot|w|((\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)+i(\cos\alpha\cdot\sin\beta+\cos\beta\cdot\sin\alpha))=|z|\cdot|w|[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]$, na mocy znanych wzorów trygonometrycznych. Stąd rzeczywiście $\arg(z\cdot w)=\arg(z)+\arg(w)$.

(16). Ponieważ $z = w \cdot \frac{z}{w}$, więc ze wzoru (15), $\arg(z) = \arg(w) + \arg(\frac{z}{w})$, skąd $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$. $\square$

Z twierdzenia 2.5 przez prostą indukcję uzyskujemy następujące

Twierdzenie 2.6 (Wzór de Moivre'a). Dla dowolnej liczby rzeczywistej α i dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi wzór:

$$(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i \cdot \sin n\alpha. \tag{17}$$

Przykład 2.7. Obliczymy $(\sqrt{3} + i)^{2003}$. Ponieważ $\sqrt{3} + i = 2 \cdot (\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6})$, więc ze wzoru de Moivre'a $(\sqrt{3}+i)^{2003} = 2^{2003} \cdot (\cos 2003 \cdot \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin 2003 \cdot \frac{\pi}{6})$. Ale $2003 \cdot \frac{\pi}{6} = 332\pi + \frac{11\pi}{6}$, więc $\cos 2003 \cdot \frac{\pi}{6} = \cos\frac{11\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{-\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $\sin 2003 \cdot \frac{\pi}{6} = \sin(\frac{-\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$. Zatem $(\sqrt{3} + i)^{2003} = 2^{2002} \cdot (\sqrt{3} - i)$.$\square$

Ze wzorów (9) i (15) otrzymujemy natychmiast, że aby pomnożyć niezerowe liczby zespolone należy pomnożyć ich moduły i dodać ich argumenty. Niech z_0 będzie ustaloną niezerową liczbą zespoloną. Wówczas ze wzoru (15) wynika, że przekształcenie $z \mapsto z_0 \cdot z$ dla zespolonych z jest złożeniem obrotu o kąt o mierze $\mathrm{Arg}(z_0)$ i jednokładności o środku O i skali $|z_0|$.

3 Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby zespolonej z nazywamy każdą taką liczbę zespoloną w, że $w^n = z$. Piszemy wtedy: $w = \sqrt[n]{z}$. Jedynym pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby 0 jest 0.

Pierwiastki kwadratowe z liczby $z = a+bi$ (gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi) znajdujemy w postaci $w = x + yi$, gdzie x i y są szukanymi liczbami rzeczywistymi. Sprowadza się to do rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}. \tag{18}$$

Jeżeli $z \neq 0$ i $w^2 = z$, to wszystkimi pierwiastkami kwadratowymi z liczby z są: w, $-w$.

Przykład 2.8. Obliczymy pierwiastki kwadratowe z liczby $z = 11 + 60i$. W tym celu rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ 2xy = 60 \end{cases}.$$

Najpierw próbujemy wyznaczyć całkowite rozwiązanie tego układu (gdyby to zawiodło, to z drugiego równania wyliczamy y i podstawiamy do równania pierwszego). W tym celu z drugiego równania otrzymujemy, że $xy = 30$. Zatem liczby x, y mają ten sam znak i możemy założyć, że $x, y \in \mathbb{N}$. Teraz wyznaczamy wszystkie dzielniki naturalne liczby 30: 1,2,3,5,6,10,15,30. Po uwzględnieniu pierwszego równania mamy, że $x > y$, więc $x \in \{6, 10, 15, 30\}$, skąd $x = 6$ i $y = 5$. Zatem wszystkimi pierwiastkami kwadratowymi z liczby z są: $6 + 5i$ oraz $-6 - 5i$.$\square$

Przy wyznaczaniu pierwiastków kwadratowych z liczb zespolonych możemy też posługiwać się następującym twierdzeniem:

Twierdzenie 2.9. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b wszystkie pierwiastki kwadratowe z liczby zespolonej $z = a + bi$ dane są wzorami:

$$\omega = \pm \begin{cases} \sqrt{a} & \text{jeśli} \quad b = 0 \text{ i } a \geq 0 \\ \sqrt{-a} \cdot i & \text{jeśli} \quad b = 0 \text{ i } a < 0 \\ \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + sgn(b) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \cdot i & \text{jeśli} \quad b \neq 0 \end{cases} . \tag{19}$$

Przy czym

$$sgn(b) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad b > 0 \\ 0 & \text{jeśli} \quad b = 0 \\ -1 & \text{jeśli} \quad b < 0 \end{cases} . \tag{20}$$

Dowód. Dla $a \geq 0$ i $b = 0$ mamy, że $(\sqrt{a})^2 = a = a + bi$. Dla $a < 0$ i $b = 0$ jest $-a > 0$ oraz $(\sqrt{-a} \cdot i)^2 = (-a) \cdot (-1) = a = a + bi$. Dla $b \neq 0$ mamy, że $\sqrt{a^2 + b^2} \pm a > 0$. Oznaczmy $x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$, $y = sgn(b) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$. Wtedy $x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} = a$ oraz $2xy = 2sgn(b) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} = 2sgn(b) \cdot \frac{\sqrt{b^2}}{2} = sgn(b) \cdot |b| = b$. Zatem $(x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi$. Kończy to dowód pierwszej części twierdzenia.

Zauważmy, że $(-\omega)^2 = \omega^2 = a + bi$. Jeśli zaś $z \in \mathbb{C}$ jest takie, że $z^2 = a + bi$, to $z^2 = \omega^2$, skąd $0 = z^2 - \omega^2 = (z - \omega) \cdot (z + \omega)$, więc $z = \omega$ lub $z = -\omega$. Zatem wzór (19) jest udowodniony. □

Przykład 2.10. Wyznaczymy wszystkie pierwiastki kwadratowe z liczby $z = 2 + 3i$. Mamy tutaj $b = 3 > 0$, więc $sgn(b) = 1$. Ponadto $a = 2$, więc $a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$. Zatem $\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + sgn(b) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \cdot i = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}} i$. Stąd wszystkimi pierwiastkami kwadratowymi z liczby z są: $\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}} i$ oraz $-\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}} i$. □

Pierwiastki wyższych stopni $n \geq 3$ z liczby zespolonej $z \neq 0$ obliczamy zapisując najpierw tę liczbę w postaci trygonometrycznej (14). Wówczas zachodzi następujące

Twierdzenie 2.11. Jeśli z jest niezerową liczbą zespoloną oraz $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$, to istnieje dokładnie n różnych pierwiastków n-tego stopnia z liczby z i wszystkie te pierwiastki dają się ująć wzorem

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{21}$$

Dowód. Ze wzoru de Moivre'a dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$ mamy, że $\omega_k^n = |z|[\cos(\phi + 2k\pi) + i \sin(\phi + 2k\pi)] = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) = z$, więc liczby (21) są pierwiastkami n-tego stopnia z liczby z. Niech teraz $k, l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ będą takie, że $\omega_k = \omega_l$. Wówczas istnieje liczba całkowita t taka, że $\frac{\phi+2k\pi}{n} - \frac{\phi+2l\pi}{n} = 2t\pi$, skąd $k - l = t \cdot n$. Ale $-n < k - l < n$, więc $t = 0$ i $k = l$. Zatem liczby (21) są parami różne.

Niech teraz ω będzie pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby z. Ponieważ $z \neq 0$, więc też $\omega \neq 0$. Zatem istnieje liczba rzeczywista α taka, że $\omega = |\omega|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Stąd ze wzoru de Moivre'a mamy, że $z = \omega^n = |\omega|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$. Zatem $|\omega|^n = |z|$ oraz $n\alpha = \phi + 2s\pi$ dla pewnego całkowitego s. Dzieląc s przez n z resztą uzyskamy, że istnieje liczba całkowita q i istnieje $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ takie, że $s = qn + k$. Zatem $\alpha = \frac{\phi+2k\pi}{n} + 2q\pi$, skąd wynika, że $\omega = \omega_k$.

Kończy to dowód naszego twierdzenia. $\square$

4 Równanie kwadratowe

Równanie kwadratowe

$$az^2 + bz + c = 0, \ a \neq 0 \tag{22}$$

posiada zawsze rozwiązanie w liczbach zespolonych z dla dowolnych ustalonych liczb zespolonych a, b, c. Mianowicie obliczamy najpierw $\Delta = b^2 - 4ac$. Następnie wyznaczamy $w = \sqrt{\Delta}$. Wówczas wszystkimi zespolonymi pierwiastkami równania (22) są:

$$z_1 = \frac{-b-w}{2a}, \ z_2 = \frac{-b+w}{2a}. \tag{23}$$

Bardzo ważną własność liczb zespolonych wyraża następujące

Twierdzenie 2.12 (Zasadnicze twierdzenie algebry). Dla dowolnej liczby naturalnej n i dla dowolnych liczb zespolonych a_0, a_1,...,a_n, takich że $a_n \neq 0$ równanie algebraiczne

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

posiada pierwiastek zespolony.

Dowód zasadniczego twierdzenia algebry jest dość długi i nie będzie tu przedstawiony. Warto zaznaczyć, że pierwszy pełny dowód tego twierdzenia był treścią rozprawy doktorskiej słynnego matematyka niemieckiego K. F. Gaussa. Ciekawostką jest też to, że tego twierdzenia nie da się udowodnić czysto algebraicznymi metodami bez odwoływania się do pojęć analizy matematycznej!

5 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 2.13. Udowodnij tożsamości:
a) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, b) $|1 + z_1\overline{z_2}|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2) \cdot (1 + |z_2|^2)$,
c) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$, d) $\frac{|1-z^2|^2 - |z-\overline{z}|^2}{|1+z^2|^2 + |z-\overline{z}|^2} = \left(\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)^2$.

Zadanie 2.14. Rozwiąż równania:
a) $|z| - z = 1 + 2i$, b) $|z| + z = 2 + i$, c) $z\overline{z} + (z - \overline{z}) = 3 + 2i$,
d) $i(z + \overline{z}) + i(z - \overline{z}) = 2i - 3$, e) $z^2 = \overline{z}$, f) $|z| + 2iz = 11 + 8i$.

Odp. a) $z = \frac{3}{2} - 2i$. b) $z = \frac{3}{4} + 1$. c) $z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}i$ lub $z = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}i$ lub $z = \frac{-\sqrt{5}+1}{2} + \frac{-\sqrt{5}+1}{2}i$ lub $z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}i$.
d) $z = 1 + \frac{3}{2}i$. e) $z = 0$ lub $z = 1$ lub $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ lub $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. f) $z = 4 - \frac{35}{3}i$ lub $z = 4 - 3i$.

Zadanie 2.15. Przedstaw w postaci algebraicznej pierwiastki kwadratowe z następujących liczb zespolonych:
a) i, b)$-i$, c) $8+6i$, d) $8-6i$, e) $-8+6i$, f) $-8-6i$, g) $3+4i$,
h) $-11+60i$, i) $-15-8i$.

Odp. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ oraz $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$. b) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ oraz $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$. c) $3+i$ oraz $-3-i$. d) $3-i$ oraz $-3+i$. e) $1+3i$ oraz $-1-3i$.
f) $1-3i$ oraz $-1+3i$. g) $2+i$ oraz $-2-i$. h) $5+6i$ oraz $-5-6i$.
i) $1-4i$ oraz $-1+4i$.

Zadanie 2.16. Rozwiąż równania kwadratowe:
a) $z^2-3z+3+i=0$, b) $z^2+(1+4i)z-(5+i)=0$,
c) $(4-3i)z^2-(2+11i)z-(5+i)=0$, d) $z^2+2(1+i)z+2i=0$,
e) $z^2-5z+4+10i=0$, f) $z^2-2z=2i-1$.

Odp. a) $z_1=1+i$ oraz $z_2=2-i$. b) $z_1=-2-3i$ oraz $z_2=1-i$. c) $z_1=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$ oraz $z_2=-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$. d) $z_1=z_2=-1-i$. e) $z_1=2i$ oraz $z_2=5-2i$. f) $z_1=2+i$ oraz $z_2=-i$.

Zadanie 2.17. Przedstaw w postaci trygonometrycznej (bez pomo-cy tablic) następujące liczby zespolone:
a) 1, -1, i, $-i$, b) $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$, c) $1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$, d) $\sqrt{3}+i$, $\sqrt{3}-i$, $-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$.

Odp. a) $1=1\cdot(\cos 0+i\sin 0)$, $-1=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)$,
$i=1\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$, $-i=1\cdot(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$.
b) $1+i=\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$, $1-i=\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2})$,
$-1+i=\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$, $-1-i=\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$. c) $1+i\sqrt{3}=2\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$, $1-i\sqrt{3}=2\cdot(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$, $-1+i\sqrt{3}=2\cdot(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$, $-1-i\sqrt{3}=2\cdot(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$.
d) $\sqrt{3}+i=2\cdot(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$, $\sqrt{3}-i=2\cdot(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$, $-\sqrt{3}+i=2\cdot(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$, $-\sqrt{3}-i=2\cdot(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$.

Zadanie 2.18. Wykonaj działania, stosując przedstawienie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej:
a) $(1+i)^{10}$, b) $(1+i\sqrt{3})^{15}$, c) $\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{1996}$, d) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

Odp. a) $32i$. b) 32768. c) $-\frac{1}{2^{989}}-\frac{\sqrt{3}}{2^{989}}i$. d) -64.

Zadanie 2.19. Oblicz bez pomocy tablic pierwiastki 3-go stopnia z następujących liczb zespolonych:
a) 1, b) -1, c) i, d) $-i$.

Odp. 1, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. b) -1, $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. c) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $-i$. d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, i.