Wykład 3
Wielomiany i ułamki proste

1 Konstrukcja pierścienia wielomianów

Niech P będzie dowolnym pierścieniem, w którym $0 \neq 1$. Oznaczmy przez $P[x]$ zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wszystkich wyrazach z P

$$f = (f_0, f_1, f_2, \ldots) \tag{1}$$

takich, że $0 = f_k = f_{k+1} = f_{k+2} = \ldots$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0$.
Elementy zbioru $P[x]$ nazywamy **wielomianami** zmiennej x o współczynnikach z pierścienia P. Przyjmujemy umowę, że jeśli wielomian nazywa się g, to $g = (g_0, g_1, \ldots)$, czyli $g_0, g_1, \ldots$ są jego kolejnymi współczynnikami. Przy tych oznaczeniach dla wielomianów $f, g \in P[x]$ mamy

$$f = g \Leftrightarrow f_i = g_i \text{ dla każdego } \ i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Wielomian $0 = (0, 0, \ldots)$ nazywamy **zerowym**, zaś $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ nazywamy **jedynkowym**. Jeżeli $0 = f_1 = f_2 = \ldots$ to wielomian f nazywamy **stałym**. **Wyrazem wolnym** wielomianu f postaci (1) jest współczynnik f_0. Jeżeli $f \neq 0$, to istnieje największe n takie, że $f_n \neq 0$ i wówczas n nazywamy **stopniem wielomianu** f i piszemy $st(f) = n$, zaś f_n nazywamy **najstarszym współczynnikiem** tego wielomianu. Ponadto przyjmujemy, że $st(0) = -\infty$ oraz $-\infty < n$ dla $n \in \mathbb{N}_0$ i $(-\infty) + +n = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$ dla $n \in \mathbb{N}_0$.

Sumą wielomianów $f, g \in P[x]$ nazywamy ciąg $f + g$ określony następująco:

$$f + g = (f_0 + g_0, g_1 + f_1, f_2 + g_2, \ldots). \tag{3}$$

Łatwo wykazać, że dla dowolnych $f, g \in P[x]$ mamy, że $f + g \in P[x]$ oraz zachodzi wzór:

$$st(f + g) \leq \max\{st(f), st(g)\}. \tag{4}$$

Jeżeli zaś $st(f) < st(g)$, to oczywiście $st(f + g) = st(g)$.

Iloczynem wielomianów $f, g \in P[x]$ nazywamy ciąg $f \cdot g$ określony wzorem:

$$f \cdot g = (f_0 g_0, f_0 g_1 + f_1 g_0, f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0, \ldots). \tag{5}$$

Zatem dla każdego $n = 0, 1, \ldots$

$$(f \cdot g)_n = \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i} = \sum_{i+j=n} f_i g_j. \tag{6}$$

Zauważmy, że $f \cdot g \in P[x]$. Rzeczywiście, istnieją $k, l \in \mathbb{N}_0$ takie, że $f_i = 0$ dla wszystkich $i > k$ oraz $g_j = 0$ dla wszystkich $j > l$. Weźmy dowolne $n > k + l$ oraz $i, j \in \mathbb{N}_0$ takie, że $i + j = n$.

Jeśli $i > k$, to $f_i = 0$, więc $f_i g_j = 0$; jeśli zaś $i \leq k$, to $j = n - i \geq n - k > k + l - k = l$, więc $g_j = 0$, czyli $f_i g_j = 0$. Stąd dla $n > k + l$ jest $(f \cdot g)_n = \sum_{i+j=n} f_i g_j = 0$ i $f \cdot g \in P[x]$.

Jeżeli $f_i = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots$ to ze wzoru (5) mamy

$$(f_0, 0, 0, \ldots) \cdot (g_0, g_1, \ldots) = (f_0 g_0, f_0 g_1, f_0 g_2, \ldots). \tag{7}$$

Jeżeli zaś $f_1 = 1$ oraz $f_i = 0$ dla $i = 0, 2, 3, \ldots$ to ze wzoru (5) wynika, że

$$(0, 1, 0, 0, \ldots) \cdot (g_0, g_1, \ldots) = (0, g_0, g_1, \ldots). \tag{8}$$

Niech teraz $f, g \in P[x] \setminus \{0\}$ i $n = st(f)$, $m = st(g)$. Wtedy z wcześniejszych wyliczeń mamy, że $(f \cdot g)_k = 0$ dla wszystkich $k > n + m$. Stąd i z (6) mamy

$$\forall_{f,g \in P[x]}\; st(f \cdot g) \leq st(f) + st(g). \tag{9}$$

Można udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1. *System algebraiczny $(P[x], +, \cdot, 0, 1)$ tworzy pierścień.*

Ten pierścień nazywamy **pierścieniem wielomianów zmiennej** x o współczynnikach z pierścienia P.

Mówimy, że $a \in P$ jest **elementem regularnym** pierścienia P, jeżeli dla dowolnego $x \in P$ z tego, że $a \cdot x = 0$ wynika, że $x = 0$. Zauważmy, że każdy niezerowy element ciała K jest elementem regularnym. Natomiast 2 nie jest elementem regularnym pierścienia $\mathbb{Z}_6$, bo $2 \cdot_6 3 = 0$. Pierścień P, w którym $0 \neq 1$ i każdy niezerowy element jest regularny nazywamy **dziedziną całkowitości**. Przykładem dziedziny całkowitości, która nie jest ciałem jest pierścień liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

Stwierdzenie 3.2. *Niech $f, g \in P[x] \setminus \{0\}$ będą takie, że najstarszy współczynnik wielomianu f lub najstarszy współczynnik wielomianu g jest elementem regularnym pierścienia P. Wtedy $st(f \cdot g) = st(f) + st(g)$ oraz najstarszy współczynnik wielomianu $f \cdot g$ jest iloczynem najstarszych współczynników wielomianów f i g.*

Dowód. Oznaczmy $n = st(f)$, $m = st(g)$. Weźmy dowolne $i, j \in \mathbb{N}_0$ takie, że $i + j = n + m$. Jeśli $i < n$, to $j = n + m - i > m$, skąd $g_j = 0$ oraz $f_i g_j = 0$. Jeśli $i > n$, to $f_i = 0$, więc $f_i g_j = 0$. Zatem ze wzoru (5) mamy, że $(f \cdot g)_{n+m} = f_n g_m \neq 0$, bo $f_n \neq 0$, $g_m \neq 0$ oraz f_n lub g_m jest elementem regularnym. Stąd ze wzoru (8) wynika teza naszego stwierdzenia. □

Wniosek 3.3. *Jeżeli P jest dziedziną całkowitości, to $st(f \cdot g) = st(f) + st(g)$ dla dowolnych $f, g \in P[x]$.*

Ze wzorów (3) i (6) wynika od razu, że dla dowolnych $a, b \in P$:

$$(a, 0, 0, \ldots) = (b, 0, 0, \ldots) \Leftrightarrow a = b, \;\; (a, 0, 0, \ldots) + (b, 0, 0, \ldots) = (a + b, 0, 0, \ldots)$$

oraz $(a, 0, 0, \ldots) \cdot (b, 0, 0, \ldots) = (a \cdot b, 0, 0, \ldots)$. Z tego powodu można dokonać utożsamienia

$$(a, 0, 0, \ldots) \equiv a \text{ dla } a \in P. \tag{10}$$

Przy takim utożsamieniu $P \subseteq P[x]$, a nawet P jest podpierścieniem pierścienia $P[x]$.

Wprowadźmy teraz oznaczenie:

$$x = (0, 1, 0, 0, \ldots). \tag{11}$$

Wówczas ze wzoru (8) przez prostą indukcję uzyskamy, że

$$x^n = (0, 0, \ldots, 0, \overset{n}{1}, 0, \ldots) \text{ dla } n = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

Niech $f \in P[x]$ będzie wielomianem stopnia $n \geq 1$. Wtedy $f_n \neq 0$ oraz $f_i = 0$ dla każdego $i \geq n+1$. Ponadto ze wzorów (6) i (12) mamy, że $(f_k, 0, 0, \ldots) \cdot x^k = (0, \ldots, 0, \overset{k}{f_k}, 0, \ldots)$ dla $k = 1, 2, \ldots$ więc $f = (f_0, 0, 0, \ldots) + (0, f_1, 0, \ldots) + \ldots + (0, 0, \ldots, f_n, 0, \ldots) \equiv f_0 + f_1 x + + f_2 x^2 + \ldots + f_n x^n$. Ponieważ dla wielomianu stałego f jest $f \equiv f_0$, więc dla dowolnego wielomianu $f \in P[x]$ stopnia $n \geq 0$ mamy utożsamienie:

$$f \equiv f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots + f_n x^n. \tag{13}$$

Otrzymujemy w ten sposób naturalną notację dla wielomianów z pierścienia $P[x]$. Przy tej notacji możemy powiedzieć, że wielomiany $f, g \in P[x]$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $st(f) = st(g)$ oraz $f_i = g_i$ dla każdego i.

Z wniosku 3.3 i tego, że pierścień P jest podpierścieniem pierścienia $P[x]$ wynika od razu następujące

Twierdzenie 3.4. *Jeżeli pierścień P jest dziedziną całkowitości, to $P[x]$ też jest dziedziną całkowitości.*

Definicja 3.5. *Wartością wielomianu* $f = f_0 + f_1 x + \ldots + f_n x^n \in P[x]$ w punkcie $a \in P$ nazywamy $f(a) = f_0 + f_1 a + \ldots + f_n a^n$.

Definicja 3.6. *Pierwiastkiem wielomianu* $f \in P[x]$ nazywamy takie $a \in P$, że $f(a) = 0$.

Definicja 3.7. Wielomiany $f, g \in P[x]$ nazywamy *równymi funkcyjnie*, jeżeli

$$f(a) = g(a) \text{ dla każdego } a \in P.$$

Przykład 3.8. Niech P będzie niezerowym pierścieniem skończonym o n elementach oraz $P = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Ponieważ $0 \neq 1$ w P, więc 1 jest elementem regularnym w P i na mocy stwierdzenia 1 mamy, że wielomian $f = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) \in P[x]$ ma stopień n. Ponadto $f(a) = 0$ dla każdego $a \in P$, więc wielomiany f i 0 są równe funkcyjnie, chociaż $f \neq 0$. Z tego powodu wielomiany nad dowolnym pierścieniem P nie mogą być traktowane jako funkcje wielomianowe z pierścienia P w pierścień P.

Twierdzenie 3.9. *Jeżeli P jest nieskończoną dziedziną całkowitości oraz wielomiany $f, g \in P[x]$ są równe funkcyjnie, to $f = g$.*

2 Dzielenie wielomianów

Definicja 3.10. Niech P będzie pierścieniem, który może nie być dziedziną całkowitości. Powiemy, że w pierścieniu $P[x]$ jest wykonalne dzielenie z resztą przez wielomian $f \in P[x]$, jeżeli dla każdego wielomianu $g \in P[x]$ istnieje dokładnie jedna para (q, r) wielomianów $q, r \in P[x]$ taka, że $g = q \cdot f + r$ oraz $st(r) < st(f)$.

Uwaga 3.11. Ponieważ $st(0) = -\infty$, więc dla powyższych f jest $f \neq 0$.

Uwaga 3.12. Wielomian r nazywamy *resztą*, zaś q nazywamy *niepełnym ilorazem* z dzielenia wielomianu g przez wielomian f.

Twierdzenie 3.13. *Dla dowolnego pierścienia P i dla dowolnego wielomianu $f \in P[x]$ równo-ważne są warunki:*
(i) w pierścieniu $P[x]$ jest wykonalne dzielenie z resztą przez wielomian f;
(ii) najstarszy współczynnik wielomianu f jest elementem odwracalnym w P.

Uwaga 3.14. Algorytm dzielenia wielomianów z resztą znany ze szkoły średniej jest dobry dla dowolnego pierścienia wielomianów.

Uwaga 3.15. Wielomian $f \in P[x]$ o najstarszym współczynniku równym 1 nazywamy *wielomianem unormowanym.* Z twierdzenia 3.1 w pierścieniu $P[x]$ jest wykonalne dzielenie z resztą przez wielomiany unormowane.

Twierdzenie 3.16. (Bezout). *Dla dowolnego wielomianu $g \in P[x]$ i dla dowolnego $a \in P$ reszta z dzielenia wielomianu g przez dwumian $x - a$ jest równa $g(a)$, tzn. istnieje wielomian $q \in P[x]$ taki, że $g = q \cdot (x - a) + g(a)$.*
Dowód. Z uwagi 3.15 istnieją $q, r \in P[x]$ takie, że $g = q \cdot (x - a) + r$ i $st(r) < 1 = st(x - a)$. Stąd $r \in P$ i $g(a) = q(a) \cdot (a - a) + r = r$, czyli $r = g(a)$ i $g = q \cdot (x - a) + g(a)$. □

Definicja 3.17. Niech $f, g \in P[x]$. Powiemy, że wielomian f dzieli wielomian g w pierścieniu $P[x]$ i piszemy $f \mid g$, jeżeli istnieje wielomian $h \in P[x]$ taki, że $g = f \cdot h$.

Wniosek 3.18. *Dla dowolnego wielomianu $f \in P[x]$ i dla dowolnego $a \in P$ mamy*

$$x - a \mid g \;\text{ w pierścieniu }\; P[x] \Leftrightarrow g(a) = 0.$$

Dowód. Jeżeli $x - a \mid g$ w pierścieniu $P[x]$, to istnieje $q \in P[x]$ takie, że $g = q \cdot (x - a)$, skąd $g(a) = q(a) \cdot (a - a) = 0$. Na odwrót, niech $g(a) = 0$. Wtedy z twierdzenia Bezout istnieje $q \in P[x]$ takie, że $g = q \cdot (x - a)$, czyli $x - a \mid g$. □

Stwierdzenie 3.19. *Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą parami różnymi elementami dziedziny całkowitości P. Wówczas dla dowolnego wielomianu $f \in P[x]$ równoważne są warunki:*
(i) $(x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) \mid f$ w pierścieniu $P[x]$;
(ii) $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = 0$.
Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii) Z założenia istnieje $h \in P[x]$ taki, że $f = h \cdot (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$, skąd $f(a_i) = h(a_i) \cdot (a_i - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_i - a_i) \cdot \ldots \cdot (a_i - a_n) = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Stosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza wynika od razu z wniosku 3.18. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnego naturalnego n i niech $a_1, \dots, a_{n+1}$ będą parami różnymi elementami pierścienia P takimi, że $f(a_1) = \dots = f(a_{n+1}) = 0$. Wtedy z założenia indukcyjnego istnieje $g \in P[x]$ takie, że $f = g \cdot (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$. Ale $0 = f(a_{n+1}) = g(a_{n+1}) \cdot (a_{n+1} - a_1) \cdot \dots \cdot (a_{n+1} - a_n)$, więc ponieważ P jest dziedziną całkowitości, to $g(a_{n+1}) = 0$ i z wniosku 3.3 istnieje $h \in P[x]$ taki, że $g = h \cdot (x - a_{n+1})$. Zatem $f = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n) \cdot (x - a_{n+1})$, czyli $(x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_{n+1}) \mid f$. □

Wniosek 3.20. *Niech P będzie dziedziną całkowitości i niech $n \in \mathbb{N}$. Wówczas każdy wielomian $f \in P[x]$ stopnia n posiada co najwyżej n różnych pierwiastków w pierścieniu P.*

Twierdzenie 3.21. (Wzory Viety). *Niech K będzie ciałem i niech $f = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \in K[x]$, gdzie $c_n \neq 0$. Jeżeli $a_1, a_2, \dots, a_n$ są wszystkimi (niekoniecznie różnymi) pierwiastkami wielomianu f w ciele K, to zachodzą następujące wzory zwane wzorami Viety:*

$$\sum_{1 \le i_1 < \dots, < i_k \le n} a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_k} = (-1)^k \cdot \frac{c_{n-k}}{c_n} \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n. \tag{14}$$

.

Definicja 3.22. Niech P będzie dziedziną całkowitości i $k \in \mathbb{N}$. Mówimy, że $a \in P$ jest **pierwiastkiem k-krotnym** wielomianu $f \in P[x]$, jeżeli istnieje $g \in P[x]$ takie, że $g(a) \neq 0$ oraz $f = (x - a)^k g$.

Z zasadniczego twierdzenia algebry oraz z twierdzeń podanych na tym wykładzie można w prosty sposób wyprowadzić następujące twierdzenia:

Twierdzenie 3.23. *Niech $f \in \mathbb{C}[x]$ będzie wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N}$ o najstarszym współczynniku a. Wówczas istnieją $s, k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}$ i istnieją różne liczby zespolone $a_1, \dots, a_s$ takie, że $f = a(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_s)^{k_s}$.*

Twierdzenie 3.24. *Każdy wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach rzeczywistych jest iloczynem skończonej liczby wielomianów stopnia 1 lub 2 o współczynnikach rzeczywistych.*

Uwaga 3.25. Wielomian $f = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ stopnia 2 nie jest iloczynem wielomianów stopnia 1 o współczynnikach rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.

Twierdzenie 3.26. *Niech $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$. Jeżeli liczba wymierna $q = \frac{k}{m}$, gdzie $k, m \in \mathbb{Z}$ i $NWD(k, m) = 1$, jest pierwiastkiem f, to $k|a_0$ i $m|a_n$.*

3 Ułamki proste

Definicja 3.27. Funkcją wymierną rzeczywistą nazywamy iloraz dwóch wielomianów rzeczywistych, przy czym dzielnik nie jest wielomianem zerowym. **Funkcją wymierną zespoloną** nazywamy iloraz dwóch wielomianów zespolonych, przy czym dzielnik nie jest wielomianem zerowym. Funkcję wymierną nazywamy **właściwą**, jeżeli stopień wielomianu w liczniku ułamka określającego tę funkcję jest mniejszy od stopnia wielomianu w mianowniku.

Uwaga 3.28. Z twierdzenia o dzieleniu z resztą wynika, że **każda funkcja wymierna jest sumą wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej.**

Definicja 3.29. Zespolonym ułamkiem prostym nazywamy funkcję zespoloną wymierną postaci $\frac{A}{(z+a)^k}$, gdzie $A, a \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$ oraz $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 3.30. Rzeczywistym ułamkiem prostym pierwszego rodzaju nazywamy funkcję rzeczywistą wymierną postaci $\frac{A}{(x+a)^k}$, gdzie $A, a \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$ oraz $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 3.31. Rzeczywistym ułamkiem prostym drugiego rodzaju nazywamy funkcję rzeczywistą wymierną postaci $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, gdzie $A, B, p, q \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$ lub $B \neq 0$ oraz $k \in \mathbb{N}$, przy czym $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

Twierdzenie 3.32. Każda zespolona funkcja wymierna właściwa jest sumą zespolonych ułam-ków prostych. Przedstawienie to jest jednoznaczne. Jeżeli mianownik zespolonej funkcji wymiernej właściwej w rozkładzie na czynniki liniowe posiada czynnik $(z-a)^k$ i a jest k-krotnym pierwiastkiem tego mianownika, to w rozkładzie tej funkcji na ułamki proste występuje suma $\frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(z-a)^k}$ dla pewnych (jednoznacznie wyznaczonych) stałych $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathbb{C}$. Ponadto, jeżeli ułamek prosty zespolony $\frac{A}{(z-b)^l}$, gdzie $A, b \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$, $l \in \mathbb{N}$, występuje w rozkładzie tej funkcji wymiernej na sumę ułamków prostych, to b jest pierwiastkiem mianownika tej funkcji.

Twierdzenie 3.33. Każda rzeczywista funkcja wymierna właściwa jest sumą rzeczywistych ułamków prostych. Przedstawienie to jest jednoznaczne. Jeżeli mianownik rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej w rozkładzie na czynniki liniowe posiada czynnik $(x-a)^k$ i a jest k-krotnym pierwiastkiem tego mianownika, to w rozkładzie tej funkcji na ułamki proste występuje suma $\frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(z-a)^k}$ dla pewnych (jednoznacznie wyznaczonych) stałych $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathbb{R}$. Ponadto, jeżeli ułamek prosty rzeczywisty $\frac{A}{(z-b)^l}$, gdzie $A, b \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, $l \in \mathbb{N}$, występuje w rozkładzie tej funkcji wymiernej na sumę ułamków prostych, to b jest pierwiastkiem mianownika tej funkcji. Dalej, jeżeli dla pewnych $p, q \in \mathbb{R}$ takich, że $\Delta = p^2 - 4q < 0$ wielomian $(x^2+px+q)^k$ dzieli mianownik tej funkcji wymiernej, ale wielomian $(x^2 + px + q)^{k+1}$ już nie dzieli tego mianownika, to w rozkładzie tej funkcji wymiernej na rzeczywiste ułamki proste występuje suma $\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+p)^2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}$. Ponadto, jeżeli rzeczywisty ułamek prosty drugiego rodzaju $\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^l}$, gdzie$A \neq 0$ lub $B \neq 0$ występuje w rozkładzie tej funkcji wymiernej na ułamki proste, to $(x^2 + ax + b)^l$ dzieli mianownik tej funkcji wymiernej.

Przykład 3.34. W oparciu o twierdzenie 3.33 znajdziemy teoretyczny rozkład na rzeczywiste ułamki proste rzeczywistej funkcji wymiernej $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^3(x^2+4x+4)(x^2+x+1)^2}$. Zauważmy, że $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ oraz wielomian $x^2 + x + 1$ ma ujemny wyróżnik $\Delta = 1 - 4 = -3$, wiec $x^3(x^2 + 4x + 4)(x^2 + x + 1)^2 = x^3(x + 2)^2(x^2 + x + 1)^2$ i wobec tego:

$$f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{C_1x + D_1}{x^2+x+1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2+x+1)^2}$$

dla pewnych jednoznacznie wyznaczonych stałych $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 \in \mathbb{R}$.

4 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 3.35. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu f przez g, gdy
(a) $f = 5x^3 + 2x^2 - x - 7$, $g = x^2 + 3x - 1$ w $\mathbb{Z}[x]$,
(b) $f = 5x^3 + 2x^2 - x - 7$, $g = x^2 + 3x - 1$ w $\mathbb{Z}_8[x]$,
(c) $f = 3x^6 - 2x + 4$, $g = x^4 + 1$ w $\mathbb{Z}_5[x]$.

Zadanie 3.36. Czy istnieje wielomian $f \in \mathbb{R}[x]$ stopnia 4 taki, że $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$ i $f(5) = 5$?

Zadanie 3.37. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu
(a) $f = x^5 - 2x^3 + 1$ w pierścieniu $\mathbb{Z}_6$,
(b) $g = x^2 - 1$ w pierścieniu $\mathbb{Z}_8$.

Zadanie 3.38. Wielomian $f \in \mathbb{R}[x]$ daje przy dzieleniu przez $x - 2$ resztę 1, przy dzieleniu przez $x - 1$ resztę 2. Jaką resztę daje f przy dzieleniu przez $(x - 1)(x - 2)$?

Zadanie 3.39. Wyznacz wszystkie pierwiastki wymierne wielomianu $f = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.

Zadanie 3.40. Następujące funkcje wymierne rozłóż na rzeczywiste ułamki proste:
(a) $\frac{2x^3-x^2+4x-3}{x^4+2x^2+9}$, (b) $\frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)}$, (c) $\frac{x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1}{(x^4+2x^2+1)(x^4-3x^3+3x^2-x)}$, (d) $\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)}$,
(e) $\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}$, (f) $\frac{x^3-2x^2+5x-8}{x^4+8x^2+16}$, (g) $\frac{5x^3+3x^2+12x-12}{x^4-16}$, (h) $\frac{4x^3-2x^2+6x-13}{x^4+3x^2-4}$, (i) $\frac{17x^2-x-26}{(x^2-1)(x^2-4)}$.