Wykład 7
Metoda eliminacji Gaussa. Wzory Cramera

1 Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa polega na znalezieniu dla danego układu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots + & a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{1}$$

(w którym $a_{ij} \neq 0$ dla pewnych i, j) przy pomocy operacji elementarnych równoważnego mu (czyli posiadającego taki sam zbiór rozwiązań) układu (2), który po ewentualnej permutacji niewiadomych $x_1, \ldots, x_n$ ma postać:

$$\begin{cases} x_1 & & & & + & c_{1,\,k+1}x_{k+1} + & \ldots + & c_{1n}x_n & = d_1 \\ & x_2 & & & + & c_{2,\,k+1}x_{k+1} + & \ldots + & c_{2n}x_n & = d_2 \\ & & x_3 & & + & c_{3,\,k+1}x_{k+1} + & \ldots + & c_{3n}x_n & = d_3 \\ & & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & x_k & + & c_{k,\,k+1}x_{k+1} + & \ldots + & c_{kn}x_n & = d_k \\ & & & & & & & 0 & = d_{k+1} \end{cases}. \tag{2}$$

Jeżeli $d_{k+1} \neq 0$, to układ (2) nie ma rozwiązania, a więc też układ (1) nie ma rozwiązania (czyli jest sprzeczny).
Jeżeli $d_{k+1} = 0$ i $k = n$, to układ (1) posiada dokładnie jedno rozwiązanie:

$$x_1 = d_1 \,, x_2 = d_2, \ \ldots \ , x_n = d_n. \tag{3}$$

Jeżeli $d_{k+1} = 0$ oraz $k < n$, to $x_{k+1}, \ x_{k+2}, \ \ldots, \ x_n$ są dowolnymi skalarami (nazywamy je **parametrami**), zaś pozostałe niewiadome wyliczamy z równań układu (2), tzn.

$$x_i = d_i - c_{i\,k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{in}x_n \ \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k. \tag{4}$$

Aby sprowadzić układ (1) do postaci (2) należy najpierw przy pomocy operacji elementarnych przekształcić go do układu postaci:

$$\begin{cases} x_1 + & a'_{12}x_2 + & \ldots + & a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + & a'_{22}x_2 + & \ldots + & a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1}x_1 + & a'_{m2}x_2 + & \ldots + & a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}. \tag{5}$$

Robimy to np. w ten sposób, że najpierw znajdujemy element $a_{ij} \neq 0$, a następnie przez operacje: $x_1 \leftrightarrow x_j$, $r_1 \leftrightarrow r_i$, $\frac{1}{a_{ij}} \cdot r_1$ doprowadzamy układ (1) do postaci (5).

Następnie przy pomocy równania pierwszego eliminujemy zmienną x_1 z pozostałych równań układu (5) przez wykonanie operacji: $r_2 - a'_{21} \cdot r_1$, $r_3 - a'_{31} \cdot r_1$,...,$r_m - a'_{m1} \cdot r_1$. Otrzymamy wówczas układ postaci:

$$\begin{cases} x_1 + & a"_{12}x_2 + & \ldots + & a"_{1n}x_n = b"_1 \\ & a"_{22}x_2 + & \ldots + & a"_{2n}x_n = b"_2 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a"_{m2}x_2 + & \ldots + & a"_{mn}x_n = b"_m \end{cases} . \tag{6}$$

Z kolei stosujemy nasz algorytm do układu:

$$\begin{cases} a"_{12}x_2 + & \ldots + & a"_{1n}x_n = b"_1 \\ a"_{22}x_2 + & \ldots + & a"_{2n}x_n = b"_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a"_{m2}x_2 + & \ldots + & a"_{mn}x_n = b"_m \end{cases} \tag{7}$$

nie ruszając pierwszego równania układu (6). Po skończonej liczbie kroków uzyskamy układ postaci:

$$\begin{cases} x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3 + & \ldots + e_{1k}x_k + e_{1\,k+1}x_{k+1} + \ldots + e_{1n}x_n & = f_1 \\ \qquad x_2 + e_{23}x_3 + & \ldots + e_{2k}x_k + e_{2\,k+1}x_{k+1} + \ldots + e_{2n}x_n & = f_2 \\ \qquad\qquad x_3 + & \ldots + e_{3k}x_k + e_{3\,k+1}x_{k+1} + \ldots + e_{3n}x_n & = f_3 \\ \qquad\qquad \ddots & \qquad\qquad\qquad \vdots & \\ & x_k + e_{k\,k+1}x_{k+1} + \ldots + e_{kn}x_n & = f_k \\ & 0 & = f_{k+1} \end{cases} .$$

Jeżeli $f_{k+1} \neq 0$, to otrzymany układ jest sprzeczny, a więc też układ (1) jest sprzeczny. Jeżeli zaś $f_{k+1} = 0$, to przy pomocy operacji: $r_1 - e_{1k} \cdot r_k$, $r_2 - e_{2k} \cdot r_k$,...,$r_{k-1} - e_{k-1\,k} \cdot r_k$ eliminujemy zmienną x_k z początkowych $k-1$ równań. Później eliminujemy zmienną x_{k-1} z wcześniejszych równań przy pomocy $k-1$-szego równania, itd. W końcu, po skończonej liczbie kroków, uzyskamy w ten sposób układ (2).

Omówiony wyżej sposób rozwiązywania układu równań metodą Gaussa zawiera dużo elementów dowolnych. Dowolność zachodzi na każdym etapie rozważań, ponieważ możemy eliminować dowolną niewiadomą (pod warunkiem, że odpowiedni współczynnik nie równa się 0). Oprócz tego dowolna jest również kolejność równań w danym układzie. Jeżeli np. w jakikolwiek sposób zmienimy kolejność równań w wyjściowym układzie, to proces stopniowego eliminowania niewiadomych przebiegać będzie inaczej. Jednak zawsze musimy otrzymać tę samą liczbę parametrów!

W praktyce proces rozwiązywania układu (1) możemy znacznie uprościć, jeżeli zamiast przekształceń układu równań będziemy przekształcać jego macierz uzupełnioną A_u. Oczywiste jest, że każdej operacji elementarnej układu (1) odpowiada odpowiednia operacja elementarna macierzy A_u, a mianowicie:

operacji $r_i \leftrightarrow r_j$ odpowiada operacja $w_i \leftrightarrow w_j$,
operacji $a \cdot r_i$ odpowiada operacja $a \cdot w_i$,
operacji $r_i + a \cdot r_j$ odpowiada operacja $w_i + a \cdot w_j$,
wykreślaniu i-tego równania odpowiada wykreślanie i-tego wiersza,
operacji $x_i \leftrightarrow x_j$ odpowiada operacja $k_i \leftrightarrow k_j$ (należy przy tym pamiętać, że nie wolno ruszać ostatniej kolumny i na koniec należy jeszcze uwzględnić wszystkie przenumerowania niewiadomych!).

Przykład 7.1. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiążemy nad ciałem $\mathbb{R}$ układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr} x_1 & - & x_2 & - & 9x_3 & + & 6x_4 & + & 7x_5 & + & 10x_6 & = & 3 \\ & & & - & 6x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & + & 3x_6 & = & 2 \\ & & & - & 3x_3 & + & 2x_4 & - & 11x_5 & - & 15x_6 & = & 1 \end{array}\right. .$$

Będziemy wykonywali rachunki na macierzy uzupełnionej naszego układu:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -9 & 6 & 7 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right] \overset{w_1-3w_3,\ w_2-2w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 40 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right] \overset{x_2 \leftrightarrow x_4}{\equiv}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 40 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_2 \leftrightarrow w_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 40 & 55 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -11 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \end{array}\right] \end{array} \overset{x_3 \leftrightarrow x_5}{\equiv}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 40 & 1 & 0 & 55 & 0 \\ 0 & 2 & -11 & 0 & -3 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 33 & 0 \end{array}\right] \end{array} \overset{\frac{1}{2}w_2,\ \frac{1}{24}w_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 40 & 1 & 0 & 55 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{8} & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overset{w_1-40w_3,\ w_2+\frac{11}{2}w_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{8} & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Zatem zmiennymi bazowymi są x_2, x_3, x_6 oraz $x_1 = -x_2$, $x_4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{16}x_6$, $x_5 = -\frac{11}{8}x_6$. Stąd układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań danych wzorami:
$x_1 = -a$, $x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}b - \frac{1}{16}c$, $x_5 = -\frac{11}{8}c$, $x_6 = c$, gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. $\square$

Przykład 7.2. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiążemy układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 4 \end{array}\right. .$$

Rachunki będziemy wykonywali na macierzy uzupełnionej A_u naszego układu. Mamy, że

$$A_u = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \overset{x_1 \leftrightarrow x_2}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_2+2w_1,\ w_3-w_1,\ w_4+w_1}{\equiv}$$

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right] \end{array}
\overset{x_1 \leftrightarrow x_4}{\equiv}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right] \end{array}
\overset{w_3+w_2,\ w_4-2w_2}{\equiv}
$$

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -3 \end{array}\right] \end{array}
\overset{w_4+w_3}{\equiv}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \end{array}
$$

. Zatem nasz układ jest sprzeczny (nie posiada rozwiązania), bo ostatnie równanie ma postać:

$$0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_1 = -1. \ \square$$

Przykład 7.3. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiążemy układ równań:

$$
\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}.
$$

Rachunki będziemy wykonywali na macierzy uzupełnionej A_u naszego układu. Mamy, że

$$
A_u = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right]
\overset{x_1 \leftrightarrow x_3}{\equiv}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 2 & 5 & -6 \end{array}\right] \end{array}
\overset{w_3+w_1,\ w_4+2w_1}{\equiv}
$$

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -4 \end{array}\right] \end{array}
\overset{(-1)w_2}{\equiv}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -4 \end{array}\right] \end{array}.
$$

Wykonujemy operację $w_3 + w_2$:

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -4 \end{array}\right] \end{array}
\overset{w_4-2w_3}{\equiv}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right] \end{array}.
$$

Wykonujemy operacje $\frac{1}{3}w_3$ i $(-\frac{1}{3})w_4$:

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \end{array}
\overset{w_1+w_4,\ w_2-3w_4,\ w_3-w_4}{\equiv}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \end{array}.
$$

Wykonujemy operacje $w_1 - 2w_3$ i $w_2 + 2w_3$:

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \end{array}
\overset{w_1+w_2}{\equiv}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \end{array}.
$$

Zatem układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{5}{3}$, $x_4 = -\frac{4}{3}$. $\square$

2 Wzory Cramera

Niech dany będzie układ n równań liniowych z n niewiadomymi x_1, x_2, ..., x_n nad ciałem K:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \tag{8}$$

Wyznacznikiem głównym układu (8) nazywamy

$$W = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Oznaczmy przez W_i (dla $i = 1, 2, \ldots, n$) wyznacznik powstający z W przez zastąpienie i-tej kolumny W kolumną wyrazów wolnych $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$. Zatem

$$W_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \; W_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \; \ldots, \; W_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Wówczas zachodzi następujące

Twierdzenie 7.4 (Cramera). Jeżeli wyznacznik główny układu (8) jest różny od zera, to układ ten posiada dokładnie jedno rozwiąza-nie dane wzorami Cramera:

$$x_1 = \frac{W_1}{W}, \; x_2 = \frac{W_2}{W}, \; \ldots, \; x_n = \frac{W_n}{W}. \tag{9}$$

Jeżeli zaś $W = 0$, ale $W_i \neq 0$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$, to układ (8) jest sprzeczny (a więc nie posiada rozwiązania).

Przykład 7.3. Stosując wzory Cramera rozwiążemy nad ciałem $\mathbb{R}$ układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}.$$

Obliczamy najpierw wyznacznik główny naszego układu. Stosujemy kolejno: operacje k_4+k_1, k_3+k_1, k_2+k_1, rozwinięcie Laplace'a względem czwartego wiersza, operację k_2-3k_1, rozwinięcie Laplace'a względem pierwszej kolumny:

$$W=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 3 \cdot (-1)^{1+1}\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(7-24) = (-3)\cdot(-17) = 51.$$ Stąd $W = 51 \neq 0$, więc z twierdzenia Cramera układ nasz posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Obliczamy teraz wyznacznik W_1 stosując kolejno: operacje k_1+k_2, k_3-k_4, $k_2+2\cdot k_4$, rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza, operację k_2+k_3, rozwinięcie Laplace'a względem drugiego wiersza:

$$W_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4}\cdot(-1)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$ bo w ostatnim wyznaczniku mamy dwie identyczne kolumny. Postępując podobnie obliczamy: $W_2 = 0$ i $W_3 = 51$. Zatem ze wzorów Cramera: $x_1 = \frac{W_1}{W} = 0$, $x_2 = \frac{W_2}{W} = 0$ oraz $x_3 = \frac{W_3}{W} = 1$. Wyznacznika W_4 nie musimy już obliczać, bo z pierwszego równania $x_4 = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2 = 0 + 0 - 1 + 2 = 1.\square$

3 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 7.5. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż nad ciałem liczb rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}.$$

Odp. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań danych wzorami:
$x_1 = 6 - t$, $x_2 = t - 5$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1 - t$, $x_5 = t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 7.6. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż nad ciałem liczb rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1 \end{cases}.$$

Odp. Układ jest sprzeczny.

Zadanie 7.7. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż nad ciałem liczb rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases}.$$

Odp. Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$, $x_4 = 1$.

Zadanie 7.8. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż nad ciałem liczb rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} 12x_1 - 18x_2 + 102x_3 - 174x_4 - 216x_5 = 132 \\ 14x_1 - 21x_2 + 119x_3 - 203x_4 - 252x_5 = 154 \\ x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -1 \\ 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = -2 \\ 7x_3 + 8x_4 + 9x_5 = -3 \end{cases}.$$

Odp. Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań danych wzorami:
$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_2$, x_2-dowolna liczba rzeczywista, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = -\frac{2}{3}$, $x_5 = 0$.

Zadanie 7.9. Stosując wzory Cramera rozwiąż nad ciałem $\mathbb{Q}$ układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}.$$

Odp. Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

Zadanie 7.10. Stosując wzory Cramera rozwiąż nad ciałem $\mathbb{Q}$ układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37 \end{cases}.$$

Odp. Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = 0$.

Zadanie 7.11. Stosując wzory Cramera rozwiąż nad ciałem $\mathbb{C}$ układy równań:

a) $\begin{cases} 2(2+i)z - i(3+2i)w = 5+4i \\ (3-i)z + 2(2+i)w = 2(1+3i) \end{cases}$, b) $\begin{cases} (4-3i)z + (2+i)w = 5(1+i) \\ (2-i)z - (2+3i)w = -(1+i) \end{cases}$,

c) $\begin{cases} (2+i)z + (2-i)w = 6b - a + (2a-3b)i \\ (1-i)z + (3+i)w = a + 9b + (a+3b)i \end{cases}$ $(a, b \in \mathbb{R})$,

d) $\begin{cases} \frac{z}{2-i} + \frac{w}{1+i} = 2 \\ \frac{5z}{(2-i)^2} + \frac{2w}{(1+i)^2} = 3 \end{cases}$, e) $\begin{cases} (1+i)z + (1-i)w = 1+i \\ (1-i)z + (1+i)w = 1+3i \end{cases}$.

Odp. a) $z = \frac{5}{9} + \frac{5}{9}i$ oraz $w = \frac{4}{9} + i$. b) $z = i$ oraz $w = 1$. c) $z = ai$ oraz $w = 3b$. d) $z = 1 - 2i$ oraz $w = 1 + i$. e) $z = i$ oraz $w = 1 + i$.

Zadanie 7.12. W zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ rozwiąż nad ciałem $\mathbb{R}$ układ równań:

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2x + y + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

Odp. Dla $a = 0$ układ jest sprzeczny. Dla $a \neq 0$ i $a \neq 1$ układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $x = \frac{a-1}{2a}$, $y = \frac{1-2a}{2a}$, $z = a + \frac{1}{2a}$. Natomiast dla $a = 1$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań danych wzorami: $x = 0$, y-dowolna liczba rzeczywista, $z = 1 - y$.

Zadanie 7.13. Stosując twierdzenie Cramera rozwiąż nad ciałem $\mathbb{Z}_5$ układ równań:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}.$$
Odp. Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$.