Wykład 13
Ważne podzbiory $\mathbb{E}^n$

1 Zbiory wypukłe

Niech p i q będą punktami przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$. **Odcinkiem o końcach** p**,** q nazywamy zbiór $conv(p,q)$ wszystkich środków ciężkości układu (p,q) o nieujemnych wagach. Z tego określenia mamy od razu następujące

Twierdzenie 13.1. Dla dowolnych punktów p, q przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$ mamy, że $conv(p,q) \subseteq af(p,q)$. Ponadto odcinek $conv(p,q)$ składa się z tych, i tylko tych, punktów postaci $p + u \circ \overrightarrow{pq}$, że $u \in \langle 0,1\rangle$. W szczególności, jeżeli $p = (a_1,\ldots,a_n)$ oraz $q = (b_1,\ldots,b_n)$, to $conv(p,q)$ jest zbiorem punktów postaci $((1-u)a_1 + ub_1,\ldots,(1-u)a_n + ub_n)$, $u \in \langle 0,1\rangle$.

Przykład 13.2. Jeżeli $p,q \in \mathbb{E}^1$ oraz $p = (a)$ i $q = (b)$, to dla $a < b$ odcinek $conv(p,q)$ jest zwykłym przedziałem domkniętym $\langle a,b\rangle$. $\square$

Podzbiór A przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$ nazywamy **wypukłym**, gdy jest spełniony warunek:

$$\text{jeśli } p,q \in A, \text{ to } conv(p,q) \subseteq A. \tag{1}$$

Z definicji tej wynika od razu, że część wspólna dowolnej rodziny podzbiorów wypukłych jest też podzbiorem wypukłym.

Przykład 13.3. Na mocy twierdzenia 13.1 każda podprzestrzeń afiniczna jest podzbiorem wypukłym. $\square$

Przykład 13.4. Odcinek o końcach $p,q \in \mathbb{E}^n$ jest podzbiorem wypukłym. Wszystkimi podzbiorami wypukłymi prostej $\mathbb{E}^1$ są zbiór pusty i dowolny przedział.$\square$

Twierdzenie 13.5. Jeżeli A jest podzbiorem wypukłym przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$ oraz $p_1,\ldots,p_k \in A$, to każdy środek ciężkości układu $(p_1,\ldots,p_k)$ o nieujemnych wagach należy do zbioru A.

Dowód. Indukcja względem $k \geq 2$. Dla $k = 2$ teza wynika od razu z definicji zbioru wypukłego. Niech teraz $k \geq 2$ będzie taką liczbą naturalną, że dla dowolnych $q_1,\ldots,q_k \in A$ każdy środek ciężkości układu $(q_1,\ldots,q_k)$ o nieujemnych wagach należy do zbioru A. Weźmy dowolne $p_1,\ldots,p_k,p_{k+1} \in A$ oraz dowolny układ wag nieujemnych $(a_1,\ldots,a_k,a_{k+1})$. Wtedy $a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1} = 1$, więc istnieje $i = 1,\ldots,k+1$ takie, że $a_i \neq 1$. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy założyć, że $i = k+1$, tzn. $a_{k+1} \neq 1$. Stąd $a = a_1 + \ldots + a_k > 0$ i wobec tego $(\frac{a_1}{a},\ldots,\frac{a_k}{a})$ jest układem wag nieujemnych. Zatem z założenia indukcyjnego $q = \frac{a_1}{a}p_1 + \ldots + \frac{a_k}{a}p_k \in A$. Stąd i z wypukłości zbioru A, $aq + a_{k+1}p_{k+1} \in A$, bo $a + a_{k+1} = 1$ oraz $a > 0$ i $a_{k+1} \geq 0$. Ale z wykładu 12a wiemy, że $a_1p_1+\ldots+a_kp_k+a_{k+1}p_{k+1} = aq+a_{k+1}p_{k+1}$, więc $a_1p_1 + \ldots + a_kp_k + a_{k+1}p_{k+1} \in A$ i teza zachodzi dla liczby $k+1$. Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej teza zachodzi dla dowolnego naturalnego $k \geq 2$. $\square$

Z wiadomości podanych na wykładzie 12a łatwo wyprowadzić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 13.6. Niech B będzie podzbiorem przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$. Niech $conv(B)$ będzie zbiorem wszystkich środków ciężkości wszystkich możliwych układów punktów ze zbioru B o nieujemnych wagach. Wówczas $conv(B)$ jest zbiorem wypukłym; jest to najmniejszy zbiór wypukły zawierający zbiór B.

Przykład 13.7. Niech $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{E}^n$, przy czym $a_i \neq 0$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$ i niech $b \in \mathbb{R}$. Wówczas podzbiory: $H^+(a, b) = \{(x_1, \ldots, x_n) : \ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geq b\}$ i $H^-(a, b) = \{(x_1, \ldots, x_n) : \ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leq b\}$ są wypukłe. Nazywamy je **półprzestrzeniami domkniętymi wyznaczonymi przez hiperpłaszczyznę** $H = \{(x_1, \ldots, x_n) : \ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}$. $\square$

Część wspólną dowolnej skończonej rodziny półprzestrzeni położonych w tej samej przestrzeni afinicznej nazywamy **zbiorem wypukłym wielościennym**.

Przykład 13.8. **Układem** m **nierówności liniowych** o niewiadomych $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy każdy układ nierówności postaci

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & = & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \end{array}\right. , \qquad (2)$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ dla $i = 1, \ldots, m$ oraz $j = 1, \ldots, n$. Układ ten nazywamy **jednorodnym**, gdy $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. Macierz $[a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ je1,\ldots,n}}$ nazywamy **macierzą układu** (2).

Rozwiązaniem tego układu nazywamy każdy taki punkt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{E}^n$, że $a_{i1}a_1 + a_{i2}a_2 + \ldots + a_{in}a_n \geq b_i$ dla każdego $i = 1, \ldots, m$. Będziemy mówili, że rozwiązanie to jest nieujemne, gdy $a_i \geq 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Jeżeli układ (2) posiada rozwiązanie, to zbiór wszystkich rozwiązań (a także wszystkich rozwiązań nieujemnych) tego układu jest zbiorem wypukłym wielościennym. Ponadto każdy zbiór wielościenny położony w przestrzeni $\mathbb{E}^n$ jest opisany przez pewien skończony układ nierówności liniowych o n niewiadomych. $\square$

Przykład 13.9. Niepusty podzbiór $A \subseteq \mathbb{E}^n$ nazywamy **stożkiem wypukłym**, gdy

(a) jeśli $(a_1, \ldots, a_n) \in A$, to dla każdej nieujemnej liczby rzeczywistej u, $(ua_1, \ldots, ua_n) \in A$,

(b) jeśli $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n) \in A$, to $(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \in A$.

Z warunków (a) i (b) wynika, że każdy stożek wypukły jest zbiorem wypukłym. Przykładami stożków wypukłych są półprzestrzenie: $H^+(a, 0)$ i $H^-(a, 0)$, zbiory wszystkich punktów postaci $(ua_1, \ldots, ua_n)$, gdzie u przebiega wszystkie nieujemne liczby rzeczywiste, zaś $a = (a_1, \ldots, a_n)$ jest ustalonym punktem przestrzeni $\mathbb{E}^n$. $\square$

2 Układy punktów w przestrzeniach afinicznych

Niech $(p_1, \ldots, p_s)$ będzie dowolnym układem punktów przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$. Mówimy, że jest to **układ punktów w położeniu szczególnym**, gdy pewien z punktów tego układu jest środkiem ciężkości układu utworzonego z pozostałych punktów. Stwierdzamy, że ten **układ jest w położeniu ogólnym**, gdy nie jest on w położeniu szczególnym.

Można wykazać, że układ $(p_1, \ldots, p_n)$ jest w położeniu ogólnym wtedy, i tylko wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{p_2p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_sp_1}$ są liniowo niezależne.

Przykład 13.10. Niech $p_0 = (0, \ldots, 0)$, $p_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots, p_n = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{E}^n$. Wówczas układ $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ jest w położeniu ogólnym. W przestrzeni $\mathbb{E}^n$ nie istnieje układ w położeniu ogólnym złożony z co najmniej $n + 2$ punktów . □

Przykład 13.11. Niech $(p_1, \ldots, p_k)$ będzie układem k punktów przestrzeni $\mathbb{E}^n$ w położeniu ogólnym. Zbiór wypukły $conv(p_1, \ldots, p_k)$ nazywamy $k-1$-**wymiarowym sympleksem** rozpiętym na punktach $p_1, \ldots, p_k$.

Wszystkimi zerowymiarowymi sympleksami przestrzeni $\mathbb{E}^n$ są jej podzbiory jednoelementowe.

Wszystkimi jednowymiarowymi sympleksami przestrzeni $\mathbb{E}^n$ są odcinki $conv(p, q)$, takie że $p \neq q$.

Wszystkimi dwuwymiarowymi sympleksami przestrzeni $\mathbb{E}^n$ (dla $n \geq 2$) są zbiory postaci $conv(p_1, p_2, p_3)$, gdzie punkty p_1, p_2, p_3 nie leżą na jednej prostej. Nazywamy je **trójkątami**.

Wszystkimi trójwymiarowymi sympleksami przestrzeni $\mathbb{E}^n$ (dla $n \geq 3$) są zbiory postaci $conv(p_1, p_2, p_3, p_4)$, gdzie punkty p_1, p_2, p_3, p_4 nie leżą na jednej płaszczyźnie. Nazywamy je **czworościanami**. □

Przykład 13.12. Niech p_0 będzie dowolnym punktem przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$ i niech α_1,...,α_k będą wektorami liniowo niezależnymi przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Zbiór wszystkich punktów postaci $p_0 + u_1 \circ \alpha_1 + \ldots + u_k \circ \alpha_k$, gdzie $0 \leq u_i \leq 1$ dla $i = 1, \ldots, k$, nazywamy k-**wymiarowym równoległościanem** rozpiętym na wektorach $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ zaczepionych w punkcie p_0. Każdy równoległościan jest zbiorem wypukłym. Można wykazać, że dla każdego skończonego układu punktów $(p_1, \ldots, p_s)$, gdzie $s > 1$ oraz $p_i \neq p_j$ dla pewnych $i \neq j$ w przestrzeni $\mathbb{E}^n$ zbiór $conv(p_1, \ldots, p_s)$ jest wielościanem. □

Niech A będzie wypukłym podzbiorem przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$. Punkt $p \in A$ nazywamy **wierzchołkiem** (lub **punktem ekstremalnym**) zbioru A, gdy spełniony jest następujący warunek: jeśli $q, r \in A$ i $p \in conv(q, r)$, to $p = q$ lub $p = r$.

Przykład 13.13. Niech $(p_0, p_1, \ldots, p_k)$ będzie układem punktów przestrzeni $\mathbb{E}^n$ w położeniu ogólnym. Wówczas wierzchołkami sympleksu $conv(p_0, \ldots, p_k)$ są jedynie punkty $p_0, p_1, \ldots, p_k$. □

Przykład 13.14. Niech A będzie równoległościanem rozpiętym na wektorach $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ zaczepionych w punkcie p_0. Wierzchołkami zbioru A są jedynie punkty, które można przedstawić w postaci $p_0 + \sum_{i=1}^{k} e_i \circ \alpha_i$, gdzie $e_i = 0$ lub $e_i = 1$ dla $i = 1, \ldots, k$. Zatem zbiór A posiada dokładnie 2^k wierzchołków. □

Przykład 13.15. Niech $L \subseteq \mathbb{E}^2$ będzie prostą o przedstawieniu parametrycznym $(0, 0) + t \circ [1, 1]$. Zbadamy czy punkty $(1, 0)$, $(3, 1)$ należą do zbioru $A = conv(\{(2, 0)\} \cup L)$. Elementy zbioru A mają postać: $(1 - u)(2, 0) + u(t, t) = (2 \cdot (1 - u) + u \cdot t, u \cdot t)$ dla $u \in \langle 0, 1 \rangle$ oraz $t \in \mathbb{R}$.

Oznaczmy $x = 2(1-u) + ut$, $y = ut$. Zatem dla $u = 0$: $x = 2$ i $y = 0$, zaś dla $0 < u \leq 1$, x jest dowolną liczbą rzeczywistą oraz $y = x - 2(1-u)$ i liczby $2(1-u)$ przebiegają przedział $\langle 0, 2)$. Wynika stąd, że $A = \{(x, x-s) : \ x \in \mathbb{R}, \ s \in \langle 0, 2)\} \cup \{(2,0)\}$. Zatem $(1,0) \in A$ $(x = s = 1)$ oraz $(3,1)$ nie należy do A (bo $s < 2$). $\square$

3 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 13.16. Czy punkty $(1,1,1,0), (0,1,1,2), (0,1,1,1) \in \mathbb{E}^3$ są w położeniu szczególnym?
Odp. Nie.

Zadanie 13.17. Udowodnij, że odcinek o końcach $p, q \in \mathbb{E}^3$ jest zbiorem wypukłym.

Zadanie 13.18. Czy punkt $p = (1,4,-9)$ należy do $conv(a,b)$, gdzie $a = (2,1,-1)$ i $b = (3,-2,7)$?
Odp. Nie.

Zadanie 13.19. Niech $L \subseteq \mathbb{E}^2$ będzie prostą o przedstawieniu parametrycznym $(2,3) + t \circ [3,-1]$. Czy punkt $(1,1)$ należy do zbioru $A = conv(\{(3,1)\} \cup L)$? A punkt $(4,1)$?
Odp. $(1,1) \notin A$, zaś $(4,1) \in A$.

Zadanie 13.20. Czy $A = \{(u(3t-1)+3, u(2-t)+1) : u \in \langle 0,1\rangle, t \in \mathbb{R}\}$ jest wypukłym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{E}^3$?
Odp. Tak.

Zadanie 13.21. Czy punkty $(1,0,4)$ i $(2,2,2)$ należą do tej samej półprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{E}^3$ wyznaczonej przez hiperpłaszczyznę $af((-2,0,1),(-5,2,1),(-7,0,3))$?
Odp. Tak.

Zadanie 13.22. Czy punkt $(1,4)$ należy do trójkąta $A = conv(a,b,c)$, gdzie $a = (1,7)$, $b = (-2,1)$, $c = (4,-2)$? A punkt $(2,7)$?
Odp. $(1,4) \in A$, zaś $(2,7) \notin A$.