Wykład 8
Określenie przestrzeni liniowej

1 Określenie przestrzeni liniowej

Niech $(V, +, \Theta)$ będzie grupą abelową i niech K będzie ciałem. Niech $\circ$ będzie odwzorowaniem zbioru $K \times V$ w zbiór V, przy czym dla $a \in K$, $\alpha \in V$ element $\circ((a, \alpha))$ będziemy oznaczali przez $a \circ \alpha$. Powiemy, że V jest **przestrzenią liniową** nad ciałem K, jeżeli spełnione są następujące warunki (aksjomaty przestrzeni liniowej):
(L1). $1 \circ \alpha = \alpha$ dla każdego $\alpha \in V$,
(L2). $a \circ (\alpha + \beta) = a \circ \alpha + a \circ \beta$ dla każdego $a \in K$ i dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$,
(L3). $(a + b) \circ \alpha = a \circ \alpha + b \circ \alpha$ dla dowolnych $a, b \in K$ i dla każdego $\alpha \in V$,
(L4). $(a \cdot b) \circ \alpha = a \circ (b \circ \alpha)$ dla dowolnych $a, b \in K$ i dla każdego $\alpha \in V$.
Elementy ciała K będziemy nazywali **skalarami** i oznaczali literami łacińskimi a, b, c,..., zaś elementy zbioru V będziemy nazywali **wektorami** i oznaczali literami greckimi α, β, γ,... .
Ponieważ $(V, +, \Theta)$ jest grupą abelową, więc dodawanie wektorów jest łączne, przemienne, Θ jest elementem neutralnym dodawania wektorów oraz dla każdego wektora α istnieje dokładnie jeden wektor $-\alpha$ taki, że $\alpha + (-\alpha) = \Theta$. Ten jedyny wektor $-\alpha$ nazywamy **wektorem przeciwnym** do wektora α.

Przykład 8.1. Niech K będzie dowolnym ciałem i niech n będzie liczbą naturalną. Oznaczmy przez K^n zbiór wszystkich ciągów n-elementowych $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ o wyrazach z ciała K. Równość takich ciągów określamy następująco:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [b_1, b_2, \ldots, b_n] \Longleftrightarrow a_i = b_i \text{ dla każdego } i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

W zbiorze K^n wprowadzamy dodawanie przy pomocy wzoru:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] + [b_1, b_2, \ldots, b_n] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n]. \tag{2}$$

Elementy zbioru K^n będziemy nazywali *wektorami o n-współrzędnych.* Wektor

$$\Theta = [0, 0, \ldots, 0] \tag{3}$$

będziemy nazywali **wektorem zerowym**.
Łatwo sprawdzić, że $(K^n, +, \Theta)$ jest grupą abelową, przy czym dla wektora przeciwnego mamy wzór:

$$-[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [-a_1, -a_2, \ldots, -a_n]. \tag{4}$$

Można pokazać, że K^n jest przestrzenią liniową nad ciałem K, jeżeli iloczyn wektora przez skalar określimy następująco:

$$a \circ [a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a \cdot a_1, a \cdot a_2, \ldots, a \cdot a_n]. \tag{5}$$

Przestrzeń tę oznaczamy przez K^n i nazywamy **n-wymiarową przestrzenią liniową współrzędnych nad ciałem K**.$\Box$

Przykład 8.2. Dla dowolnego ciała K zbiór $M_{m\times n}(K)$ wszystkich $m\times n$-macierzy o wyrazach z K ze zwykłym dodawaniem macierzy i zwykłym mnożeniem macierzy przez skalar tworzy przestrzeń liniową nad ciałem K. Oznaczamy ją przez $M_{m\times n}(K)$.$\Box$

Przykład 8.3. Zbiór $\mathbb{R}$ ze zwykłym dodawaniem liczb oraz ze zwykłym mnożeniem liczb tworzy przestrzeń liniową nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Oznaczamy ją przez $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$. Podobnie zbiór $\mathbb{C}$ wszystkich liczb zespolonych ze zwykłym dodawaniem liczb zespolonych i ze zwykłym mnożeniem liczby zespolonej przez liczbę rzeczywistą też tworzy przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Oznaczamy ją przez $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ i nazywamy rzeczywistą przestrzenią liczb zespolonych. $\Box$

Przykład 8.4. Niech K będzie dowolnym ciałem i niech α będzie dowolnym elementem. Niech $V = \{\alpha\}$ i niech $\alpha+\alpha = \alpha$. Wówczas $(V, +, \alpha)$ jest grupą abelową i V tworzy przestrzeń liniową nad ciałem K, jeżeli dla dowolnego $a \in K$ przyjmiemy, że $a \circ \alpha = \alpha$. Przestrzenie takie nazywamy **zerowymi**.$\Box$

Przykład 8.5. Dla dowolnego ciała K zbiór $V = K[x]$ wszystkich wielomianów zmiennej x o współczynnikach z ciała K jest w naturalny sposób przestrzenią liniową nad K. Mianowicie V jest grupą abelową ze względu na dodawanie wielomianów, zaś mnożenie wielomianu $\alpha = a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ przez skalar $a \in K$ określamy jako $a\circ\alpha = (aa_0)+(aa_1)x+\ldots+(aa_m)x^m$.

2 Własności działań na wektorach

1. Suma dowolnej skończonej liczby wektorów nie zależy od porządku składników ani od sposobu rozstawienia nawiasów.

2. Dla dowolnego wektora α i dla dowolnego skalara a:

$$a \circ \alpha = \Theta \Longleftrightarrow (a = 0 \text{ lub } \alpha = \Theta). \tag{6}$$

Dowód. Weźmy dowolne $\alpha \in V$. Ponieważ $0 = 0+0$, więc z **L3**, $0\circ\alpha = (0+0)\circ\alpha = 0\circ\alpha+0\circ\alpha$. Zatem $\Theta + 0 \circ \alpha = 0 \circ \alpha + 0 \circ \alpha$ i z prawa skracania w grupach, $\Theta = 0 \circ \alpha$. Stąd i z **L4**, dla każdego $a \in K$: $a \circ \Theta = a \circ (0 \circ \Theta) = (a \cdot 0) \circ \Theta = 0 \circ \Theta = \Theta$.

Na odwrót, załóżmy, że $a \circ \alpha = \Theta$ i przypuśćmy, że $a \neq 0$. Wtedy istnieje $a^{-1} \in K$ i z pierwszej części dowodu oraz z **L4**: $\Theta = a^{-1} \circ (a \circ \alpha) = (a^{-1} \cdot a) \circ \alpha = 1 \circ \alpha$. Ale z **L1**, $1 \circ \alpha = \alpha$, więc stąd $\alpha = \Theta$. Kończy to dowód naszej własności. $\Box$

3. Dla dowolnego wektora α:

$$-\alpha = (-1) \circ \alpha \text{ oraz } -(-\alpha) = \alpha. \tag{7}$$

Dowód. Z **L1** mamy, że $\alpha = 1 \circ \alpha$. Zatem na mocy **L3**, $\alpha + (-1) \circ \alpha = 1 \circ \alpha + (-1) \circ \alpha = (1 + (-1)) \circ \alpha = 0 \circ \alpha = \Theta$, na mocy własności 2. Zatem $\alpha + (-1) \circ \alpha = \Theta$, czyli $(-1) \circ \alpha$ jest wektorem przeciwnym do wektora α, a więc $(-1) \circ \alpha = -\alpha$. Ponadto $(-\alpha) + \alpha = \Theta$, więc α jest wektorem przeciwnym do wektora $(-\alpha)$, czyli $-(-\alpha) = \alpha$. $\Box$

4. Dla dowolnego skalara a i dla dowolnych wektorów α_1, α_2,...,α_n:

$$a \circ (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = a \circ \alpha_1 + a \circ \alpha_2 + \ldots + a \circ \alpha_n. \tag{8}$$

Dowód. Indukcja względem n. Dla $n = 2$ teza wynika z **L2**. Niech teraz $n \geq 2$ będzie taką liczbą naturalną, że dla dowolnych wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_n \in V$: $a \circ (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) = a \circ \beta_1 + a \circ \beta_2 + \ldots + a \circ \beta_n$. Weźmy dowolne $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in V$. Ponieważ $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) + \alpha_{n+1}$, więc z **L2** i z założenia indukcyjnego: $a \circ (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1}) = a \circ (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) + a \circ \alpha_{n+1} = a \circ \alpha_1 + \ldots + a \circ \alpha_n + a \circ \alpha_{n+1}$, czyli teza zachodzi dla $n+1$. Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej, nasza teza jest prawdziwa dla dowolnego naturalnego $n \geq 2$. $\square$

Ze wzoru (8) oraz z aksjomatu **L4** wynika od razu następująca własność:

5. Dla dowolnych $a, a_1, \ldots, a_n \in K$ i dowolnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$:

$$a \circ (a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = (aa_1) \circ \alpha_1 + (aa_2) \circ \alpha_2 + \ldots + (aa_n) \circ \alpha_n. \tag{9}$$

6. Odejmowanie wektorów określamy przy pomocy wektora przeciwnego. Mianowicie **różnicą wektorów** α i β nazywamy wektor

$$\alpha - \beta \stackrel{def.}{=} \alpha + (-\beta). \tag{10}$$

7. Dla dowolnych wektorów α, β, γ i dla dowolnego skalara a zachodzą wzory: $\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$, $\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma$, $-(\alpha + \beta) = (-\alpha) + (-\beta)$, $a \circ (\alpha - \beta) = a \circ \alpha - a \circ \beta$, $a \circ (-\alpha) = -(a \circ \alpha) = (-a) \circ \alpha$, $(-a) \circ (-\alpha) = a \circ \alpha$.

3 Podprzestrzenie liniowe

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niepusty podzbiór W przestrzeni V nazywamy **podprzestrzenią** przestrzeni V, jeśli ma on następujące własności:
(I) jeśli α,$\beta \in W$, to $\alpha + \beta \in W$;
(II) jeśli $\alpha \in W$ i $a \in K$, to $a \circ \alpha \in W$.
Ponieważ $0 \circ \alpha = \Theta$ dla każdego wektora $\alpha \in V$, więc **wektor zerowy Θ należy do każdej podprzestrzeni przestrzeni V**. Łatwo zauważyć, że każda podprzestrzeń przestrzeni liniowej V nad ciałem K jest też przestrzenią liniową nad ciałem K.

Przykład 8.6. Każda przestrzeń V zawiera co najmniej dwie podprzestrzenie: zbiór V oraz $\{\Theta\}$. Pierwszą z tych podprzestrzeni nazywamy **niewłaściwą**, a drugą **zerową**. $\square$

Przykład 8.7. Zbiór wszystkich rozwiązań jednorodnego układu m-równań liniowych z n-niewiadomymi nad ciałem K tworzy podprzestrzeń przestrzeni K^n. (Oczywiście utożsamiamy $n \times 1$-macierze o wyrazach z K z ciągami przestrzeni K^n). $\square$

Przykład 8.8. $\mathbb{R}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$.$\square$

Przykład 8.9. Jeżeli V_1 i V_2 są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V nad ciałem K, to także $V_1 \cap V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V. Rzeczywiście, $\Theta \in V_1 \cap V_2$, gdyż $\Theta \in V_1$ i $\Theta \in V_2$. Jeżeli $\alpha, \beta \in V_1 \cap V_2$ oraz $a \in K$, to $a \circ \alpha, \alpha, \beta \in V_1$ i $a \circ \alpha, \alpha, \beta \in V_2$, skąd $a \circ \alpha, \alpha + \beta \in V_1 \cap V_2$. Wobec tego $V_1 \cap V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Ponadto zbiór $V_1 + V_2$ wszystkich wektorów postaci $\alpha + \beta$ dla $\alpha \in V_1$ i $\beta \in V_2$ też jest podprzestrzenią przestrzeni V. Rzeczywiście, $\Theta = \Theta + \Theta \in V_1 + V_2$ oraz dla dowolnych $\alpha, \beta \in V_1 + V_2$ i $a \in K$ istnieją $\alpha_1, \beta_1 \in V_1$, $\alpha_2, \beta_2 \in V_2$ takie, że $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ i $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Zatem $a \circ \alpha = a \circ (\alpha_1 + \alpha_2) = a \circ \alpha_1 + a \circ \alpha_2 \in V_1 + V_2$ oraz $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) \in V_1 + V_2$. Zatem $V_1 + V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V. □

Kombinacją liniową wektorów α_1, α_2,...,α_n o współczynnikach a_1, a_2,...,$a_n \in K$ nazywamy wektor

$$a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n. \tag{11}$$

Przykład 8.10. Zbadamy czy w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ wektor $[3, 4, 4]$ jest kombinacją liniową wektorów $[1, 1, 1]$, $[1, 0, -1]$, $[1, 3, 5]$? W tym celu szukamy liczb x, y, z takich, że

$$[3, 4, 4] = x \circ [1, 1, 1] + y \circ [1, 0, -1] + z \circ [1, 3, 5].$$

Ale $x \circ [1, 1, 1] + y \circ [1, 0, -1] + z \circ [1, 3, 5] = [x + y + z, x + 3z, x - y + 5z]$, więc z warunku równości wektorów otrzymujemy, że szukane liczby x, y, z spełniają układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 3z = 4 \\ x - y + 5z = 4 \end{cases}.$$

Stosujemy metodę eliminacji Gaussa:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right] \end{array} \overset{x \leftrightarrow y}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_3 + w_1}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_3 - 2w_2}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Zatem nasz układ jest sprzeczny i wobec tego wektor $[3, 4, 4]$ nie jest kombinacją liniową wektorów $[1, 1, 1]$, $[1, 0, -1]$, $[1, 3, 5]$. □

Przykład 8.11. Dla dowolnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni liniowej V nad ciałem K zbiór

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \{a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n \ : \ a_1, a_2, \ldots, a_n \in K\}$$

wszystkich kombinacji liniowych tych wektorów jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Rzeczywiście, Dla każdego $k = 1, \ldots, n$ wektor α_k jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ o współczynnikach $0, \ldots, 0, \overset{k}{1}, 0, \ldots, 0$, więc $\alpha_k \in L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Ponadto dla dowolnych $\alpha, \beta \in L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $a \in K$ istnieją skalary $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$ i $\beta = b_1 \circ \alpha_1 + b_2 \circ \alpha_2 + \ldots + b_n \circ \alpha_n$, więc $a \circ \alpha = (aa_1) \circ \alpha_1 + (aa_2) \circ \alpha_2 + \ldots + (aa_n) \circ \alpha_n$, skąd $a \circ \alpha \in L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Dalej, $\alpha + \beta = (a_1 + b_1) \circ \alpha_1 + (a_2 + b_2) \circ \alpha_2 + \ldots + (a_n + b_n) \circ \alpha_n$, więc $\alpha + \beta \in L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Zatem $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą zbiór $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Tę podprzestrzeń nazywamy **podprzestrzenią generowaną przez wektory** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Jeżeli W jest podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą zbiór

$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, to dla dowolnych skalarów $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mamy, że $a_k \circ \alpha_k \in W$ dla wszystkich $k = 1, 2, \ldots, n$, skąd $a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n \in W$. Zatem $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ Jest najmniejszą (w sensie inkluzji) podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ i te wektory nazywamy **generatorami** tej podprzestrzeni.
Wynika też stąd, że jeżeli wektor α jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, to $L(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. W szczególności:

$$L(\Theta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ oraz } L(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).\square$$

Przykład 8.12. Dla dowolnego ciała K wektory

$$\begin{array}{c} \varepsilon_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0] \\ \varepsilon_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0] \\ \varepsilon_3 = [0, 0, 1, \ldots, 0] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n = [0, 0, 0, \ldots, 1] \end{array}$$

generują przestrzeń K^n. Rzeczywiście, dla dowolnych skalarów $a_1, \ldots, a_n \in K$ mamy, że

$$\begin{array}{c} a_1 \circ \varepsilon_1 = [a_1, 0, 0, \ldots, 0] \\ a_2 \circ \varepsilon_2 = [0, a_2, 0, \ldots, 0] \\ a_3 \circ \varepsilon_3 = [0, 0, a_3, \ldots, 0] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n \circ \varepsilon_n = [0, 0, 0, \ldots, a_n] \end{array},$$

więc po dodaniu stronami tych równości uzyskamy wzór:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_1 \circ \varepsilon_1 + a_2 \circ \varepsilon_2 + \ldots + a_n \circ \varepsilon_n.\square \tag{12}$$

Łatwo wykazać, że dla dowolnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in V$ zachodzi następujący wzór:

$$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) + L(\beta_1, \ldots, \beta_n) = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n). \tag{13}$$

4 Liniowa niezależność wektorów

Powiemy, że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in V$ są **liniowo zależne** (w skrócie **lz**), jeżeli istnieją skalary $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ nie wszystkie równe 0 i takie, że

$$a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta.$$

Przykład 8.13. Dla dowolnych wektorów $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$

wektory $\Theta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo zależne.

Rzeczywiście, $1 \circ \Theta + 0 \circ \alpha_1 + \ldots + 0 \circ \alpha_n = \Theta$.
Ponadto

wektory $\alpha, \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo zależne.

Rzeczywiście, $1 \circ \alpha + (-1) \circ \alpha + 0 \circ \alpha_1 + \ldots + 0 \circ \alpha_n = \Theta$. □

Powiemy, że wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ są **liniowo niezależne** (w skrócie **lnz**), jeżeli nie są one liniowo zależne, tzn. dla dowolnych skalarów $a_1, \ldots, a_n \in K$ zachodzi implikacja:

$$a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta \Longrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0. \tag{14}$$

Pusty zbiór wektorów uważamy za liniowo niezależny. Zauważmy, że jeżeli wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są lnz, to dowolna ich permutacja też jest liniowo niezależna oraz $\alpha_i \neq \alpha_j$ dla wszystkich $i \neq j$. Dla liniowo niezależnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ możemy zatem powiedzieć, że zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest lnz.

Przykład 8.14. Ze wzoru (2) wynika od razu, że wektory $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in K^n$ podane w przykładzie 8.12 są liniowo niezależne.□

Podzbiór skończonego zbioru liniowo niezależnego jest zbiorem liniowo niezależnym. Rzeczywiście, niech wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in V$ będą liniowo niezależne. Weźmy dowolne skalary $a_1, \ldots, a_n \in K$, dla których $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$. Wówczas $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n + 0 \circ \beta_1 + \ldots + 0 \circ \beta_m = \Theta$, więc z liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ mamy, że $a_1 = \ldots = a_n = 0 = \ldots = 0$, czyli wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne.

Nieskończony zbiór X wektorów nazywamy liniowo niezależnym, jeżeli każdy jego skończony podzbiór jest liniowo niezależny. Np. zbiór $\{1, x, x^2, \ldots\}$ wektorów przestrzeni liniowej $K[x]$ jest lnz (dla dowolnego ciała K).

Przykład 8.15. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zbadamy wprost z definicji liniową niezależność wektorów: $[1,2,1,-2]$, $[2,3,1,0]$, $[1,2,2,-3]$. W tym celu weźmy dowolne liczby a, b, c takie, że

$$a \circ [1,2,1,-2] + b \circ [2,3,1,0] + c \circ [1,2,2,-3] = [0,0,0,0]. \tag{15}$$

Wtedy $[a+2b+c, 2a+3b+2c, a+b+2c, -2a-3c] = [0,0,0,0]$, więc otrzymujemy układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ 2a & + & 3b & + & 2c & = & 0 \\ a & + & b & + & 2c & = & 0 \\ -2a & & & - & 3c & = & 0 \end{array}\right., \tag{16}$$

który rozwiążemy metodą eliminacji Gaussa:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{w_2-2w_1,\, w_3-w_1,\, w_4+2w_1}{\equiv} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{w_3-w_2,\, w_4+4w_2}{\equiv} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{(-1)\cdot w_2,\, w_4+w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{w_1-w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{w_1-2w_2}{\equiv} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Zatem układ (6) ma dokładnie jedno rozwiązanie: $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Stąd jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równość (5), to $a = b = c = 0$. Zatem wektory $[1,2,1,-2]$, $[2,3,1,0]$, $[1,2,2,-3]$ są liniowo niezależne. □

5 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 8.16. Sprawdź prawdziwość wszystkich aksjomatów przestrzeni liniowej dla przestrzeni K^n określonej w przykładzie 8.1.

Zadanie 8.17. Które z poniższych podzbiorów W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ są jej podprzestrzeniami? a) $W = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x+y = 1\}$, b) $W = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x+y = 0\}$, c) $W = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$, d) $W = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 0\}$.
Odp. Tylko W z przykładu b).

Zadanie 8.18. Udowodnij, że dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in K$, $W = \{[x_1, \ldots, x_n] \in K^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej K^n.

Zadanie 8.19. Czy wektor $[4, 3, 4]$ jest kombinacją liniową wektorów $[1, 1, 1]$, $[0, 1, -1]$, $[3, 1, 5]$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$?
Odp. Nie.

Zadanie 8.20. Udowodnij wzór (12).

Zadanie 8.21. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zbadaj wprost z definicji liniową niezależność wektorów: $[1, 1, 2, -2]$, $[2, 1, 3, 0]$, $[1, 2, 2, -3]$.
Odp. Wektory te są liniowo niezależne.

Zadanie 8.22. W przestrzeni $\mathbb{R}^5$ zbadaj liniową niezależność wektorów:
$[5, -3, 2, 1, 10]$, $[-1, 8, 1, -4, 7]$, $[2, 1, 9, -3, 6]$, $[1, 3, -5, 9, 11]$.
Odp. Te wektory są liniowo niezależne.

Zadanie 8.23. Udowodnij wzór (6).

Zadanie 8.24. Dla dowolnego ciała K oznaczmy przez K^∞ zbiór wszystkich nieskończonych ciągów $[a_1, a_2, \ldots]$ o wszystkich wyrazach z K. Równość takich ciągów określamy następująco:

$$[a_1, a_2, \ldots] = [b_1, b_2, \ldots] \iff a_i = b_i \text{ dla każdego } i = 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Niech $\Theta = [0, 0, \ldots]$. Ponadto dla $a \in K$ oraz dla $[a_1, a_2, \ldots], [b_1, b_2, \ldots] \in K^\infty$ określamy:

$$[a_1, a_2, \ldots] + [b_1, b_2, \ldots] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots], \tag{18}$$

$$a \circ [a_1, a_2, \ldots] = [aa_1, aa_2, \ldots]. \tag{19}$$

Udowodnij, że K^∞ z tymi działaniami jest przestrzenią liniową nad ciałem K.

Zadanie 8.25. Udowodnij, że jeżeli $V_1, V_2, \ldots, V_n$ są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V nad ciałem K, to $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$ też jest podprzestrzenią V.

Zadanie 8.26. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V takimi, że $V_1 \cup V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V. Pokazać, że wówczas $V_1 \subseteq V_2$ lub $V_2 \subseteq V_1$.

Zadanie 8.27. Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych. Udowodnij, że zbiór $\{\log_2 p : p \in \mathbb{P}\}$ jest lnz jako podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$.

Zadanie 8.28. Udowodnij, że podzbiór $\{[1, a, a^2, a^3, \ldots] : a \in \mathbb{R}\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$ jest liniowo niezależny i jest nieprzeliczalny.

Zadanie 8.29. Niech $V_1, V_2, \ldots, V_n$ są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V nad ciałem K i niech $V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n : \alpha_i \in V_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$, tzn. $V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ jest zbiorem wszystkich możliwych wektorów postaci $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, gdzie $\alpha_i \in V_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Udowodnij, że $V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V.

Zadanie 8.30. Udowodnij,że zbiór wszystkich równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o współczynnikach z ciała K, z naturalnym dodawaniem równań stronami i naturalną operacją mnożenia równań przez skalary oraz z wektorem zerowym Θ rozumianym jako równanie: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K.

Zadanie 8.31. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem i niech K będzie ciałem. Oznaczmy przez K^X zbiór wszystkich funkcji $f : X \to K$. Dodawanie funkcji z tego zbioru określamy wzorem:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ dla } x \in X.$$

Natomiast mnożenie przez skalary określamy wzorem:

$$(a \circ f)(x) = a \cdot f(x) \text{ dla } x \in X.$$

Udowodnij, że w ten sposób otrzymujemy przestrzeń liniową nad ciałem K.