Wykład 9
Baza i wymiar przestrzeni liniowej

1 Operacje elementarne na układach wektorów

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą dowolnymi wektorami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wyróżniamy następujące operacje elementarne nad układem wektorów $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$:

O1. Zamiana miejscami wektorów α_i z α_j (dla $i \neq j$) oznaczana przez $w_i \leftrightarrow w_j$. Oczywiście operacja ta jest do siebie odwrotna.

O2. Pomnożenie i-tego wektora przez niezerowy skalar $a \in K$, oznaczenie: $a \cdot w_i$. Ponieważ dla $a \neq 0$ jest $a^{-1} \circ (a \circ \alpha_i) = (a^{-1}a) \circ \alpha_i = 1 \circ \alpha_i = \alpha_i$, więc operacją odwrotną do $a \cdot w_i$ jest operacja $a^{-1} \cdot w_i$.

O3. Dodanie do wektora α_i wektora α_j (dla $i \neq j$) pomnożonego przez dowolny skalar $a \in K$, oznaczenie: $w_i + a \cdot w_j$. Ponieważ $(\alpha_i + a \circ \alpha_j) + (-a) \circ \alpha_j = \alpha_i + a \circ \alpha_j + (-(a \circ \alpha_j)) = \alpha_i$, więc operacją odwrotną do operacji $w_i + a \cdot w_j$ jest operacja $w_i + (-a) \cdot w_j$.

Twierdzenie 9.1. Jeżeli układ wektorów $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ przestrzeni liniowej V nad ciałem K powstaje z układu wektorów $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przez kolejne wykonanie skończonej liczby operacji elementarnych, to

$$L(\beta_1, \ldots, \beta_n) = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Dowód. Indukcja pozwala nam ograniczyć się do jednej operacji. Ponadto operacje elementarne są odwracalne, więc wystarczy wykazać, że $L(\beta_1, \ldots, \beta_n) \subseteq L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, czyli, że $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subseteq L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dla operacji **O1** jest to oczywiste. Dla operacji **O2** mamy, że $\beta_j = \alpha_j$ dla $j \neq i$ oraz $\beta_i = a \circ \alpha_i \in L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dla operacji **O3** $\beta_k = \alpha_k$ dla $k \neq i$ oraz $\beta_i = \alpha_i + a \circ \alpha_j \in L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. $\square$

Twierdzenie 9.2. Jeżeli układ wektorów $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ przestrzeni liniowej V nad ciałem K powstaje z układu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przez kolejne wykonanie skończonej liczby operacji elementarnych, to układ $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest liniowo niezależny.

Dowód. Indukcja pozwala nam ograniczyć się do jednej operacji elementarnej. Ponadto operacje elementarne są odwracalne, więc wystarczy wykazać, że jeżeli układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest lnz, to układ $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jest lnz. Dla operacji **O1** jest to oczywiste. Dla operacji **O2** mamy, że $\beta_j = \alpha_j$ dla $j \neq i$ oraz $\beta_i = a \circ \alpha_i$ dla pewnego $a \neq 0$. Weźmy dowolne $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n = \Theta$. Wtedy $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + (a_i a) \circ \alpha_i + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$. Stąd z liniowej niezależności układu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mamy, że $a_1 = a_2 = \ldots = a_i a = \ldots = a_n = 0$. Ale $a \neq 0$, więc stąd $a_1 = \ldots = a_i = \ldots = a_n = 0$, czyli układ $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jest lnz.

Dla operacji **O3** bez zmniejszania ogólności możemy zakładać, że $\beta_1 = \alpha_1 + a \circ \alpha_2$ oraz $\beta_j = \alpha_j$ dla $j = 2, \ldots, n$. Weźmy dowolne $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n = \Theta$. Wtedy $a_1 \circ (\alpha_1 + a \circ \alpha_2) + a_2 \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$, czyli $a_1 \circ \alpha_1 + (a_1 a + a_2) \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$, skąd z lnz układu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mamy, że $a_1 = a_1 a + a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$, czyli $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, a więc układ $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jest lnz. $\square$

Nietrudno jest wykazać, że dla każdego podzbioru X przestrzeni liniowej V nad ciałem K istnieje najmniejsza w sensie inkluzji podprzestrzeń $L(X)$ zawierająca zbiór X. Np. $L(\emptyset) = \{\Theta\}$ oraz dla niepustego X, $L(X)$ składa się ze wszystkich kombinacji liniowych dowolnego skończonego podzbioru wektorów zawartego w X. Jeżeli $V = L(X)$, to mówimy, że X generuje V.

Twierdzenie 9.3. Niech X będzie zbiorem liniowo niezależnym wektorów przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas dla każdego wektora $\alpha \in V$:

$$\alpha \in L(X) \Leftrightarrow [\alpha \in X \text{ lub zbiór } X \cup \{\alpha\} \text{ jest liniowo zależny}].$$

Dowód. $\Leftarrow$. Załóżmy, że $\alpha \notin L(X)$. Wtedy $\alpha \notin X$, gdyż $X \subseteq L(X)$. Zatem zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest liniowo zależny. Ale zbiór X jest liniowo niezależny, więc istnieją parami różne wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X$ takie, że zbiór $\{\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest liniowo zależny. Zatem istnieją skalary $a, a_1, \ldots, a_n \in K$ nie wszystkie równe 0 i takie, że $a \circ \alpha + a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$. Stąd z liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wynika, że $a \neq 0$. Zatem $\alpha = (-\frac{a_1}{a}) \circ \alpha_1 + \ldots + (-\frac{a_n}{a}) \circ \alpha_n \in L(X)$, czyli $\alpha \in L(X)$ i mamy sprzeczność.

$\Rightarrow$. Istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$. Zatem $1 \circ \alpha + (-a_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (-a_n) \circ \alpha_n = \Theta$, skąd wynika, że $\alpha \in X$ albo $\alpha \notin X$ i zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest liniowo zależny. $\square$

2 Baza przestrzeni liniowej

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Powiemy, że podzbiór $X \subseteq V$ jest **maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym**, jeśli X jest zbiorem liniowo niezależnym oraz dla każdego zbioru liniowo niezależnego $Y \subseteq V$ takiego, że $X \subseteq Y$ jest $X = Y$.

Definicja 9.4. Każdy maksymalny liniowo niezależny podzbiór X wektorów przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy **bazą** tej przestrzeni.

Przykład 9.5. W przestrzeni zerowej $V = \{\Theta\}$ mamy tylko dwa podzbiory: $\emptyset$ i V, przy czym V jest lz, a $\emptyset$ jest lnz. Zatem $\emptyset$ jest bazą przestrzeni zerowej V. Jeśli przestrzeń liniowa W nie jest zerowa, to istnieje w niej wektor niezerowy α i wówczas zbiór $\{\alpha\}$ jest lnz, więc $\emptyset \subset \{\alpha\}$ i wobec tego $\emptyset$ nie jest bazą W.

Twierdzenie 9.6. Każdy liniowo niezależny zbiór wektorów X_0 przestrzeni liniowej V nad ciałem K można rozszerzyć do bazy $X \supseteq X_0$ tej przestrzeni. W szczególności, każda przestrzeń liniowa posiada bazę.

Twierdzenie 9.7. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Zbiór $X \subseteq V$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór X jest liniowo niezależny i generuje V.

Dowód. Załóżmy, że X jest bazą przestrzeni V. Wówczas X jest zbiorem liniowo niezależnym. Weźmy dowolne $\alpha \in V$ i załóżmy, że $\alpha \notin L(X)$. Wtedy z twierdzenia 9.3 wynika, że $\alpha \notin X$ oraz zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest liniowo niezależny. Zatem X nie jest maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym i mamy sprzeczność.

Na odwrót, załóżmy, że zbiór X jest liniowo niezależny oraz $V = L(X)$. Weźmy dowolny liniowo niezależny zbiór $Y \subseteq V$ taki, że $X \subseteq Y$. Gdyby $X \neq Y$, to dla pewnego $\alpha \in Y$ byłoby, że $\alpha \notin X$ i zbiór $X \cup \{\alpha\} \subseteq Y$ jest liniowo niezależny. Zatem z twierdzenia 9.3 mielibyśmy, że $\alpha \notin L(X) = V$, co prowadzi do sprzeczności. Zatem $X = Y$ i zbiór X jest bazą przestrzeni V. $\square$

Przykład 9.8. Dla dowolnego ciała K zbiór $\{1, x, x^2, \ldots\}$ generuje przestrzeń $K[x]$ i jest liniowo niezależny, więc na mocy twierdzenia 9.7 jest on bazą tej przestrzeni. $\square$

Przykład 9.9. Niech K będzie dowolnym ciałem i niech $n \in \mathbb{N}$. Wówczas z twierdzenia 9.7 oraz z przykładów 8.12 i 8.14 wynika od razu, że zbiór $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ jest bazą przestrzeni K^n. Nazywamy ją **bazą kanoniczną**. $\square$

Z twierdzeń 9.1, 9.2 i 9.7 wynika od razu następujące

Twierdzenie 9.10. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą parami różnymi wektorami i niech $\beta_1, \ldots, \beta_n$ będą parami różnymi wektorami przestrzeni liniowej V. Załóżmy, że układ wektorów $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ powstaje z układu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przez kolejne zastosowanie skończonej liczby operacji elementarnych. Wówczas zbiór $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą tej przestrzeni. $\square$

Twierdzenie 9.11. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą wektorami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas każdy maksymalny (względem liczby elementów) podzbiór liniowo niezależny $A \subseteq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą podprzestrzeni $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Dowód. Niech $A \subseteq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie maksymalnym (względem liczby elementów) podzbiorem liniowo niezależnym. Wówczas oczywiście $L(A) \subseteq L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = W$. Niech $i = 1, \ldots, n$. Jeśli $\alpha_i \in A$, to $\alpha_i \in L(A)$; jeśli zaś $\alpha_i \notin A$, to z maksymalności A wynika, że zbiór $A \cup \{\alpha_i\}$ jest liniowo zależny. Zatem z twierdzenia 9.3 $\alpha_i \in L(A)$. Stąd $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq L(A)$, czyli $W \subseteq L(A)$ i ostatecznie $L(A) = W$. Zatem z twierdzenia 9.7 zbiór A jest bazą podprzestrzeni W. $\square$

Przykład 9.12. Niech $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ będą niezerowymi elementami ciała K, niech $\alpha_1 = [a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}], \alpha_2 = [0, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}], \alpha_3 = [0, 0, a_{33}, \ldots, a_{3n}], \ldots, \alpha_n = [0, 0, 0, \ldots, a_{nn}]$ i niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

tzn. wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ można uważać za kolejne wiersze macierzy A. Łatwo zauważyć, że stosując operacje elementarne na wierszach macierzy A można ją przekształcić do macierzy jednostkowej I_n. Zatem układ wektorów $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ można przy pomocy operacji elementarnych przekształcić do układu $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. Zatem na mocy twierdzenia 9.11 i przykładu 9.9, zbiór $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni K^n i w szczególności ten zbiór jest lnz, a więc każdy jego podzbiór jest też lnz. $\square$

Przykład 9.13. Rozważmy ogólniejszy przypadek niż omawiany w przykładzie 9.12. Niech $\alpha_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}] \in K^n$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ i niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

tzn. wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ można uważać za kolejne wiersze macierzy A. Załóżmy, że $\det(A) \neq 0$. Wtedy istnieje A^{-1} i z analizy algorytmu odwracania macierzy przy pomocy operacji elementarnych wynika, że macierz A można przekształcić do macierzy I_n przy pomocy operacji elementarnych na wierszach macierzy A. Zatem układ wektorów $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ można przy pomocy operacji elementarnych przekształcić do układu $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. Zatem na mocy twierdzenia 9.11 i przykładu 9.9, zbiór $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni K^n i w szczególności ten zbiór jest lnz.

Na odwrót, załóżmy, że $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni K^n. Wtedy dla $i = 1, 2, \ldots, n$: $\varepsilon_i = b_{1i} \circ \alpha_1 + b_{2i} \circ \alpha_2 + \ldots + b_{ni} \circ \alpha_n$ dla pewnych skalarów $b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ni} \in K$. Stąd $A \cdot B = I_n$ dla $B = [b_{ij}]_{i,j=1,2,\ldots,n}$ i z twierdzenia Cauchy'ego $\det(A) \neq 0$.

Twierdzenie 9.14. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą parami różnymi wektorami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor $\alpha \in V$ można jednoznacznie zapisać w postaci

$$\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n \text{ dla pewnych } a_1, \ldots, a_n \in K.$$

Dowód. Załóżmy, że zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V. Wówczas z twierdzenia 9.7 mamy, że $V = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oraz zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest liniowo niezależny. Zatem dla dowolnego $\alpha \in V$ istnieją $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$. Jeśli $b_1, \ldots, b_n \in K$ są takie, że $\alpha = b_1 \circ \alpha_1 + \ldots + b_n \circ \alpha_n$, to $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = b_1 \circ \alpha_1 + \ldots + b_n \circ \alpha_n$, czyli $(a_1 - b_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (a_n - b_n) \circ \alpha_n = \Theta$, więc z liniowej niezależności zbioru $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ mamy, że $a_i - b_i = 0$, czyli $a_i = b_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Na odwrót, jeżeli $a_1, \ldots, a_n \in K$ są takie, że $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$, to $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = 0 \circ \alpha_1 + \ldots + 0 \circ \alpha_n$, skąd z jednoznaczności zapisu wektora $a_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$, czyli zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest liniowo niezależny. Ponadto z założenia $V = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, więc z twierdzenia 9.7 zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V. $\square$

Definicja 9.15. Niech $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas ciąg $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ nazywamy **bazą uporządkowaną** przestrzeni V. Niech $\alpha \in V$.

Wtedy na mocy twierdzenia 9.14 istnieje dokładnie jeden wektor $[a_1, \ldots, a_n] \in K^n$ taki, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$. Wektor $[a_1, \ldots, a_n]$ nazywamy **ciągiem współrzędnych wektora** α w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, a element a_i, dla każdego $i = 1, \ldots, n$, nazywa się **i-tą współrzędną wektora** α w tej bazie.

Wniosek 9.16. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech, dla pewnej liczby naturalnej n, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą uporządkowaną tej przestrzeni. Przyporządkujmy każdemu wektorowi $\alpha \in V$, ciąg jego współrzędnych w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Otrzymane w ten sposób odwzorowanie ϕ jest bijekcją zbioru V na zbiór K^n. Przy tym $\phi(\alpha_i) = \varepsilon_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.$\square$

3 Wymiar przestrzeni liniowej

Lemat 9.17. Niech wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni V i niech $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$, przy czym $a_j \neq 0$. Wówczas wektory

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n \tag{3}$$

też tworzą bazę przestrzeni V.

Dowód. Zauważmy, że wektory (3) powstają z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przez kolejne wykonanie następujących operacji elementarnych:
$a_j \cdot w_j, w_j + a_1 \cdot w_1, \ldots, w_j + a_{j-1} \cdot w_{j-1}, w_j + a_{j+1} \cdot w_{j+1}, \ldots, w_j + a_n \cdot w_n$. Zatem na mocy twierdzenia 9.10, wektory (3) tworzą bazę przestrzeni V. $\square$

Twierdzenie 9.18 (Steinitza o wymianie). Jeśli wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V nad ciałem K, a wektory $\beta_1, \ldots, \beta_s$ są liniowo niezależne, to

(i) $s \leq n$ oraz

(ii) spośród wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ można wybrać $n - s$ wektorów, które łącznie z wektorami $\beta_1, \ldots, \beta_s$ tworzą bazę przestrzeni V.

Dowód. Zastosujemy indukcję względem s. Dla $s = 0$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla liczb mniejszych od pewnej liczby naturalnej s i rozpatrzmy s wektorów liniowo niezależnych $\beta_1, \ldots, \beta_s$. Wektory $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}$ są liniowo niezależne, a więc z założenia indukcyjnego $s - 1 \leq n$ i istnieje $n - s + 1 = n - (s - 1)$ wektorów spośród wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, które łącznie z $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}$ tworzą bazę przestrzeni V. Dla uproszczenia znakowania przyjmiemy, że tymi wektorami są $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-s+1}$.

Wykażemy najpierw, że $s - 1 < n$. W przeciwnym razie byłoby $n = s - 1$ (bo $s - 1 \leq n$), a zatem już wektory $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}$ tworzyłyby bazę przestrzeni V, a stąd wynikałoby, że $\beta_s \in L(\beta_1, \ldots, \beta_{s-1})$, co na mocy twierdzenia 9.3 prowadzi do sprzeczności (gdyż wektory $\beta_1, \ldots, \beta_s$ są liniowo niezależne). Wobec tego $s - 1 < n$, a stąd $s \leq n$. To dowodzi (i).

Ponieważ wektory $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-s+1}$ tworzą bazę przestrzeni V, więc β_s jest ich kombinacją liniową. Wobec liniowej niezależności wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_s$ i twierdzenia 9.3, w kombinacji liniowej przedstawiającej β_s, co najmniej jeden z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-s+1}$ występuje ze współczynnikiem różnym od zera. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy przyjąć, że

$a_{n-s+1} \neq 0$. Wtedy z lematu 9.17 wektory $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-s}, \beta_s$ tworzą bazę przestrzeni V, czyli wektory $\beta_1, \ldots, \beta_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-s}$ tworzą bazę przestrzeni V, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Wniosek 9.17. Jeśli n-elementowy zbiór jest bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K, to każda baza tej przestrzeni składa się z dokładnie n wektorów.

Dowód. Niech wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Niech X będzie inną bazą tej przestrzeni. Gdyby zbiór X miał więcej niż n elementów, to byłyby one liniowo niezależne i otrzymalibyśmy sprzeczność z twierdzeniem Steinitza o wymianie. Zatem $|X| \leq n$. Ale wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne i zbiór skończony X jest bazą przestrzeni V, więc znowu z twierdzenia Steinitza o wymianie $n \leq |X|$, czyli ostatecznie $|X| = n$.$\square$

Definicja 9.20. Liczbę elementów dowolnej skończonej bazy przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy **wymiarem przestrzeni** V i oznaczamy przez $\dim_K V$ lub $\dim V$, jeśli wiadomo nad jakim ciałem rozpatrujemy przestrzeń V.

W ten sposób wymiar jest określony dla wszystkich takich przestrzeni, które mają skończoną bazę. Jeśli dana przestrzeń liniowa V nie ma skończonej bazy, to mówimy, że jej **wymiar jest nieskończony** i piszemy $\dim V = \infty$. Można udowodnić, że wszystkie bazy dowolnej przestrzeni liniowej V mają tę samą moc. Wobec tego można określić wymiar dowolnej przestrzeni liniowej V jako moc dowolnej bazy przestrzeni V.

Przykład 9.21. Ponieważ dla dowolnego ciała K przestrzeń K^n posiada bazę n-elementową (np. bazę kanoniczną), więc $\dim_K K^n = n$. $\square$

Przykład 9.22. Ponieważ dla dowolnego ciała K zbiór $\{1\}$ jest bazą przestrzeni liniowej K_K, więc $\dim_K K = 1$. W szczególności $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ oraz $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, gdyż zbiór $\{1, i\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. $\square$

Przykład 9.23. Ponieważ zbiór pusty jest bazą przestrzeni zerowej $\{\Theta\}$, więc $\dim\{\Theta\} = 0$. $\square$

Przykład 9.24. Ponieważ dla dowolnego ciała K zbiór $\{1, x, x^2, \ldots\}$ jest bazą przestrzeni $K[x]$, więc $\dim_K K[x] = \infty$. $\square$

Przykład 9.25. Dla dowolnego ciała K w przestrzeni liniowej K^∞ wektory $\varepsilon_1 = [1, 0, 0, \ldots]$, $\varepsilon_2 = [0, 1, 0, \ldots], \ldots$ są liniowo niezależne. Zatem z twierdzenia Steinitza o wymianie $\dim K^\infty = \infty$. $\square$

Twierdzenie 9.26. Jeśli przestrzeń liniowa V ma wymiar n, to każda jej podprzestrzeń W ma wymiar nie większy niż n.

Dowód. Niech X będzie bazą podprzestrzeni W. Wtedy zbiór X jest liniowo niezależny, więc na mocy twierdzenia Steinitza o wymianie $|X| \leq n$. $\square$

Twierdzenie 9.27. Dla dowolnej podprzestrzeni W przestrzeni liniowej V wymiaru skończonego równoważne są warunki:
(i) $\dim W = \dim V$, (ii) $W = V$.

Dowód. (ii)$\Rightarrow$(i). Oczywiste. (i)$\Rightarrow$(ii). Oznaczmy $n = \dim V$. Wtedy istnieje baza $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ przestrzeni V. Ale $\dim W = n$, więc istnieje baza $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ podprzestrzeni W. Zatem wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ są liniowo niezależne i na mocy twierdzenia Steinitza o wymianie można je uzupełnić do bazy przestrzeni V, $n - n = 0$ wektorami wybranymi spośród wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Zatem wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tworzą bazę przestrzeni V, skąd $V = L(\beta_1, \ldots, \beta_n) = W$. $\square$

Z twierdzenia 9.11 wynika od razu następujące

Twierdzenie 9.28. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą wektorami przestrzeni liniowej V. Wówczas $\dim L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq n$. Ponadto $\dim L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne. $\square$

Twierdzenie 9.29. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą wektorami przestrzeni liniowej V wymiaru n. Wówczas równoważne są warunki:
(i) zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V,
(ii) zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest liniowo niezależny,
(iii) zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ generuje przestrzeń V.
Dowód. (i)$\Rightarrow$(ii). Oczywiste. (ii)$\Rightarrow$(iii). Wynika od razu z twierdzenia Steinitza o wymianie. (iii)$\Rightarrow$(i). Z założenia wynika, że $V = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Zatem $\dim L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = n$ i na mocy twierdzenia 9.25 zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest liniowo niezależny. Zatem ostatecznie ten zbiór jest bazą przestrzeni V. $\square$

Twierdzenie 9.30. Niech V_1 i V_2 będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas podprzestrzenie $V_1 \cap V_2$ i $V_1 + V_2$ są również skończenie wymiarowe i zachodzi wzór:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2). \tag{4}$$

Dowód. Ponieważ $V_1 \cap V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni skończenie wymiarowej V_1, więc z twierdzenia 9.26 przestrzeń $V_1 \cap V_2$ jest skończenie wymiarowa. Niech $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ będzie bazą przestrzeni $V_1 \cap V_2$. Wtedy z twierdzenia Steinitza o wymianie ten zbiór można uzupełnić do bazy $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s\}$ przestrzeni V_1 i można go też uzupełnić do bazy $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ przestrzeni V_2. Wtedy $\dim(V_1 \cap V_2) = k$, $\dim V_1 = k + s$ i $\dim V_2 = k + r$, więc pozostaje wykazać, że $\dim(V_1 + V_2) = k + s + r$. Ale $V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s) + L(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_r) = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)$, więc wystarczy wykazać, że wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ są liniowo niezależne. W tym celu weźmy dowolne skalary $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_r \in K$ takie, że $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_k \circ \alpha_k + b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_s \circ \beta_s + c_1 \circ \gamma_1 + \ldots + c_r \circ \gamma_r = \Theta$. Oznaczmy: $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_k \circ \alpha_k$, $\beta = b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_s \circ \beta_s$, $\gamma = c_1 \circ \gamma_1 + \ldots + c_r \circ \gamma_r$. Wtedy $\gamma = -(\alpha + \beta) \in V_1 \cap V_2$. Zatem istnieją $d_1, \ldots, d_k \in K$ takie, że $\gamma = d_1 \circ \alpha_1 + \ldots + d_k \circ \alpha_k$, skąd $c_1 \circ \gamma_1 + \ldots + c_r \circ \gamma_r + (-d_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (-d_k) \circ \alpha_k = \Theta$. Zatem z liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ mamy, że $c_1 = \ldots = c_r = -d_1 = \ldots = -d_k = 0$, czyli $\gamma = \Theta$ oraz $\Theta = \alpha + \beta$. Zatem z liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s$ otrzymamy, że $a_1 = \ldots = a_k = b_1 = \ldots = b_s = 0$ i ostatecznie wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ są liniowo niezależne. $\square$

Wniosek 9.31. Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V wymiaru n. Wtedy $\dim(V_1 \cap V_2) \geq \dim V_1 + \dim V_2 - n$.

Dowód. Ponieważ $\dim(V_1 + V_2) \leq n$, więc z twierdzenia 9.30 uzyskujemy, że $\dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) \leq n$, skąd mamy tezę. $\Box$

Przykład 9.32. Znajdziemy bazę podprzestrzeni W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ generowanej przez wektory: $[-1, 4, -3, -2]$, $[3, -7, 5, 3]$, $[3, -2, 1, 0]$, $[-4, 1, 0, 1]$. W tym celu stosujemy twierdzenie 9.1. Wygodnie jest wykonywać operacje elementarne na wierszach macierzy A - tego układu wektorów. Wszystkie równoważności dotyczą podprzestrzeni generowanej:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{w_2 - w_3}{\equiv} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{w_3 + 3\cdot w_1}{\equiv} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 10 & -8 & -6 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{w_4 - 4\cdot w_1}{\equiv}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 10 & -8 & -6 \\ 0 & -15 & 12 & 9 \end{bmatrix} \overset{w_3 + 2\cdot w_2}{\equiv} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 12 & 9 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -15 & 12 & 9 \end{bmatrix} \overset{w_3 - 3\cdot w_2}{\equiv}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zatem z twierdzenia 9.1 $W = L([-1, 4, -3, -2], [0, -5, 4, 3]\}$. Ponadto na mocy przykładu 9.12 zbiór $\{[-1, 4, -3, -2], [0, -5, 4, 3], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i wektory $[-1, 4, -3, -2]$, $[0, -5, 4, 3]$ są lnz. Stąd zbiór $\{[-1, 4, -3, -2], [0, -5, 4, 3]\}$ jest bazą W oraz $\dim(W) = 2$. $\Box$

Zauważmy, że wiersze macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ możemy traktować jako wektory przestrzeni K^n, zaś jej kolumny-jako wektory przestrzeni K^m.

Twierdzenie 9.33. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$. Wówczas $r(A) = m$ wtedy i tylko wtedy, gdy wiersze macierzy A są liniowo niezależne.

Dowód. Załóżmy, że $r(A) = m$. Wtedy pewien minor stopnia m macierzy A jest niezerowy. Z przykładu 9.13 wynika, że wiersze tego minora są lnz. A stąd już wynika, że wiersze macierzy A są lnz.

Na odwrót. Załóżmy nie wprost, że wszystkie minory stopni $\geq m$ macierzy A są równe 0. Oznaczmy $\alpha_i = [a_{i1}, \ldots, a_{in}]$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Z liniowej niezależności wierszy macierzy A wynika, że $\alpha_1 \neq \Theta$, a więc $a_{1j} \neq 0$ dla pewnego $j = 1, 2, \ldots, n$. Istnieje zatem $r \in \mathbb{N}$, które jest największym stopniem niezerowego minora macierzy A, przy czym $r < m$. Dla przejrzystości zapisu niech

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Zauważmy, że dla każdego $j = 1, 2, \ldots, n$ prawdziwa jest równość:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{r+1,1} & \ldots & a_{r+1,r} & a_{r+1,j} \end{vmatrix} = 0.$$

Istotnie, dla $j = 1, 2, \ldots, r$ w tym wyznaczniku są dwie identyczne kolumny, zaś dla $j > r$ jest to minor stopnia $r+1$ macierzy A równy 0 na podstawie określenia liczby r. Po rozwinięciu ostatniego wyznacznika względem ostatniej kolumny i oznaczeniu przez $D_j = (-1)^{j+r+1} \cdot \det(B_{j,r+1})$ dla $j = 1, 2, \ldots, r+1$ oraz

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{r,r+1} \\ a_{r+1,1} & \ldots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} \end{bmatrix},$$

uzyskamy, że

$$a_{1j}D_1 + a_{2j}D_2 + \ldots + a_{r+1,j}D_{r+1} = 0$$

dla $j = 1, 2, \ldots, r+1$. A to oznacza, że

$$D_1 \circ \alpha_1 + \ldots + D_r \circ \alpha_r + D_{r+1} \circ \alpha_{r+1} = \Theta.$$

Ale $D_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$, więc wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ są liniowo zależne i mamy sprzeczność. □

Twierdzenie 9.34. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$. Wówczas wymiar podprzestrzeni generowanej przez wiersze macierzy A jest równy $r(A)$. Ponadto wymiar podprzestrzeni generowanej przez kolumny macierzy A też jest równy $r(A)$.

Dowód. Dla macierzy zerowej teza jest oczywista. Niech dalej A będzie niezerowa. Oznaczmy przez k wymiar podprzestrzeni W generowanej przez wiersze macierzy A i przez r jej rząd. Wtedy $k, r \in \mathbb{N}$. Ponadto z twierdzenia 9.11 pewne k wierszy macierzy A tworzy bazę podprzestrzeni W. Dla uproszczenia notacji niech to będą pierwsze k wiersze tej macierzy. Wówczas z twierdzenia 9.33 w macierzy B powstającej z A przez wykreślenie wierszy o numerach większych niż k istnieje minor niezerowy stopnia k, który jednocześnie jest minorem macierzy A. Wobec tego $r \geq k$.

Dalej, w macierzy A istnieje niezerowy minor stopnia r. Dla uproszczenia znakowania załóżmy, że tym minorem jest wyznacznik macierzy C powstającej z A przez wykreślenie wszystkich wierszy i wszystkich kolumn o numerach większych od r. Wówczas z twierdzenia 9.33 wszystkie wiersze macierzy D powstającej z A przez wykreślenie wierszy o numerach większych od r są lnz. Zatem $k \geq r$ i ostatecznie $k = r$.

Ponieważ wierszami macierzy A^T są kolumny macierzy A i $r(A^T) = r(A)$, więc stąd i z pierwszej części dowodu uzyskujemy, że wymiar podprzestrzeni generowanej przez kolumny macierzy A też jest równy $r(A)$. □

Uwaga 9.35. Z twierdzeń 9.11 i 9.34 mamy, że rząd macierzy A jest równy maksymalnej liczbie jej liniowo niezależnych wierszy i jest też równy maksymalnej liczbie jej liniowo niezależnych kolumn. Możemy zatem stosować rząd macierzy przy obliczaniu wymiaru podprzestrzeni przestrzeni K^n generowanej przez skończony zbiór wektorów oraz do badania liniowej niezależności skończonego układu wektorów przestrzeni K^n.

Przykład 9.36. Znajdziemy wymiar podprzestrzeni W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ generowanej przez wektory $[1, 2, 3, 1]$, $[2, 1, 2, 3]$, $[3, 3, 5, 4]$, $[3, 0, 1, 5]$. Macierzą tego układu wektorów jest $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Obliczamy rząd macierzy A wykonując operacje $w_1 - 2 \cdot w_2$ i $w_3 - 3 \cdot w_2$:
$r(A) = r \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = 1 + r \begin{bmatrix} -3 & -1 & -5 \\ -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Po wykonaniu operacji $w_1 + w_3$ oraz $w_2 + w_3$ uzyskamy ostatecznie, że $r(A) = 1 + 1 = 2$. Zatem z twierdzenia 9.34 $\dim(W) = 2$.□

Przykład 9.37. Zbadamy dla jakich wartości parametru a wektory $[a, 1, 0]$, $[1, a, 3]$, $[a, 1, 1] \in \mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne. Macierz tego układu wektorów ma postać $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 3 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Z twierdzenia 9.29 i z przykładu 9.13 wynika, że nasze wektory są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A) \neq 0$. Ale $\det(A) \overset{w_3 - w_1}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$, więc $\det(A) = 0$ wtedy, i tylko wtedy, gdy $a = -1$ lub $a = 1$. Zatem nasze wektory są liniowo niezależne jedynie dla wszystkich liczb rzeczywistych $a \neq -1,\ 1$. Z twierdzenia 9.29 wynika, że dla takich a nasze wektory tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. □

4 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 9.38. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zbadać liniową niezależność wektorów:
$[1, 4, 7, 10]$, $[2, 5, 8, 11]$, $[2, 6, 9, 12]$.

Odp. Wektory te są liniowo zależne.

Zadanie 9.39. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ wektory $[1, 1, 1]$, $[1, a, 2]$, $[2, 3, 4]$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

Odp. $a \neq \frac{3}{2}$.

Zadanie 9.40. Pokazać, że $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznaczyć bazę i wymiar V.

Odp. Bazą V jest $\{[1, 0, -1], [0, 1, -1]\}$ i $\dim V = 2$.

Zadanie 9.41. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni V przestrzeni $\mathbb{R}^4$ generowanej przez wektory: $[-1, -3, 4, -2]$, $[3, 5, -7, 3]$, $[3, 1, -2, 0]$, $[-4, 0, 1, 1]$.

Odp. Bazą V jest $\{[-1, -3, 4, -2], [0, -4, 5, -3]\}$ oraz $\dim(V) = 2$.

Zadanie 9.42. Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni V przestrzeni $\mathbb{R}^5$ generowanej przez wektory: $[-3, 1, 5, 3, 2]$, $[2, 3, 0, 1, 0]$, $[1, 2, 3, 2, 1]$, $[3, -5, -1, -3, -1]$, $[3, 0, 1, 0, 0]$.
Uzupełnij znalezioną bazę podprzestrzeni V do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^5$.

Odp. Bazą V jest $\{[-1, 3, -1, 1, 0], [0, 1, 6, 3, 2], [0, 0, 28, 12, 9]\}$,
$\dim(V) = 3$. Szukaną bazą przestrzeni $\mathbb{R}^5$ jest
$\{[-1, 3, -1, 1, 0], [0, 1, 6, 3, 2], [0, 0, 28, 12, 9], [0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 1]\}$.

Zadanie 9.43. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie:
$V = L([1, 1, 0, 0], [0, 1, 1, 0], [0, 0, 1, 1])$, $W = L([1, 0, 1, 0], [0, 2, 1, 1], [1, 2, 1, 2])$. Wyznacz bazę i wymiar podprzestrzeni: a) V, b) W, c) $V + W$, d) $V \cap W$.

Odp. a) Bazą V jest $\{[1, 1, 0, 0], [0, 1, 1, 0], [0, 0, 1, 1]\}$ oraz $\dim V = 3$. b) Bazą W jest $\{[1, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 1], [0, 0, 1, -1]\}$ oraz $\dim W = 3$.
c) Bazą $V + W$ jest $\{[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]\}$,
$\dim(V+W) = 4$ i $V+W = \mathbb{R}^4$. d) Bazą $V \cap W$ jest $\{[1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0]\}$ oraz $\dim(V \cap W) = 2$.