Wykład 4
Warstwy, dzielniki normalne

1 Warstwy grupy względem podgrupy

Niech H będzie podgrupą grupy $(G, \cdot, e)$. W zbiorze G wprowadzamy relacje $\sim_l$ oraz $\sim_r$ przyjmując, że dla dowolnych $a, b \in G$:

$$a \sim_l b \iff a^{-1} \cdot b \in H, \tag{1}$$

$$a \sim_r b \iff a \cdot b^{-1} \in H. \tag{2}$$

Ponieważ dla każdego $a \in G$ jest $a^{-1} \cdot a = e = a \cdot a^{-1}$ oraz $e \in H$, więc relacje $\sim_l$ i $\sim_r$ są zwrotne.

Ponadto dla dowolnych $a, b \in G$:

• jeżeli $a \sim_l b$, to $a^{-1} \cdot b \in H$, skąd $(a^{-1} \cdot b)^{-1} \in H$, czyli $b^{-1} \cdot a \in H$, więc $b \sim_l a$;

• jeżeli $a \sim_r b$, to $a \cdot b^{-1} \in H$, skąd $(a \cdot b^{-1})^{-1} \in H$, czyli $b \cdot a^{-1} \in H$, więc $b \sim_r a$.

Zatem relacje $\sim_l$ i $\sim_r$ są symetryczne.

W końcu, dla dowolnych $a, b, c \in G$:

• jeżeli $a \sim_l b$ i $b \sim_l c$, to $a^{-1} \cdot b \in H$ i $b^{-1} \cdot c \in H$, skąd $(a^{-1} \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot c) \in H$, czyli $a^{-1} \cdot c \in H$, więc $a \sim_l c$;

• jeżeli $a \sim_r b$ i $b \sim_r c$, to $a \cdot b^{-1} \in H$ i $b \cdot c^{-1} \in H$, skąd $(a \cdot b^{-1}) \cdot (b \cdot c^{-1}) \in H$, czyli $a \cdot c^{-1} \in H$, więc $a \sim_r c$.

Zatem relacje $\sim_l$ i $\sim_r$ są przechodnie.

Stąd wynika, że relacje $\sim_l$ i $\sim_r$ są relacjami równoważności w zbiorze G. Klasę abstrakcji relacji $\sim_l$ o reprezentancie $a \in G$ oznaczamy przez aH i nazywamy **warstwą lewostronną grupy** G **względem podgrupy** H **o reprezentancie** a. Klasę abstrakcji relacji $\sim_r$ o reprezentancie $a \in G$ oznaczamy przez Ha i nazywamy **warstwą prawostronną grupy** G **względem podgrupy** H **o reprezentancie** a.

Następujące stwierdzenie grupuje podstawowe własności warstw grupy względem jej podgrupy.

Stwierdzenie 4.1. *Niech H będzie podgrupą grupy G i $a, b \in G$. Wówczas:*
(i) dowolne dwie warstwy lewostronne (prawostronne) grupy G względem podgrupy H są albo równe albo rozłączne,
(ii) zbiór G jest sumą wszystkich różnych warstw lewostronnych (prawostronnych) grupy G względem podgrupy H,
(iii) $aH = bH \iff a^{-1} \cdot b \in H$ i $Ha = Hb \iff a \cdot b^{-1} \in H$,
(iv) $a \in aH$ i $a \in Ha$,

(v) $b \in aH \iff bH = aH$ *i* $b \in Ha \iff Hb = Ha$,

(vi) $aH = \{a \cdot h : h \in H\}$ *i* $Ha = \{h \cdot a : h \in H\}$,

(vii) $H = eH = He$,

(viii) $|H| = |aH| = |Hb|$.

Dowód. Własności $(i)-(v)$ wynikają od razu z określeń relacji $\sim_l$ i $\sim_r$ oraz z własności klas abstrakcji dowolnej relacji równoważności.

(vi). Dla $h \in H$ mamy, że $a^{-1} \cdot (a \cdot h) = h \in H$, więc $a \sim_l a \cdot h$ oraz $a \cdot h \in aH$. Na odwrót, niech $g \in aH$. Wtedy $a \sim_l g$, skąd $a^{-1} \cdot g = h \in H$. Zatem $g = a \cdot h$. Wobec tego $aH = \{a \cdot h : h \in H\}$.

Podobnie, dla $h \in H$ mamy, że $a \cdot (h \cdot a)^{-1} = a \cdot a^{-1} \cdot h^{-1} = h^{-1} \in H$, więc $a \sim_r h \cdot a$ oraz $h \cdot a \in Ha$. Na odwrót, niech $g \in Ha$. Wtedy $a \sim_r g$, więc $g \sim_r a$, czyli $g \cdot a^{-1} = h \in H$, skąd $g = h \cdot a$. Zatem $Ha = \{h \cdot a : h \in H\}$.

(vii). Na mocy (vi), $eH = \{e \cdot h : h \in H\} = \{h : h \in H\} = H$ i $He = \{h \cdot e : h \in H\} = \{h : h \in H\} = H$, więc $H = eH = He$.

$(viii)$. Rozważmy przekształcenie $f \colon H \to aH$ dane wzorem $f(h) = a \cdot h$ dla $h \in H$. Z (vi) wynika, że f jest ,,na", zaś z prawa skracania równości w grupie mamy, że f jest różnowartościowe. Zatem zbiory $|aH| = |H|$. Analogicznie funkcja $g \colon H \to Hb$ dana wzorem $g(h) = h \cdot b$ dla $h \in H$ jest ,,na" oraz jest różnowartościowa, więc $|Hb| = |H|$. $\square$

Uwaga 4.2. Zauważmy, że różne reprezentanty mogą wyznaczać tę samą warstwę, gdyż na mocy Stwierdzenia 4.1 (v) i (vii), dla każdego $h \in H$ jest $hH = eH = H$ oraz $Hh = He = H$.

Stwierdzenie 4.3. *Zbiór $L_G(H)$ wszystkich warstw lewostronnych grupy G względem podgrupy H jest równoliczny ze zbiorem $P_G(H)$ wszystkich warstw prawostronnych grupy G względem podgrupy H.*

Dowód. Niech $f \colon L_G(H) \to P_G(H)$ będzie dane wzorem: $f(aH) = Ha^{-1}$ dla $a \in G$. Wówczas dla dowolnych $a, b \in G$: $f(aH) = f(bH) \iff Ha^{-1} = Hb^{-1} \iff a^{-1} \cdot (b^{-1})^{-1} \in H \iff a^{-1} \cdot b \in H \iff aH = bH$ na mocy Stwierdzenia 4.1. Oznacza to, że f jest funkcją i f jest funkcją różnowartościową. Ponadto $b = (b^{-1})^{-1}$ dla $b \in G$, więc $Hb = f(b^{-1}H)$, czyli f jest ,,na". Zatem f jest bijekcją i $|L_G(H)| = |P_G(H)|$. $\square$

Definicja 4.4. Moc zbioru wszystkich warstw lewostronnych (prawostronnych) grupy G względem podgrupy H nazywamy **indeksem podgrupy H w grupie G** i oznaczamy przez $(G : H)$.

Twierdzenie 4.5 (Lagrange'a). *Jeżeli H jest podgrupą grupy skończonej G, to*

$$|G| = |H| \cdot (G : H). \tag{3}$$

W szczególności rząd podgrupy H jest dzielnikiem rzędu grupy G i $(G : H) = \frac{|G|}{|H|}$.

Dowód. Ponieważ zbiór G jest skończony, więc z zasady abstrakcji wynika, że istnieją $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ takie, że warstwy $a_1H, a_2H, \ldots, a_nH$ są parami rozłączne i ich suma daje zbiór G, czyli $G = \bigcup_{i=1}^{n} a_i H$. Stąd na mocy Stwierdzenia 4.1, $|G| = \sum_{i=1}^{n} |a_i H| = n|H|$ oraz $n = (G : H)$, więc $|G| = |H| \cdot (G : H)$. $\square$

Uwaga 4.6. Stwierdzenie 4.1 i Twierdzenie Lagrange'a umożliwiają szybkie wypisanie wszystkich warstw lewostronnych grupy skończonej G względem jej podgrupy H. Najpierw z Twierdzenia Lagreange'a obliczamy liczbę wszystkich takich warstw $(G : H) = \frac{|G|}{|H|}$. Następnie wypisujemy jako pierwszą warstwę $W_1 = H$ (stosujemy tu Stwierdzenie 4.1 (vii)). Następnie znajdujemy dowolne $x \in G \setminus H$ i bierzemy $W_2 = xH$ (na mocy Stwierdzenia 4.1 (v)). Jeśli mamy już skonstruowane różne warstwy $W_1, W_2, \ldots, W_k$, gdzie $k < (G : H)$, to bierzemy dowolne $a \in G \setminus (W_1 \cup \ldots \cup W_k)$ i wtedy kładziemy $W_{k+1} = aH$ (na mocy Stwierdzenia 4.1 (v)). Kontynuując ten proces wypiszemy wszystkie warstwy lewostronne grupy G względem podgrupy H.

Analogiczną metodą możemy też wypisać wszystkie warstwy prawostronne grupy G względem podgrupy H.

Przykład 4.6. Stosując Uwagę 4.6 wypiszemy wszystkie warstwy lewostronne grupy D_3 względem jej podgrupy $H = \{e, S_a\}$. Najpierw obliczamy liczbę tych warstw: $(G : H) = \frac{|G|}{|H|} = \frac{6}{2} = 3$. Wypisujemy jako pierwszą warstwę: $H = \{e, S_a\}$. Następną warstwą jest xH, gdzie x jest dowolnym elementem z D_3, który nie należy do H. Weźmy $x = S_b$ i z tabelki grupy D_3 otrzymujemy drugą warstwę: $S_b H = \{S_b \circ e, S_b \circ S_a\} = \{S_b, O_2\}$. Ponieważ są tylko 3 warstwy i dają one w sumie cały zbiór D_3, więc ostatnią warstwą jest $\{S_c, O_1\}$, przy czym $\{S_c, O_1\} = S_c H = O_1 H$. Zatem wszystkimi warstwami lewostronnymi grupy D_3 względem podgrupy $H = \{e, S_a\}$ są: $\{e, S_a\}$, $\{S_b, O_2\}$, $\{S_c, O_1\}$.

Teraz wypiszemy wszystkie warstwy prawostronne grupy D_3 względem podgrupy $H = \{e, S_a\}$. Pierwszą z nich jest $H = \{e, S_a\}$. Następną np. $HS_b = \{e \circ S_b, S_a \circ S_b\} = \{S_b, O_1\}$, zaś trzecią (i ostatnią!), $\{S_c, O_2\}$. Zatem wszystkimi warstwami prawostronnymi grupy D_3 względem podgrupy $H = \{e, S_a\}$ są: $\{e, S_a\}$, $\{S_b, O_1\}$, $\{S_c, O_2\}$.

Zagadka 1. Niech K i H będą podgrupami grupy G takimi, że pewna warstwa lewostronna grupy G względem K jest równa pewnej warstwie lewostronnej grupy G wględem podgrupy H. Czy wtedy $K = H$? Odpowiedź uzasadnij.

Zagadka 2. Niech K i H będą podgrupami grupy G takimi, że pewna warstwa lewostronna grupy G względem K jest równa pewnej warstwie prawostronnej grupy G wględem podgrupy H. Czy wtedy $K = H$? Odpowiedź uzasadnij.

Zagadka 3. Niech H będzie podgrupą skończonego indeksu n grupy G. Czy dla każdego $g \in G$ istnieje $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że $g^k \in H$?

Lemat 4.7. *Niech H będzie podgrupą grupy G i $a, b \in G$. Jeśli $aH = Hb$, to $aH = Ha$ i $bH = Hb$.*

Dowód. Ze Stwierdzenia 4.1, $b \in Hb$. Ale $Hb = aH$, więc $b \in aH$ i znowu ze Stwierdzenia 4.1, $bH = aH$, a więc $bH = Hb$. Podobnie, na mocy Stwierdzenia 4.1, $a \in aH$ i $aH = Hb$, więc $a \in Hb$. Zatem na mocy Stwierdzenia 4.1, $Ha = Hb$. Ale $Hb = aH$, więc $aH = Ha$. $\square$

2 Dzielnik normalny grupy

Definicja 4.8. Niech H będzie podgrupą grupy $(G, \cdot, e)$. Powiemy, że H jest *dzielnikiem normalnym* (*podgrupą normalną*) grupy G, jeżeli

$$gH = Hg \text{ dla każdego } g \in G. \tag{4}$$

Piszemy wtedy: $H \lhd G$.

Przykład 4.9. Ponieważ w grupie D_3: $S_b\{e, S_a\} \neq \{e, S_a\}S_b$, gdyż na mocy Stwierdzenia 4.1 i tabelki grupy D_3, $S_b\{e, S_a\} = \{S_b, O_2\}$ oraz $\{e, S_a\}S_b = \{S_b, O_1\}$, więc podgrupa $\{e, S_a\}$ nie jest dzielnikiem normalnym grupy D_3.

Przykład 4.10. $\{e\} \lhd G$ i $G \lhd G$, bo na mocy Stwierdzenia 4.1 dla każdego $g \in G$, $g\{e\} = \{g \cdot e\} = \{g\} = \{e \cdot g\} = \{e\}g$ i $gG = G = Gg$.

Stwierdzenie 4.11. *Każda podgrupa zawarta w centrum grupy G jest jej dzielnikiem normalnym. W szczególności $Z(G) \lhd G$.*
Dowód. Niech H będzie podgrupą grupy G zawartą w $Z(G)$. Wtedy na mocy Stwierdzenia 4.1 dla każdego $g \in G$ mamy, że $gH = \{g \cdot h : h \in H\} = \{h \cdot g : h \in H\} = Hg$. Zatem $H \lhd G$. $\square$

Ponieważ każda grupa abelowa G jest równa $Z(G)$, więc ze Stwierdzenia 4.11 mamy następujący

Wniosek 4.12. W grupie abelowej każda podgrupa jest jej dzielnikiem normalnym. $\square$

Stwierdzenie 4.13. *Dla podgrupy H grupy G równoważne są warunki:*
(i) $H \lhd G$,
(ii) każda warstwa lewostronna grupy G względem H jest warstwą prawostronną G wględem H,
(iii) każda warstwa prawostronna grupy G względem H jest warstwą lewostronną G wględem H.
Dowód. Implikacja $(i) \Rightarrow (ii)$ jest oczywista. Dla dowodu implikacji $(ii) \Rightarrow (iii)$ weźmy dowolną warstwę prawostronną W grupy G względem H. Wtedy $W = Hb$ dla pewnego $b \in G$. Ponadto na mocy założenia, $bH = Ha$ dla pewnego $a \in G$, więc z Lematu 4.7, $W = bH$, co dowodzi (iii).

Załóżmy teraz, że zachodzi (iii) i weźmy dowolne $g \in G$. Wtedy $Hg = aH$ dla pewnego $a \in G$. Zatem z Lematu 4.7, $Hg = gH$ i wobec tego $H \lhd G$. $\square$

Stwierdzenie 4.14. *Każda podgrupa H indeksu 2 grupy G jest jej dzielnikiem normalnym.*

Dowód. Ze Stwierdzenia 4.3 grupa G ma dokładnie dwie warstwy lewostronne i dokładnie dwie warstwy prawostronne względem podgrupy H. Ponieważ $eH = H = He$, więc jedną z warstw lewostronnych (prawostronnych) jest H, zaś drugą warstwą lewostronną (prawostronną) jest $G \setminus H$. Wobec tego każda warstwa lewostronna grupy G względem podgrupy H jest jej warstwą prawostronną względem H i na mocy Stwierdzenia 4.13, $H \lhd G$. $\square$

Stwierdzenie 4.15. *Niech H będzie podgrupą grupy G. Wówczas równoważne są warunki:*

(i) $H \lhd G$;

(ii) $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$ dla dowolnych $g \in G$ i $h \in H$.

Dowód. $(i) \Rightarrow (ii)$. Weźmy dowolne $g \in G$ oraz $h \in H$. Ponieważ $gH = Hg$ oraz $g \cdot h \in gH$, więc $g \cdot h \in Hg$. Zatem na mocy Stwierdzenia 4.1, $g \cdot h = k \cdot g$ dla pewnego $k \in H$, skąd $g \cdot h \cdot g^{-1} = k \in H$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Weźmy dowolne $g \in G$. Wtedy dla $h \in H$ mamy, że $g \cdot h \cdot g^{-1} = k \in H$. Zatem $g \cdot h = k \cdot g \in Hg$. Stąd $gH \subseteq Hg$. Ponadto $g^{-1} \cdot h \cdot g = h_1 \in H$, więc $h \cdot g = g \cdot h_1 \in gH$. Stąd $Hg \subseteq gH$ i ostatecznie $gH = Hg$ dla każdego $g \in G$. Zatem $H \lhd G$. $\square$

Zagadka 4. Udowodnij na podstawie Stwierdzenia 4.15, że dla dowolnego ciała K i dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$: $SL_n(K) \lhd GL_n(K)$.

Stwierdzenie 4.16. *Podgrupa H rzędu 2 grupy G jest jej dzielnikiem normalnym wtedy i tylko wtedy, gdy H jest zawarta w centrum grupy G.*

Dowód. Jeżeli $H \subseteq Z(G)$, to ze Stwierdzenia 4.11, $H \lhd G$. Na odwrót, załóżmy, że $H \lhd G$. Ponieważ $|H| = 2$, więc na mocy Wniosku 2.11 i Stwierdzenia 2.17 istnieje $a \in H$ takie, że $a \neq e$ oraz $a^2 = e$ i $H = \{e, a\}$. Weźmy dowolne $g \in G$. Wtedy ze Stwierdzenia 4.15, $g \cdot a \cdot g^{-1} \in H$. Jeśli $g \cdot a \cdot g^{-1} = e$, to $g \cdot a = g$, skąd $a = e$ i mamy sprzeczność. Zatem $g \cdot a \cdot g^{-1} = a$, skąd $g \cdot a = a \cdot g$. Zatem $a \in Z(G)$. Ale $e \in Z(G)$, więc ostatecznie $H \subseteq Z(G)$. $\square$

Zagadka 5. Niech $H \lhd G$ i $K \lhd H$. Czy wtedy $K \lhd G$? Odpowiedź uzasadnij.

Zagadka 6. Niech grupa cykliczna H będzie dzielnikiem normalnym grupy G. Udowodnij, że wówczas każda podgrupa grupy H jest dzielnikiem normalnym grupy G.

Zagadka 7. Czy istnieje grupa nieabelowa, której każda podgrupa jest jej dzielnikiem normalnym?

Stwierdzenie 4.17. *Część wspólna dowolnej niepustej rodziny dzielników normalnych grupy G jest jej dzielnikiem normalnym.*

Dowód. Niech $\{H_i\}_{i\in I}$ będzie niepustą rodziną dzielników normalnych grupy G oraz niech $H = \bigcap_{i\in I} H_i$. Ze Stwierdzenia 2.13, $H \leq G$. Weźmy dowolne $g \in G$ i dowolne $h \in H$. Wtedy $h \in H_i$ dla każdego $i \in I$, więc ze Stwierdzenia 4.15, $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H_i$ dla $i \in I$, czyli $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$. Zatem ze Stwierdzenia 4.15, $H \lhd G$.

Definicja 4.18. Iloczynem algebraicznym podgrup A, B grupy G nazywamy zbiór

$$AB = \{a \cdot b : a \in A, \ \ b \in B\}. \tag{5}$$

Przykład 4.19. Zauważmy, że w grupie D_3 dla $A = \{e, S_a\}$ i $B = \{e, S_b\}$ jest $AB = \{e, S_a, S_b, O_1\}$, czyli $|AB| = 4$. Wobec tego na mocy Twierdzenia Lagrange'a AB nie jest podgrupą grupy D_3.

Stwierdzenie 4.20. *Niech A i B będą podgrupami grupy G. Wówczas równoważne są warunki:*
(i) $AB \leq G$,
(ii) $AB = BA$,
(iii) dla każdego $x \in AB$: $x^{-1} \in AB$.

Dowód. $(i) \Rightarrow (ii)$. Dla dowolnych $a \in A$, $b \in B$ mamy, że $a = a \cdot e \in AB$, bo $e \in B$ oraz $b = e \cdot b \in AB$, bo $e \in A$, więc $b \cdot a \in AB$. Zatem $BA \subseteq AB$. Weźmy dowolne $a \in A$, $b \in B$. Wtedy $b^{-1} \cdot a^{-1} \in BA$. Ale $BA \subseteq AB$, więc istnieją $\alpha \in A$, $\beta \in B$ takie, że $b^{-1} \cdot a^{-1} = \alpha \cdot \beta$. Stąd $a \cdot b = (b^{-1} \cdot a^{-1})^{-1} = (\alpha \cdot \beta)^{-1} = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} \in BA$, bo $\beta^{-1} \in B$ i $\alpha^{-1} \in A$. Wobec tego $AB \subseteq BA$ i ostatecznie $AB = BA$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Weźmy dowolne $x \in AB$. Wtedy $x = a \cdot b$ dla pewnych $a \in A$ i $b \in B$. Stąd $x^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} \in BA$, bo $b^{-1} \in B$ i $a^{-1} \in A$. Ale $BA = AB$, więc $x^{-1} \in AB$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Ponieważ $e \in A$ i $e \in B$ oraz $e = e \cdot e$, więc $e \in AB$. Ponadto $x^{-1} \in AB$ dla każdego $x \in AB$. Pozostaje zatem wykazać, że $x \cdot y \in AB$ dla dowolnych $x, y \in AB$. Ale $x = a_1 \cdot b_1$ i $y = a_2 \cdot b_2$ dla pewnych $a_1, a_2 \in A$ oraz $b_1, b_2 \in B$. Zatem $a_2^{-1} \in A$ i $b_1^{-1} \in B$, więc $a_2^{-1} \cdot b_1^{-1} \in AB$, skąd $b_1 \cdot a_2 = (a_2^{-1} \cdot b_1^{-1})^{-1} \in AB$. Wobec tego $b_1 \cdot a_2 = a_3 \cdot b_3$ dla pewnych $a_3 \in A$, $b_3 \in B$ i uzyskujemy, że $x \cdot y = a_1 b_1 a_2 b_2 = (a_1 a_3) \cdot (b_3 b_2) \in AB$, bo $a_1 a_3 \in A$ i $b_3 b_2 \in B$. $\square$

Stwierdzenie 4.21. *Jeżeli $H \leq G$ i $A \lhd G$, to $AH = HA$ oraz $AH \leq G$.*

Dowód. Weźmy dowolne $x \in AB$. Wtedy $x = ab$ dla pewnych $a \in A$ i $b \in B$. Stąd $x^{-1} = b^{-1}a^{-1} = (b^{-1}a^{-1}b)b^{-1} \in AB$, bo $a^{-1} \in A$, $b^{-1} \in B$ i na mocy Stwierdzenia 4.15, $b^{-1}a^{-1}b \in A$. Zatem $x^{-1} \in AB$ i na mocy Stwierdzenia 4.20, $AH = HA$ i $AH \leq G$. $\square$

Stwierdzenie 4.22. Jeżeli $A \lhd G$ i $B \lhd G$, to $AB \lhd G$.

Dowód. Na mocy Stwierdzenia 4.21, $AB \leq G$. Ponadto dla $g \in G$ oraz dla $a \in A$ i $b \in B$ mamy, że

$$g \cdot (a \cdot b) \cdot g^{-1} = (g \cdot a \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot b \cdot g^{-1}) \in AB,$$

bo $g \cdot a \cdot g^{-1} \in A$ oraz $g \cdot b \cdot g^{-1} \in B$. Zatem ze Stwierdzenia 4.15, $AB \lhd G$. $\square$

3 Komutant grupy

Definicja 4.23. *Komutatorem elementów a, b* grupy G nazywamy element postaci

$$[a, b] = a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b. \tag{6}$$

Stwierdzenie 4.24. *Dla dowolnych elementów a, b, c grupy G:*
(i) $[a, b]^{-1} = [b, a]$,
(ii) $c \cdot [a, b] \cdot c^{-1} = [cac^{-1}, cbc^{-1}]$,
(iii) $a \cdot b = b \cdot a \iff [a, b] = e$.

Dowód. Zauważmy, że $[a, b]^{-1} = (a^{-1}b^{-1}ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba = [b, a]$, co dowodzi (i). (ii). Mamy $c[a, b]c^{-1} = c(a^{-1}b^{-1}ab)c^{-1} = ca^{-1}c^{-1}cb^{-1}c^{-1}cac^{-1}cbc^{-1} =$ $= (cac^{-1})^{-1}(cbc^{-1})^{-1}(cac^{-1})(cbc^{-1}) = [cac^{-1}, cbc^{-1}]$. (iii). Jeśli $ab = ba$, to $b^{-1}ab = a$, skąd $a^{-1}b^{-1}ab = e$, czyli $[a, b] = e$. Na odwrót, niech $[a, b] = e$. Wtedy $a^{-1}b^{-1}ab = e$, skąd $b^{-1}ab = a$ oraz $ab = ba$. $\square$

Definicja 4.25. *Komutantem* grupy G nazywamy jej podgrupę G' generowaną przez wszystkie komutatory $[a, b]$ dla $a, b \in G$. Zatem

$$G' = \langle\{[a, b] \ : \ a, b \in G\}\rangle. \tag{7}$$

Stwierdzenie 4.26. Komutant G' grupy G jest zbiorem iloczynów wszystkich komutatorów wszystkich elementów tej grupy. Ponadto $G' \lhd G$ i grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy $G' = \{e\}$.

Dowód. Ponieważ $e = [e, e]$, więc ze Stwierdzenia 4.25 (i) oraz ze Stwierdzenia 2.15 wynika od razu, że G' jest zbiorem iloczynów wszystkich komutatorów wszystkich elementów grupy G. Weźmy dowolne $g \in G$ i dowolne $x \in G'$. Wtedy istnieją komutatory $x_1, \ldots, x_n$ takie, że $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. Zatem $gxg^{-1} = g(x_1x_2 \ldots x_n)g^{-1} = (gx_1g^{-1})(gx_2g^{-1}) \ldots (gx_ng^{-1}) \in G'$, na mocy Stwierdzenia 4.24 (ii). Wobec tego $G' \lhd G$ na mocy Stwierdzenia 4.15.

Jeśli $G' = \{e\}$, to dla dowolnych $a, b \in G$, $[a, b] = e$, skąd na mocy Stwierdzenia 4.24 (iii), $a \cdot b = b \cdot a$ i grupa G jest abelowa. Na odwrót, niech grupa G będzie abelowa. Wtedy znowu ze Stwierdzenia 4.24 (iii), $[a, b] = e$ dla wszystkich $a, b \in G$, więc $G' \subseteq \{e\}$ i wobec tego $G' = \{e\}$. $\square$