Wykład 10
Przestrzeń przekształceń liniowych

1 Określenie przestrzeni przekształceń liniowych

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi. Oznaczmy przez $L(V;W)$ zbiór wszystkich przekształceń liniowych $f\colon V \to W$. Dla $f,g \in L(V;W)$ i $a \in \mathbb{R}$ określamy przekształcenia $f+g\colon V \to W$ i $a \cdot f\colon V \to W$ przyjmując, że dla każdego $\alpha \in V$

$$(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) \text{ i } (a \cdot f)(\alpha) = a \circ f(\alpha). \tag{1}$$

Wykażemy, że wówczas $f+g, a \cdot f \in L(V;W)$. W tym celu weźmy dowolne $\alpha, \beta \in V$ i dowolne $b \in \mathbb{R}$. Z definicji przekształcenia liniowego i ze wzoru (1) mamy

$$(f+g)(\alpha+\beta) = f(\alpha+\beta) + g(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta) + g(\alpha) + g(\beta) =$$

$$= [f(\alpha) + g(\alpha)] + [f(\beta) + g(\beta)] = (f+g)(\alpha) + (f+g)(\beta)$$

oraz

$$(f+g)(b \circ \alpha) = f(b \circ \alpha) + g(b \circ \alpha) = b \circ f(\alpha) + b \circ g(\alpha) = b \circ [f(\alpha) + g(\alpha)] = b \circ [(f+g)(\alpha)],$$

więc $f+g \in L(V;W)$. Podobnie

$$(a \cdot f)(\alpha+\beta) = a \circ f(\alpha+\beta) = a \circ [f(\alpha) + f(\beta)] = a \circ f(\alpha) + a \circ f(\beta) = (a \cdot f)(\alpha) + (a \cdot f)(\beta)$$

i

$$(a \cdot f)(b \circ \alpha) = a \circ f(b \circ \alpha) = a \circ [b \circ f(\alpha)] = (ab) \circ f(\alpha) = (ba) \circ f(\alpha) = b \circ [a \circ f(\alpha)] = b \circ [(a \cdot f)(\alpha)],$$

zatem także $a \cdot f \in L(V;W)$.

Oznaczmy przez Θ przekształcenie trywialne przestrzeni V w przestrzeń W. Zatem

$$\Theta(\alpha) = \theta \text{ dla każdego } \alpha \in V. \tag{2}$$

Jest jasne, że $\Theta \in L(V;W)$.

Twierdzenie 10.1. *Dla dowolnych przestrzeni liniowych V i W zbiór $L(V;W)$ z działaniami $+$ i $\cdot$ określonymi wzorami (1) tworzy przestrzeń liniową.*

Dowód. Sprawdzamy po kolei wszystkie aksjomaty przestrzeni liniowej. Weźmy dowolne $f,g,h \in L(V;W)$ i dowolne $\alpha \in V$, $a,b \in \mathbb{R}$. Wtedy:
A1. $[(f+g)+h](\alpha) = (f+g)(\alpha) + h(\alpha) = [f(\alpha)+g(\alpha)] + h(\alpha) = f(\alpha) + [g(\alpha)+h(\alpha)] = f(\alpha) + (g+h)(\alpha) = [f+(g+h)](\alpha)$, więc $(f+g)+h = f+(g+h)$;
A2. $(f+g)(\alpha) = f(\alpha)+g(\alpha) = g(\alpha)+f(\alpha) = (g+f)(\alpha)$, więc $f+g = g+f$;
A3. $(f+\Theta)(\alpha) = f(\alpha) + \Theta(\alpha) = f(\alpha) + \theta = f(\alpha)$, więc $f + \Theta = f$;

A4. $(f+(-1)\cdot f)(\alpha) = f(\alpha)+[(-1)\cdot f](\alpha) = f(\alpha)+(-1)\circ f(\alpha) = \theta = \Theta(\alpha)$, więc $(-1)\circ f = -f$ oraz $(-f)(\alpha) = -f(\alpha)$;
A5. $[a\cdot(f+g)](\alpha) = a\circ[(f+g)(\alpha)] = a\circ[f(\alpha)+g(\alpha)] = a\circ f(\alpha)+a\circ g(\alpha) = (a\cdot f)(\alpha)+(a\cdot g)(\alpha) = (a\cdot f + a\cdot g)(\alpha)$, więc $a\cdot(f+g) = a\cdot f + a\cdot g$;
A6. $[(a+b)\cdot f](\alpha) = (a+b)\circ f(\alpha) = a\circ f(\alpha)+b\circ f(\alpha) = (a\cdot f)(\alpha)+(b\cdot f)(\alpha) = (a\cdot f+b\cdot f)(\alpha)$, więc $(a+b)\cdot f = a\cdot f + b\cdot f$;
A7. $[(ab)\cdot f](\alpha) = (ab)\circ f(\alpha) = a\circ[b\circ f(\alpha)] = a\circ[(b\cdot f)(\alpha)] = [a\cdot(b\cdot f)](\alpha)$, więc $(ab)\cdot f = a\cdot(b\cdot f)$;
A8. $(1\cdot f)(\alpha) = 1\circ f(\alpha) = f(\alpha)$, więc $1\cdot f = f$. □

2 Baza przestrzeni przekształceń liniowych

Twierdzenie 10.2. *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi o bazach uporządkowanych $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ i $(\beta_1,\dots,\beta_m)$ odpowiednio. Niech dla $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$, $\varphi_{ij}\colon V\to W$ będzie przekształceniem liniowym wyznaczonym jednoznacznie przez warunki*

$$\varphi_{ij}(\alpha_k) = \begin{cases} \theta, & \text{gdy} \quad k\neq j, \\ \beta_i, & \text{gdy} \quad k = j. \end{cases} \tag{3}$$

Wówczas układ $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ jest bazą przestrzeni $L(V;W)$.

Dowód. Wykażemy najpierw, że układ $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ jest liniowo niezależny. W tym celu weźmy dowolny układ $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ liczb taki, że $\sum\limits_{i,j} a_{ij}\cdot\varphi_{ij} = \Theta$. Wtedy dla dowolnego $k=1,\dots,n$ mamy $\theta = \left(\sum\limits_{i,j} a_{ij}\cdot\varphi_{ij}\right)(\alpha_k) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}\circ\varphi_{ij}(\alpha_k) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik}\circ\beta_i$. Ale wektory $\beta_1,\dots,\beta_m$ są liniowo niezależne, więc $a_{ik} = 0$ dla wszystkich $i=1,\dots,m$ i dla wszystkich $k=1,\dots,n$. Zatem układ $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ jest liniowo niezależny.

Pozostaje jeszcze wykazać, że układ $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ generuje przestrzeń $L(V;W)$. W tym celu weźmy dowolne $f\in L(V;W)$. Wtedy dla każdego $k=1,\dots,n$ istnieją skalary $a_{1k},\dots,a_{mk}$ takie, że $f(\alpha_k) = a_{1k}\circ\beta_1+\ldots+a_{mk}\circ\beta_m$. Stąd dla $k=1,\dots,n$ mamy

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij}\cdot\varphi_{ij}\right)(\alpha_k) = \sum_{i,j} a_{ij}\circ\varphi_{ij}(\alpha_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\circ\beta_i = f(\alpha_k).$$

Zatem z jednoznaczności określenia przekształcenia liniowego na bazie $f = \sum\limits_{i,j} a_{ij}\cdot\varphi_{ij}$. □

Uwaga 10.3. Bazę $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ przestrzeni $L(V;W)$ podaną w twierdzeniu 10.2 będziemy nazywali **bazą wyznaczoną przez bazy** $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ i $(\beta_1,\dots,\beta_m)$ przestrzeni V i W odpowiednio.

Wniosek 10.4. *Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi. Wówczas zachodzi równość*

$$\dim L(V;W) = \dim V \cdot \dim W. \tag{4}$$

3 Macierz przekształcenia liniowego

Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będą uporządkowanymi bazami przestrzeni liniowych V i W odpowiednio. Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas dla $k = 1, \ldots, n$ jest $f(\alpha_k) \in W$, więc istnieją $a_{1k}, \ldots, a_{mk} \in \mathbb{R}$ takie, że

$$f(\alpha_k) = a_{1k} \circ \beta_1 + \ldots + a_{mk} \circ \beta_m. \tag{5}$$

Otrzymaną w ten sposób $m \times n$ macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{6}$$

nazywamy **macierzą przekształcenia liniowego f w bazach** $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ przestrzeni V i W odpowiednio. Zatem kolejne kolumny macierzy (6) są wektorami współrzędnych wektora $f(\alpha_k)$ w bazie $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ przestrzeni W dla $k = 1, \ldots, n$.

Przykład 10.5. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Wówczas A jest macierzą przekształcenia liniowego $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ danego wzorem analitycznym

$$f([x_1, \ldots, x_n]) = [a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n]$$

w bazach kanonicznych tych przestrzeni. □

Twierdzenie 10.6. *Niech A będzie macierzą przekształcenia liniowego $f\colon V \to W$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Jeżeli $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ jest wektorem współrzędnych wektora $\alpha \in V$ w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, to $A\cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ jest wektorem współrzędnych wektora $f(\alpha) \in W$ w bazie $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.*

Dowód. Ponieważ $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \circ \alpha_i$, więc z własności przekształceń liniowych i ze wzoru (5) mamy

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i \circ f(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \circ \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \circ \beta_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i \cdot a_{ji}) \circ \beta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot a_{ji}) \circ \beta_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot a_{ji}) \right) \circ \beta_j.$$

Zatem $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_{ji}$ jest j-tą współrzędną wektora $f(\alpha)$ w bazie $(\beta_1, \dots, \beta_m)$. Ponadto z definicji mnożenia macierzy j-tym wyrazem macierzy $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ jest $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_{ji}$. □

Przykład 10.7. Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $f\colon V \to W$ w bazach (α_1, α_2), (β_1, β_2). Obliczymy $f(\alpha)$ dla $\alpha = \alpha_1 - 3 \circ \alpha_2$. Wektorem współrzędnych wektora α w bazie (α_1, α_2) jest $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, zatem z twierdzenia 10.6, wektorem współrzędnych wektora $f(\alpha)$ w bazie (β_1, β_2) jest $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -14 \end{bmatrix}$. Otrzymaliśmy więc, że $f(\alpha) = -7 \circ \beta_1 - 14 \circ \beta_2$. □

Twierdzenie 10.8. *Niech A będzie macierzą przekształcenia liniowego $f\colon V \to W$ w bazach $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \dots, \beta_m)$. Wówczas*

$$\dim Im\, f = r(A).$$

Dowód. Zauważmy, że $Im\, f = lin(f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)) = lin(\sum_{j=1}^{m} a_{j1} \circ \beta_j, \dots, \sum_{j=1}^{m} a_{jn} \circ \beta_j)$. Z twierdzenia 9.13 wiemy, że istnieje izomorfizm liniowy $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^m$ taki, że $\varphi(\beta_j) = \varepsilon_j$ dla $j = 1, \dots, m$. Stąd $Im\, f \cong \varphi(Im\, f)$, więc w szczególności $\dim Im\, f = \dim \varphi(Im\, f)$. Ale $\varphi(Im\, f) = lin([a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}], \dots, [a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}])$, więc $\dim \varphi(Im\, f) = r(A)$, czyli $\dim Im\, f = r(A)$. □

Lemat 10.9. *Niech $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Jeżeli dla dowolnych skalarów $a_1, \dots, a_n$ zachodzi równość*

$$A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

to $A = B$.

Dowód. Niech $A = [a_{ij}]$ oraz niech $B = [b_{ij}]$. Weźmy dowolne ustalone $j = 1, \dots, n$ i niech $a_j = 1$ oraz $a_k = 0$ dla wszystkich $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$. Wtedy z definicji mnożenia macierzy i-tym elementem macierzy $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ jest a_{ij} dla $i = 1, \dots, m$. Podobnie

i-tym elementem macierzy $B \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ jest b_{ij} dla $i = 1, \dots, m$. Ale $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} =$ $B \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, więc $a_{ij} = b_{ij}$ dla dowolnych $i = 1, \dots, m$ oraz $j = 1, \dots, n$. Ponadto $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, więc $A = B$. $\square$

Twierdzenie 10.10. *Niech V, W, U będą przestrzeniami liniowymi o bazach uporządkowanych $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \dots, \beta_m)$, $(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ odpowiednio. Niech A będzie macierzą przekształcenia $f \in L(V; W)$ w bazach $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ oraz niech B będzie macierzą przekształcenia $g \in L(W; U)$ w bazach $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ i $(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$. Wówczas $B \cdot A$ jest macierzą przekształcenia $g \circ f \in L(V; U)$ w bazach $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i $(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$.*

Dowód. Niech $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ będzie wektorem współrzędnych wektora $\alpha \in V$ w bazie $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Wtedy z twierdzenia 10.6 mamy, że $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ jest wektorem współrzędnych wektora $f(\alpha)$ w bazie $(\beta_1, \dots, \beta_m)$. Ponownie z twierdzenia 10.6 otrzymujemy, że $B \cdot \left(A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)$ jest wektorem współrzędnych wektora $g(f(\alpha))$ w bazie $(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$. Ale

$$B \cdot \left(A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right) = (B \cdot A) \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

więc jeśli $C \in M_{s\times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą przekształcenia $g \circ f \in L(V; U)$ w bazach $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i $(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, to na mocy twierdzenia 10.6 $C \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = (B \cdot A) \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Ponieważ $B \in M_{s\times m}(\mathbb{R})$ i $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, więc $B \cdot A \in M_{s\times n}(\mathbb{R})$. Z lematu 10.9 otrzymujemy równość $C = B \cdot A$. $\square$