Wykład 12
Przestrzeń sprzężona

1 Określenie i podstawowe własności przestrzeni sprzężonej

Niech V będzie przestrzenią liniową. Przekształcenie liniowe $f\colon V \to \mathbb{R}$ nazywamy **funkcjonałem liniowym**. Jak wiemy, $L(V;\mathbb{R})$ jest przestrzenią liniową. Nazywamy ją **przestrzenią sprzężoną przestrzeni** V i oznaczamy przez V^*.

Przykład 12.1. Postacią ogólną funkcjonału liniowego $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest

$$f([x_1, x_2, \ldots, x_n]) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dowolnymi ustalonymi liczbami. □

Twierdzenie 12.2. *Jeżeli V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową, to*

$$V^* \cong V.$$

Dowód. Ponieważ $\dim V < \infty$, więc $\dim V^* = \dim L(V;\mathbb{R}) = \dim V \cdot \dim \mathbb{R} = \dim V \cdot 1 = \dim V$. Stąd z twierdzenia 9.13 mamy, e $V^* \cong V$. □

Uwaga 12.3. Można wykazać, że jeżeli V jest przestrzenią nieskończenie wymiarową, to $\dim V < \dim V^*$, a więc w szczególności przestrzenie V^* i V nie są izomorficzne.

Uwaga 12.4. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru $n \in \mathbb{N}$ i niech $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ będzie uporządkowaną bazą przestrzeni V. Niech $\alpha_i^* \in V^*$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ będzie funkcjonałem liniowym, który na bazie $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ jest określony wzorem

$$\alpha_i^*(\alpha_k) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } k \neq i \\ 1, \text{ gdy } k = i \end{cases}. \tag{1}$$

Jeżeli $f \in V^*$, to $f(\alpha_k) = a_k$ dla pewnych $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, więc $f(\alpha_k) = a_k = (a_1 \cdot \alpha_1^* + a_2 \cdot \alpha_2^* + \ldots + a_n \cdot \alpha_n^*)(\alpha_k)$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$, czyli $f = a_1 \cdot \alpha_1^* + a_2 \cdot \alpha_2^* + \ldots + a_n \cdot \alpha_n^*$. Zatem wektory $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ generują przestrzeń V^*, która ma wymiar n. Stąd $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$ jest baz przestrzeni V^*; nazywamy j **bazą sprzężoną** do bazy $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Twierdzenie 12.5 (o oddzielaniu). *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V. Wówczas dla każdego wektora $\alpha \in V \setminus W$ istnieje funkcjonał $f \in V^*$ taki, że $f(\alpha) \neq 0$ i $f(W) = \{0\}$.*

Dowód. Ponieważ $\alpha \in V \setminus W$, więc $W \cap lin(\alpha) = \{\theta\}$. Z twierdzenia 7.30 wynika zatem, że istnieje podprzestrzeń U przestrzeni V taka, że $V = W \oplus lin(\alpha) \oplus U$, skąd $V = lin(\alpha) \oplus V_1$, gdzie $V_1 = W \oplus U$, czyli $W \subseteq V_1$. Każdy wektor $\beta \in V$ może być zatem jednoznacznie zapisany w postaci $\beta = a \circ \alpha + \gamma$ dla pewnych $a \in \mathbb{R}$, $\gamma \in V_1$. Dla takiego β definiujemy $f(\beta) = a$. Proste sprawdzenie pokazuje, że $f \in V^*$. Ponieważ $Ker(f) = V_1 \supseteq W$, więc $f(W) = \{0\}$. Ponadto $f(\alpha) = f(1 \circ \alpha + \theta) = 1$. Zatem f jest szukanym funkcjonałem. $\square$

Wniosek 12.6. *Dla dowolnego niezerowego wektora α przestrzeni liniowej V istnieje funkcjonał $f \in V^*$ taki, że $f(\alpha) \neq 0$.*

Dowód. Wystarczy zastosować twierdzenie 12.5 do podprzestrzeni $W = \{\theta\}$. $\square$

2 Zanurzenie kanoniczne przestrzeni V w przestrze V^{**}

Niech V będzie przestrzenią liniową. Definiujemy

$$V^{**} = (V^*)^*.$$

Dowolny wektor $\alpha \in V$ wyznacza przekształcenie α^{**} przestrzeni V^* w ciało $\mathbb{R}$ określone wzorem

$$\alpha^{**}(\varphi) = \varphi(\alpha) \text{ dla każdego } \varphi \in V^*. \tag{2}$$

Tak określone przekształcenie α^{**} jest liniowe, gdyż dla dowolnych $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*, a \in \mathbb{R}$ mamy
$\alpha^{**}(\varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_1 + \varphi_2)(\alpha) = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) = \alpha^{**}(\varphi_1) + \alpha^{**}(\varphi_2)$,
$\alpha^{**}(a \cdot \varphi_1) = (a \cdot \varphi_1)(\alpha) = a \cdot \varphi_1(\alpha) = a \cdot \alpha^{**}(\varphi_1)$.

Zatem dla dowolnego $\alpha \in V$ mamy, że $\alpha^{**} \in V^{**}$.

Twierdzenie 12.7. *Przekształcenie $\alpha \mapsto \alpha^{**}$ jest zanurzeniem przestrzeni liniowej V w przestrzeń V^{**}. W szczególności, jeżeli $\dim V < \infty$, to to zanurzenie jest izomorfizmem.*

Dowód. Dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$, $\varphi \in V^*$, $a \in \mathbb{R}$ mamy, że
$(\alpha + \beta)^{**}(\varphi) = \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \alpha^{**}(\varphi) + \beta^{**}(\varphi) = (\alpha^{**} + \beta^{**})(\varphi)$, więc

$$(\alpha + \beta)^{**} = \alpha^{**} + \beta^{**}.$$

Ponadto $(a \circ \alpha)^{**}(\varphi) = \varphi(a \circ \alpha) = a \cdot \varphi(\alpha) = a \cdot \alpha^{**}(\varphi) = (a \cdot \alpha^{**})(\varphi)$, czyli

$$(a \cdot \alpha)^{**} = a \cdot \alpha^{**}.$$

Zatem przekształcenie $\alpha \mapsto \alpha^{**}$, $\alpha \in V$, jest liniowe.

Weźmy dowolne $\alpha \in V \setminus \{\theta\}$. Wtedy, z wniosku 12.6, istnieje $\varphi \in V^*$ takie, że $\varphi(\alpha) \neq 0$, czyli $\alpha^{**}(\varphi) \neq 0$. Zatem $\alpha^{**} \neq 0$, skąd wynika, że jądro przekształcenia $\alpha \mapsto \alpha^{**}$ jest trywialne. Zatem to przekształcenie jest zanurzeniem.

Jeżeli dodatkowo $\dim V < \infty$, to z twierdzenia 12.2, $\dim V^* = \dim V$ oraz $\dim V^* = \dim V^{**}$, skąd $\dim V = \dim V^{**}$. Ale przekształcenie $\alpha \mapsto \alpha^{**}$ jest zanurzeniem, więc z $\dim V^{**} = \dim V < \infty$ jest ono ,,na", zatem jest izomorfizmem. $\square$

Uwaga 12.8. W przypadku przestrzeni liniowej V skończenie wymiarowej samo istnienie izomorfizmu $V \cong V^{**}$ nie jest faktem interesującym, gdyż wynika bezpośrednio z twierdzenia 12.2, ale rezultatem nowym i ciekawym jest możliwość określenia naturalnego i uniwersalnego przepisu, ktry dla kadej skoczenie wymiarowej przestrzeni liniowej V pozwala określić taki izomorfizm. Dzięki temu można każdą skończenie wymiarową przestrzeń liniową V utożsamiać z przestrzenią V^{**}. Jeśli zaś $\dim V = \infty$, to $\dim V < \dim V^* < \dim V^{**}$, a więc przestrzenie V i V^{**} nie są izomorficzne, a więc w szczególności zanurzenie $\alpha \mapsto \alpha^{**}$ nie jest ,,na".

3 Przekształcenie sprzężone

Definicja 12.9. Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej V w przestrzeń liniową W. Przekształcenie $f^*\colon W^* \to V^*$ dane wzorem

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f \text{ dla kadego } \varphi \in W^*$$

nazywamy **przekształceniem sprzężonym** z przekształceniem f.

Ponieważ f i φ są liniowe, więc $f^*(\varphi) \in V^*$ dla każdego $\varphi \in W^*$. Teraz pokażemy, że przekształcenie f^* jest liniowe. W tym celu weźmy dowolne $\varphi_1, \varphi_2 \in W^*$, $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in V$. Wtedy

$$[f^*(\varphi_1 + \varphi_2)](\alpha) = [(\varphi_1 + \varphi_2) \circ f](\alpha) = (\varphi_1 + \varphi_2)(f(\alpha)) =$$

$$= \varphi_1(f(\alpha)) + \varphi_2(f(\alpha)) = (\varphi_1 \circ f)(\alpha) + (\varphi_2 \circ f)(\alpha) =$$

$$= [f^*(\varphi_1)](\alpha) + [f^*(\varphi_2)](\alpha) = [f^*(\varphi_1) + f^*(\varphi_2)](\alpha),$$

więc

$$f^*(\varphi_1 + \varphi_2) = f^*(\varphi_1) + f^*(\varphi_2).$$

Ponadto

$$[f^*(a \cdot \varphi_1)](\alpha) = [(a \cdot \varphi_1) \circ f](\alpha) = (a \cdot \varphi_1)(f(\alpha)) =$$

$$= a \cdot \varphi_1(f(\alpha)) = a \cdot (\varphi_1 \circ f)(\alpha) = a \cdot [f^*(\varphi_1)](\alpha) = [a \cdot f^*(\varphi_1)](\alpha),$$

zatem

$$f^*(a \cdot \varphi_1) = a \cdot f^*(\varphi_1).$$

Stąd przekształcenie f^* jest liniowe, czyli $f^* \in L(W^*; V^*)$.

W podobny sposób można wykazać, że dla dowolnych $f, g \in L(V; W)$, $a \in \mathbb{R}$:

$$(f + g)^* = f^* + g^* \text{ oraz } (a \cdot f)^* = a \cdot f^*.$$

Zatem przekształcenie $f \mapsto f^*$, $f \in L(V; W)$ jest liniowe.

Twierdzenie 12.10. *Przekształcenie $f \mapsto f^*$ jest zanurzeniem przestrzeni liniowej $L(V; W)$ w przestrzeń $L(W^*; V^*)$. Jeśli dodatkowo $\dim V < \infty$ i $\dim W < \infty$, to przekształcenie jest izomorfizmem.*

Dowód. Niech $f \in L(V; W)$, $f \neq 0$. Wtedy istnieje $\alpha \in V$ takie, że $f(\alpha) \neq \theta$. Zatem, z wniosku 12.6, istnieje $\varphi \in W^*$ takie, że $\varphi(f(\alpha)) \neq 0$, skąd $0 \neq (\varphi \circ f)(\alpha) = [f^*(\varphi)](\alpha)$, czyli $f^*(\varphi) \neq 0$. Stąd przekształcenie liniowe $f \mapsto f^*$ ma trywialne jądro, czyli jest zanurzeniem.

Załóżmy teraz, że $\dim V < \infty$ i $\dim W < \infty$. Wtedy z wniosku 10.4 i twierdzenia 12.2, $\dim L(W^*; V^*) = \dim W^* \cdot \dim V^* = \dim W \cdot \dim V = \dim L(V; W)$, więc to zanurzenie jest izomorfizmem. □

Zadanie 12.11. Niech V, W, U będą przestrzeniami liniowymi i niech $f\colon V \to W$ i $g\colon W \to U$ będą przekształceniami liniowymi. Pokazać, że $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Twierdzenie 12.12. *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi i niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas*

(i) f jest epimorfizmem $\iff$ f^* jest monomorfizmem;

(ii) f jest monomorfizmem $\iff$ f^* jest epimorfizmem.

Dowód. (i) $\Rightarrow$. Załóżmy, że f jest ,,na"i niech $f^*(\varphi) = 0$ dla pewnego $\varphi \in W^*$. Weźmy dowolne $\beta \in W$. Wtedy istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\beta = f(\alpha)$, skąd $\varphi(\beta) = \varphi(f(\alpha)) = (\varphi \circ f)(\alpha) = [f^*(\varphi)](\alpha) = 0$. Stąd wobec dowolności β, $\varphi = 0$. Zatem $Kerf^* = \{0\}$, czyli f^* jest zanurzeniem.

$\Leftarrow$. Załóżmy, że f^* jest różnowartościowe, ale f nie jest ,,na". Wtedy $W \neq f(V)$, więc na mocy twierdzenia 12.5, istnieje niezerowy funkcjonał $\varphi \in W^*$ taki, że $\varphi(f(V)) = \{0\}$. Wobec tego $\varphi \circ f = 0$, czyli $f^*(\varphi) = 0$, skąd $\varphi = 0$ i mamy sprzeczność. Zatem f jest ,,na".

(ii) $\Leftarrow$. Załóżmy, że f^* jest ,,na", ale f nie jest różnowartościowe. Wtedy istnieje niezerowe $\alpha \in V$ takie, że $f(\alpha) = \theta$. Z wniosku 12.6, istnieje funkcjonał $\varphi \in V^*$ taki, że $\varphi(\alpha) \neq 0$. Ponadto f^* jest ,,na", więc istnieje $\psi \in W^*$ takie, że $\varphi = f^*(\psi) = \psi \circ f$. Stąd $0 \neq \varphi(\alpha) = = (\psi \circ f)(\alpha) = \psi(f(\alpha)) = \psi(\theta) = 0$ i mamy sprzeczność. Zatem f jest różnowartościowe.

$\Rightarrow$. Załóżmy, że f jest różnowartościowe i niech $\varphi \in V^*$. Z twierdzenia 7.30 istnieje podprzestrzeń U przestrzeni W taka, że $W = f(V) \oplus U$. Określamy przekształcenie $h\colon W \to \mathbb{R}$ wzorem $h(f(\alpha) + \beta) = \varphi(\alpha)$ dla $\alpha \in V$ i $\beta \in U$. Wtedy h jest dobrze określoną funkcją. Ponadto dla $\alpha_1, \alpha_2 \in V$, $\beta_1, \beta_2 \in U$, $a \in \mathbb{R}$ mamy, że

$$h((f(\alpha_1) + \beta_1) + (f(\alpha_2) + \beta_2)) = h(f(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)) = \varphi(\alpha_1 + \alpha_2) =$$

$$= \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) = h(f(\alpha_1) + \beta_1) + h(f(\alpha_2) + \beta_2)$$

oraz

$$h(a \circ (f(\alpha_1) + \beta_1)) = h(a \circ f(\alpha_1) + a \circ \beta_1) =$$

$$= h(f(a \circ \alpha_1) + a \circ \beta_1) = \varphi(a \circ \alpha_1) = a \cdot \varphi(\alpha_1) = a \cdot h(f(\alpha_1) + \beta_1),$$

skąd $h \in W^*$. Ponadto dla $\alpha \in V$ mamy, że $[f^*(h)](\alpha) = (h \circ f)(\alpha) = h(f(\alpha)) = h(f(\alpha) + \theta) = \varphi(\alpha)$, więc $f^*(h) = \varphi$, czyli f^* jest ,,na". $\square$

Twierdzenie 12.13. *Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi i niech $f \in L(V;W)$. Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą V oraz niech $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będzie bazą W. Jeśli A jest macierza f w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, to A^T jest macierzą f^* w bazach sprzężonych $(\beta_1^*, \ldots, \beta_m^*)$ i $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$.*

Dowód. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Wtedy dla $j = 1, \ldots, n$ mamy $f(\alpha_j) = a_{1j} \circ \beta_1 + a_{2j} \circ \beta_2 + \ldots + a_{mj} \circ \beta_m$. Stąd dla $i = 1, \ldots, m$ oraz dla $j = 1, \ldots, n$ mamy $[f^*(\beta_i^*)](\alpha_j) = [\beta_i^* \circ f](\alpha) = \beta_i^*(f(\alpha_j)) = \beta_i^*(a_{1j} \circ \beta_1 + a_{2j} \circ \beta_2 + \ldots + a_{mj} \circ \beta_m) = a_{ij}$ oraz $(a_{i1}\alpha_1^* + \ldots + +a_{in}\alpha_n^*)(\alpha_j) = a_{ij}$. Zatem $f^*(\beta_i^*) = a_{i1}\alpha_1^* + \ldots + a_{in}\alpha_n^*$ dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Zatem macierzą f^* w bazach sprzężonych $(\beta_1^*, \ldots, \beta_m^*)$ i $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$ jest A^T. $\square$

Wniosek 12.14. *Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi i niech $f \in L(V;W)$. Wtedy* $\dim Im\, f = \dim Im\, f^*$.

Dowód. Przy oznaczeniach twierdzenia 12.13 na mocy twierdzeń 10.8 i 12.13 mamy, że $\dim Im\, f = r(A) = r(A^T) = \dim Im\, f^*$. $\square$