Wykład 13
Funkcjonały dwuliniowe

1 Izomorfizmy kanoniczne

Definicja 13.1. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi. Funkcję $\xi\colon V \times W \to \mathbb{R}$ nazywamy **funkcjonałem dwuliniowym**, jeżeli
(i) $\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ \forall_{\alpha,\beta\in V}\ \forall_{\gamma\in W}\ \xi(a\circ\alpha + b\circ\beta,\gamma) = a\cdot\xi(\alpha,\gamma) + b\cdot\xi(\beta,\gamma)$ oraz
(ii) $\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ \forall_{\gamma\in V}\ \forall_{\alpha,\beta\in W}\ \xi(\gamma, a\circ\alpha + b\circ\beta) = a\cdot\xi(\gamma,\alpha) + b\cdot\xi(\gamma,\beta)$.
Zbiór wszystkich funkcjonałów dwuliniowych z $V\times W$ w $\mathbb{R}$ oznaczamy przez $L(V,W;\mathbb{R})$.

Stwierdzenie 13.2. $L(V,W;\mathbb{R})$ *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* $\mathbb{R}^{V\times W}$ *przekształceń ze zbioru* $V\times W$ *w ciało* $\mathbb{R}$.

Dowód. Przede wszystkim zauważmy, że zbiór $L(V,W;\mathbb{R})$ jest niepusty, bo np. przekształcenie zerowe $\Theta(\alpha,\beta) = 0$ dla wszystkich $\alpha\in V$, $\beta\in W$ jest funkcjonałem dwuliniowym z $V\times W$ w $\mathbb{R}$.

Niech $\xi,\eta\in L(V,W;\mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}$. Wykażemy, że $\xi+\eta\in L(V,W;K)$ oraz $a\cdot\xi\in L(V,W;\mathbb{R})$. W tym celu weźmy dowolne $\alpha,\beta\in V$, $\gamma\in W$, $b,c\in\mathbb{R}$. Wtedy

$$(\xi+\eta)(b\circ\alpha + c\circ\beta,\gamma) = \xi(b\circ\alpha + c\circ\beta,\gamma) + \eta(b\circ\alpha + c\circ\beta,\gamma) =$$

$$= b\cdot\xi(\alpha,\gamma) + c\cdot\xi(\beta,\gamma) + b\cdot\eta(\alpha,\gamma) + c\cdot\eta(\beta,\gamma) =$$
$$= b\cdot(\xi+\eta)(\alpha,\gamma) + c\cdot(\xi+\eta)(\beta,\gamma)$$

oraz

$$(a\cdot\xi)(b\circ\alpha + c\circ\beta,\gamma) = a\cdot\xi(b\circ\alpha + c\circ\beta,\gamma) =$$
$$= a\cdot(b\cdot\xi(\alpha,\gamma) + c\cdot\xi(\beta,\gamma)) = b\cdot(a\cdot\xi)(\alpha,\gamma) + c\cdot(a\cdot\xi)(\beta,\gamma).$$

W ten sposób wykazaliśmy liniowość przekształceń $\xi+\eta$ i $a\cdot\xi$ na pierwszej współrzędnej. Analogicznie dowodzimy liniowości tych przekształceń na drugiej współrzędnej. $\square$

Uwaga 13.3. Niech $\xi\in L(V,W;\mathbb{R})$. Dla dowolnego ustalonego $\alpha\in V$ określamy przekształcenie $\xi'(\alpha)\colon W\to\mathbb{R}$ kładąc

$$(\xi'(\alpha))(\beta) = \xi(\alpha,\beta) \ \text{ dla } \ \beta\in W. \tag{1}$$

Wówczas dla dowolnych $a_1,a_2\in\mathbb{R}$, $\beta_1,\beta_2\in W$

$$(\xi'(\alpha))(a_1\circ\beta_1 + a_2\circ\beta_2) = \xi(\alpha, a_1\circ\beta_1 + a_2\circ\beta_2) =$$

$$= a_1\cdot\xi(\alpha,\beta_1) + a_2\cdot\xi(\alpha,\beta_2) = a_1\cdot(\xi'(\alpha))(\beta_1) + a_2\cdot(\xi'(\alpha))(\beta_2).$$

Zatem $\xi'(\alpha)\in W^*$. W ten sposób mamy określone przekształcenie $\xi'\colon V\to W^*$.

Analogicznie, dla dowolnego ustalonego $\beta \in W$ określamy przekształcenie $\xi"(\beta)\colon V \to \mathbb{R}$ kładąc

$$(\xi"(\beta))(\alpha) = \xi(\alpha, \beta) \text{ dla } \alpha \in V. \tag{2}$$

Wówczas dla dowolnych $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in V$

$$(\xi"(\beta))(a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2) = \xi(a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2, \beta) =$$

$$= a_1 \cdot \xi(\alpha_1, \beta) + a_2 \cdot \xi(\alpha_2, \beta) = a_1 \cdot (\xi"(\beta))(\alpha_1) + a_2 \cdot (\xi"(\beta))(\alpha_2).$$

Zatem $\xi"(\beta) \in W^*$. W ten sposób mamy określone przekształcenie $\xi" : W \to V^*$.

Twierdzenie 13.4. *Jeżeli V i W są przestrzeniami liniowymi, to przekształcenie $\xi \mapsto \xi'$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowej $L(V, W; \mathbb{R})$ na przestrzeń $L(V; W^*)$ oraz przekształcenie $\xi \mapsto \xi"$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowej $L(V, W; \mathbb{R})$ na przestrzeń $L(W; V^*)$.*

Dowód. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in V$, $\gamma \in W$ mamy, że $(\xi'(a \circ \alpha + b \circ \beta))(\gamma) = \xi(a \circ \alpha + b \circ \beta, \gamma) = a \cdot \xi(\alpha, \gamma) + b \cdot \xi(\beta, \gamma) = (a \cdot \xi'(\alpha))(\gamma) + (b \cdot \xi'(\beta))(\gamma) = (a \cdot \xi'(\alpha) + b \cdot \xi'(\beta))(\gamma)$, skąd wobec dowolności γ mamy, że

$$\xi'(a \circ \alpha + b \circ \beta) = a \cdot \xi'(\alpha) + b \cdot \xi'(\beta).$$

Zatem przekształcenie $\xi \mapsto \xi'$ jest liniowe.

Dla $f \in L(V; W^*)$ oznaczmy przez $\bar{f}$ przekształcenie $V \times W$ w $\mathbb{R}$ dane wzorem

$$\bar{f}(\alpha, \beta) = (f(\alpha))(\beta) \text{ dla } \alpha \in V,\ \beta \in W. \tag{3}$$

Sprawdzimy, że $\bar{f} \in L(V, W; \mathbb{R})$. Aby wykazać prawdziwość warunku (i) definicji 13.1 weźmy dowolne $a, b \in \mathbb{R}$ oraz dowolne $\alpha, \beta \in V$, $\gamma \in W$. Wtedy $\bar{f}(a \circ \alpha + b \circ \beta, \gamma) = (f(a \circ \alpha + b \circ \beta))(\gamma) = (a \cdot f(\alpha) + b \cdot f(\beta))(\gamma) = a \cdot (f(\alpha))(\gamma) + b \cdot (f(\beta))(\gamma) = a \cdot \bar{f}(\alpha, \gamma) + {}+b \cdot \bar{f}(\beta, \gamma)$, czyli warunek ten zachodzi.

Teraz wykażemy, że spełniony jest warunek (ii) definicji 13.1. W tym celu weźmy dowolne $a, b \in \mathbb{R}$ oraz dowolne $\gamma \in V$, $\alpha, \beta \in W$. Wtedy $\bar{f}(\gamma, a \circ \alpha + b \circ \beta) = (f(\gamma))(a \circ \alpha + b \circ \beta) = a \cdot (f(\gamma))(\alpha) + b \cdot (f(\gamma))(\beta) = a \cdot \bar{f}(\gamma, \alpha) + b \cdot \bar{f}(\gamma, \beta)$, więc warunek ten też jest spełniony.

Zatem $\bar{f} \in L(V, W; \mathbb{R})$ i otrzymujemy odwzorowanie $f \mapsto \bar{f}$ przestrzeni $L(V; W^*)$ w przestrzeń $L(V, W; \mathbb{R})$.

Udowodnimy, że $(\bar{f})' = f$ dla dowolnego $f \in L(V; W^*)$. Dla dowolnych $\alpha \in V$, $\beta \in W$: $(((\bar{f})')(\alpha))(\beta) = \bar{f}(\alpha, \beta) = (f(\alpha))(\beta)$, skąd wobec dowolności β, $((\bar{f})')(\alpha) = f(\alpha)$, a więc wobec dowolności α, $(\bar{f})' = f$.

Teraz udowodnimy, że dla dowolnego $\xi \in L(V, W; \mathbb{R})$ jest $\bar{\xi'} = \xi$. W tym celu weźmy dowolne $\alpha \in V$, $\beta \in W$. Wtedy $(\bar{\xi'})(\alpha, \beta) = (\xi'(\alpha))(\beta) = \xi(\alpha, \beta)$, skąd wobec dowolności α i β uzyskujemy, że $\bar{\xi'} = \xi$.

Zatem przekształcenie $f \mapsto \bar{f}$ jest odwrotne do przekształcenia $\xi \mapsto \xi'$, czyli przekształcenie $\xi \mapsto \xi'$ jest bijekcją i ostatecznie jest ono izomorfizmem. W szczególności przekształcenie $f \mapsto \bar{f}$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowej $L(V; W^*)$ na przestrzeń $L(V, W; \mathbb{R})$.

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in W$, $\gamma \in V$ mamy, że

$$(\xi"(a \circ \alpha + b \circ \beta))(\gamma) = \xi(\gamma, a \circ \alpha + b \circ \beta) = a \cdot \xi(\gamma, \alpha) + b \cdot \xi(\gamma, \beta) =$$

$$= (a \cdot \xi"(\alpha))(\gamma) + (b \cdot \xi"(\beta))(\gamma) = (a \cdot \xi"(\alpha) + b \cdot \xi"(\beta))(\gamma),$$

skąd wobec dowolności γ mamy, że

$$\xi"(a \circ \alpha + b \circ \beta) = a \cdot \xi"(\alpha) + b \cdot \xi"(\beta).$$

Zatem przekształcenie $\xi \mapsto \xi"$ jest liniowe. Podobnie jak w (i) dowodzimy, że jest ono bijekcją. Zatem przekształcenie $\xi \mapsto \xi"$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowej $L(V, W; \mathbb{R})$ na przestrzeń $L(W; V^*)$. $\square$

Uwaga 13.5. Izomorfizm $\xi \mapsto \xi'$ nazywamy **kanonicznym izomorfizmem przestrzeni $L(V, W; \mathbb{R})$ na przestrzeń $L(V; W^*)$**. Natomiast izomorfizm $f \mapsto \bar{f}$ nazywamy **kanonicznym izomorfizmem przestrzeni $L(V; W^*)$ na przestrze $L(V, W; \mathbb{R})$**.

2 Przypadek przestrzeni skończenie wymiarowych

Twierdzenie 13.6. *Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi i niech $\xi \in L(V, W; \mathbb{R})$. Przy naturalnym utożsamieniu przestrzeni V^{**} z przestrzenią V oraz przestrzeni W^{**} z przestrzenią W mamy, że $\xi' = (\xi")^*$ i $\xi" = (\xi')^*$. Ponadto $\dim \xi'(V) = \dim \xi"(W)$.*

Dowód. Naturalne utożsamienie przestrzeni V^{**} z przestrzeni V polega na utożsamieniu wektora $\alpha \in V$ z przekształceniem α^{**} danym wzorem $\alpha^{**}(\varphi) = \varphi(\alpha)$ dla $\varphi \in V^*$. Zatem dla dowolnych $\alpha \in V$, $\beta \in W$ mamy, że $((\xi")^*(\alpha^{**}))(\beta) = (\alpha^{**} \circ \xi")(\beta) = \alpha^{**}(\xi"(\beta)) = = \xi"(\beta)(\alpha) = \xi(\alpha, \beta) = \xi'(\alpha)(\beta)$, skąd wobec dowolności β, $(\xi")^*(\alpha^{**}) = \xi'(\alpha)$. Ale $\alpha^{**} \equiv \alpha$, więc wobec dowolności α, $(\xi")^* = \xi'$. Stąd $\dim \xi'(V) = \dim (\xi")^*(V^{**})$.

Analogicznie pokazujemy, że $(\xi')^* = \xi"$. Ponadto, na mocy twierdzenia 12.13 mamy, że $\dim (\xi")^*(V^{**}) = \dim \xi"(W)$, więc $\dim \xi'(V) = \dim \xi"(W)$. $\square$

Definicja 13.7. Rzędem funkcjonału dwuliniowego $\xi \in L(V, W; \mathbb{R})$ nazywamy rząd przekształcenia liniowego $\xi' \in L(V; W^*)$, czyli wymiar podprzestrzeni $\xi'(V)$ (a wobec twierdzenia 13.6 jest to wymiar podprzestrzeni $\xi"(W)$).

Stwierdzenie 13.8. *Jeżeli V i W są skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi, to $\dim L(V, W; \mathbb{R}) = \dim V \cdot \dim W$.*

Dowód. Z twierdzenia 13.4, $\dim L(V, W; \mathbb{R}) = \dim L(V; W^*)$. Ponadto $\dim W < \infty$, więc z twierdzenia 12.2, $\dim W^* = \dim W$. Ale $\dim V < \infty$, więc $\dim L(V; W^*) = \dim V \cdot \dim W^* = \dim V \cdot \dim W$. Zatem $\dim L(V, W; \mathbb{R}) = \dim V \cdot \dim W$. $\square$

Twierdzenie 13.9. *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi. Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie uporządkowaną bazą przestrzeni V i niech $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będzie uporządkowaną bazą przestrzeni W. Wówczas dla dowolnych $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ przekształcenie $\xi_{ij} \colon V \times W \to \mathbb{R}$ dane wzorem*

$$\xi_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k, \sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = x_i y_j \tag{4}$$

jest funkcjonałem dwuliniowym oraz układ $(\xi_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ jest bazą przestrzeni $L(V, W; \mathbb{R})$.

Dowód. Z uwagi 12.4 wynika, że $(\beta_1^*, \ldots, \beta_m^*)$ jest bazą przestrzeni W^*. Zatem, z twierdzenia 10.2, układ $(\varphi_{ji})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$, gdzie

$$\varphi_{ji}(\alpha_k) = \begin{cases} \Theta, & \text{gdy} \quad k \neq i, \\ \beta_j^*, & \text{gdy} \quad k = i. \end{cases} \tag{5}$$

jest bazą przestrzeni $L(V; W^*)$. Z dowodu twierdzenia 13.4 wynika zatem, że układ $(\bar{\varphi}_{ji})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ jest bazą przestrzeni $L(V, W; \mathbb{R})$. Ponadto $\bar{\varphi}_{ji}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k, \sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = \left(\varphi_{ji}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k\right)\right)\left(\sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = (x_i \cdot \beta_j^*)\left(\sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) =$ $x_i y_j \cdot \beta_j^*(\beta_j) = x_i y_j$, dla dowolnych $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$. Stąd $\bar{\varphi}_{ji} = \xi_{ij}$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ i układ $(\xi_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ tworzy bazę przestrzeni $L(V, W; \mathbb{R})$. □

Definicja 13.10. Macierz $[\xi(\alpha_i, \beta_j)] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ nazywamy macierzą funkcjonału dwuliniowego $\xi \in L(V, W; \mathbb{R})$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Uwaga 13.11. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ będzie macierzą funkcjonału dwuliniowego $\xi \in L(V, W; \mathbb{R})$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Udowodnimy, że wówczas $\xi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_{ij}$. Dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ na mocy wzoru (4) $\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_{ij}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k, \sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_i y_j$ oraz z dwuliniowości ξ mamy

$$\xi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k, \sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \xi(\alpha_i, \alpha_j),$$

więc

$$\xi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k, \sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_i y_j. \tag{6}$$

Zatem rzeczywiście $\xi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_{ij}$. Na odwrót, dla dowolnych $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ przekształcenie $\xi\colon V \times W \to \mathbb{R}$ dane wzorem (6) jest równe $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_{ij}$ na mocy pierwszej części naszej uwagi, a więc $\xi \in L(V, W; \mathbb{R})$ i $[a_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ jest macierzą ξ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Zatem każdy funkcjonał dwuliniowy $\xi \in L(V, W; \mathbb{R})$ jest dany wzorem (6).

Zauważmy jeszcze, że przy utożsamieniu macierzy $[a]$ ze skalarem $a \in \mathbb{R}$ wzór (6) można zapisać w postaci:

$$\xi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k, \sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = [x_1, \ldots, x_n] \cdot A \cdot [y_1, \ldots, y_m]^T. \tag{7}$$

Twierdzenie 13.12. *Niech A będzie macierzą funkcjonału dwuliniowego $\xi \in L(V, W; \mathbb{R})$ danego wzorem (6) w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Wtedy A^T jest macierzą przekształcenia liniowego ξ' w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1^*, \ldots, \beta_m^*)$. W szczególności rząd funkcjonału ξ jest równy rzędowi macierzy A.*

Dowód. Dla $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ mamy, że $(\xi'(\alpha_i))(\beta_j) = \xi(\alpha_i, \beta_j) = a_{ij}$ oraz $\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \beta_k^*\right)(\beta_j) = a_{ij}$ na mocy określenia przekształcenia ξ' oraz wzoru (1) z wykładu 12. Stąd $\xi'(\alpha_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \beta_k^*$ dla $i = 1, \ldots, n$. Zatem współrzędne wektora $\xi'(\alpha_i)$ tworzą i-ty wiersz macierzy A, czyli tworzą i-tą kolumnę macierzy A^T. Stąd macierzą przekształcenia liniowego ξ' w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1^*, \ldots, \beta_m^*)$ jest macierz A^T. Z twierdzenia 10.8 mamy, że $\dim \xi'(V) = r(A^T)$. Ale $r(A^T) = r(A)$, więc rząd funkcjonału ξ jest równy $r(A)$. $\square$

3 Zmiana bazy a funkcjonały dwuliniowe

Twierdzenie 13.13. *Niech A będzie macierzą funkcjonału dwuliniowego $\xi \in L(V, W; \mathbb{R})$ danego wzorem (6) w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Niech P będzie macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ oraz niech Q będzie macierzą przejścia od bazy $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ do bazy $(\beta'_1, \ldots, \beta'_m)$. Wówczas $P^T \cdot A \cdot Q$ jest macierzą ξ w bazach $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$, $(\beta'_1, \ldots, \beta'_m)$.*

Dowód. Ze wzoru (7), z definicji macierzy przejścia oraz z definicji 13.7 wynika, że dla dowolnych $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ $\xi(\alpha'_i, \beta'_j) = (i - \text{ta kolumna } P)^T \cdot A \cdot (j - \text{ta kolumna } Q) =$ $= (i - \text{ty wiersz } P^T) \cdot A \cdot (j - \text{ta kolumna } Q)$. Ale z definicji iloczynu macierzy $A \cdot (j - \text{ta kolumna } Q) = j - \text{ta kolumna } (A \cdot Q)$, więc $\xi(\alpha'_i, \beta'_j) = [P^T \cdot A \cdot Q]_{ij}$, skąd mamy tezę. $\square$

Korzystając ze wzoru (7) oraz z definicji macierzy endomorfizmu liniowego w bazie i z definicji 13.7 można udowodnić w podobny sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie 13.14. *Niech A będzie macierzą funkcjonału dwuliniowego $\xi \in L(V, W; \mathbb{R})$ danego wzorem (6) w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Niech P będzie macierzą endomorfizmu f przestrzeni V w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oraz niech Q będzie macierzą endomorfizmu g przestrzeni W w bazie $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Wówczas $\xi_1 \colon V \times W \to \mathbb{R}$ dane wzorem*

$$\xi_1(\alpha, \beta) = \xi(f(\alpha), g(\beta)) \text{ dla } \alpha \in V,\ \beta \in W$$

jest funkcjonałem dwuliniowym i jego macierzą w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ jest $P^T \cdot A \cdot Q$.
$\square$