Wykład 14
Formy kwadratowe I

Wielomian n-zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ postaci

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{1}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$ oraz $a_{ij} = a_{ji}$ dla wszystkich $i, j = 1, \ldots, n$ nazywamy **formą kwadratową n-zmiennych**.

Formę kwadratową (1) można też zapisywać w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij} x_i x_j. \tag{2}$$

Przykład 14.1. (a) Postacią ogólną formy kwadratowej jednej zmiennej jest wyrażenie ax_1^2, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

(b) Postacią ogólną formy kwadratowej dwóch zmiennych jest wyrażenie $ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(c) Postacią ogólną formy kwadratowej trzech zmiennych jest wyrażenie $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2cx_2x_3$, gdzie $a_1, a_2, a_3, a, b, c \in \mathbb{R}$. $\square$

Macierz $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy **macierzą formy** (1), $r(A)$ nazywamy **rzędem formy** (1), zaś $\det(A)$ nazywamy **wyróżnikiem tej formy**.

Z definicji formy kwadratowej wynika, że jej macierz A spełnia warunek $A = A^T$, czyli A jest **macierzą symetryczną**. Na odwrót, każda macierz symetryczna jest macierzą pewnej formy kwadratowej.

Przykład 14.2. Macierzą formy kwadratowej $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 - 3x_1x_3$ trzech zmiennych x_1, x_2, x_3 jest $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Zatem wyróżnik tej formy $\det(A) = (-1)^{3+1} \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-\frac{3}{2}) \cdot (-(-\frac{3}{2})) = -\frac{9}{4} \neq 0$, skąd jej rząd wynosi 3. $\square$

Na formę kwadratową (1) możemy też patrzeć jak na funkcję n-zmiennych $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{3}$$

gdyż funkcja F jest wyznaczona jednoznacznie przez współczynniki a_{ij}, bo $a_{ij} = \frac{1}{2} \cdot [F(\varepsilon_i + \varepsilon_j) - F(\varepsilon_i) - F(\varepsilon_j)]$ dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Utożsamiając macierz $[a]$ ze skalarem $a \in \mathbb{R}$ uzyskamy, że

$$[x_1, \ldots, x_n] \cdot A \cdot [x_1, \ldots, x_n]^T = [x_1, \ldots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1, & \ldots, & x_i, & \ldots, & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} [x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j] \end{bmatrix} =$$

$\begin{bmatrix} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \end{bmatrix} = F([x_1, \ldots, x_n])$, a więc wzór (3) można zapisać w postaci:

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = [x_1, \ldots, x_n] \cdot A \cdot [x_1, \ldots, x_n]^T. \tag{4}$$

Twierdzenie 14.3. *Niech f będzie automorfizmem przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ posiadającym w bazie kanonicznej macierz B i niech F będzie formą kwadratową n-zmiennych o macierzy A. Wówczas $F \circ f$ też jest formą kwadratową n-zmiennych i jej macierzą jest $B^T \cdot A \cdot B$.*

Dowód. Na mocy wzoru (4) $(F \circ f)([x_1, \ldots, x_n]) = F(f([x_1, \ldots, x_n])) = F([x_1 \ldots x_n] \cdot B^T) = [x_1 \ldots x_n] \cdot B^T \cdot A \cdot ([x_1 \ldots x_n] \cdot B^T)^T = [x_1 \ldots x_n] \cdot (B^T \cdot A \cdot B) \cdot [x_1 \ldots x_n]^T$. Wystarczy zatem pokazać, że macierz $B^T \cdot A \cdot B$ jest symetryczna. Ale z własności transponowania macierzy $(B^T \cdot A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \cdot (B^T)^T = B^T \cdot A \cdot B$, gdyż macierz A jest symetryczna. □

Definicja 14.4. Powiemy, że formy kwadratowe F i G, n-zmiennych są **równoważne**, jeżeli istnieje automorfizm f przestrzeni $\mathbb{R}^n$ taki, że $G = F \circ f$.

Z twierdzenia 14.3 i ze stwierdzenia 11.15 otrzymujemy od razu następujące

Twierdzenie 14.5. *Równoważne formy kwadratowe n-zmiennych mają takie same rzędy.* □

Twierdzenie 14.6. *Relacja równoważności form kwadratowych jest relacją równoważności w rodzinie wszystkich form kwadratowych n-zmiennych.*

Dowód. Niech F, G, H będą dowolnymi formami kwadratowymi n-zmiennych. Ponieważ $id_{\mathbb{R}^n}$ jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz $F = F \circ id_{\mathbb{R}^n}$, więc forma F jest równoważna formie F.

Załóżmy, że forma F jest równoważna formie G. Wtedy istnieje automorfizm f przestrzeni $\mathbb{R}^n$ taki, że $G = F \circ f$. Ale wtedy f^{-1} też jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz $F = G \circ f^{-1}$, więc forma G jest równoważna formie F.

Załóżmy, że forma F jest równoważna formie G oraz forma G jest równoważna formie H. Wtedy istnieją automorfizmy f, g przestrzeni $\mathbb{R}^n$ takie, że $G = F \circ f$ i $H = G \circ g$. Zatem $H = F \circ (f \circ g)$. Ale $f \circ g$ jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^n$, więc forma F jest równoważna formie H. □

Definicja 14.7. Formą kanoniczną n-zmiennych nazywamy formę postaci

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \ldots + c_nx_n^2, \tag{5}$$

dla pewnych $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 14.8. *Każda forma kwadratowa n-zmiennych jest równoważna pewnej formie kanonicznej n-zmiennych.*

Dowód. Zastosujemy indukcję względem n. Przeprowadzone przez nas rozumowanie nazywa się **metodą Lagrange'a sprowadzania formy kwadratowej do postaci kanonicznej**.

Dla $n = 1$ teza jest oczywista na mocy przykładu 14.1 (a).

Niech n będzie taką liczbą naturalną większą od 1, że każda forma kwadratowa $(n-1)$-zmiennych jest równoważna pewnej formie kanonicznej $(n-1)$-zmiennych. Rozważmy dowolną formę kwadratową F, n-zmiennych o macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Jeżeli $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, to F jest formą kanoniczną. Załóżmy więc dalej, że $a_{kl} \neq 0$ dla pewnych $k, l \in \{1, \ldots, n\}$, przy czym $k \leq l$. Możliwe są teraz tylko dwa przypadki.

Przypadek 1. $a_{ii} = 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Wtedy $k < l$ oraz

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = 2 \cdot \sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j =$$

$$= 2 \cdot \sum_{i<j, i\neq k, j\neq l} a_{ij}x_ix_j + 2 \cdot \sum_{i<l, i\neq k} a_{il}x_ix_l + 2 \cdot \sum_{k<j, j\neq l} a_{kj}x_kx_j + 2a_{kl}x_kx_l.$$

Rozważmy przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dane wzorem

$$f([x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots, x_n]) = \left[x_1, \ldots, \frac{x_k + x_l}{2}, \ldots, \frac{x_k - x_l}{2}, \ldots, x_n\right].$$

Ponieważ $f^2 = id_{\mathbb{R}^n}$, więc f jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Ponadto $(F \circ f)([x_1, \ldots, x_n]) = F([x_1, \ldots, \frac{x_k+x_l}{2}, \ldots, \frac{x_k-x_l}{2}, \ldots, x_n]) = 2 \cdot \sum_{i<j, i\neq k, j\neq l} a_{ij}x_ix_j + 2 \cdot \sum_{i<l, i\neq k} a_{il}x_i\frac{x_k - x_l}{2} + 2 \cdot \sum_{k<j, j\neq l} a_{kj}\frac{x_k + x_l}{2}x_j + 2a_{kl}\frac{x_k + x_l}{2} \cdot \frac{x_k - x_l}{2}$. Mamy tutaj cztery składniki, przy czym w pierwszych trzech składnikach (będących sumami) nie wystąpi x_k^2. Ponieważ $a_{kl} \neq 0$, więc w otrzymanej formie kwadratowej (równoważnej formie F), x_k^2 wystąpi z niezerowym współczynnikiem równym $\frac{a_{kl}}{2}$. W ten sposób dochodzimy do przypadku 2.

Przypadek 2. $a_{ss} \neq 0$ dla pewnego $s = 1, \ldots, n$. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy zakładać, że $s = n$, gdyż dla $s < n$ przy pomocy automorfizmu f przestrzeni $\mathbb{R}^n$ danego wzorem $f([x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_n]) = [x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_s]$ możemy formę F zastąpić formą $F \circ f$, w której współczynnik przy x_n jest równy $a_{ss} \neq 0$. Niech zatem dalej $a_{nn} \neq 0$. Wtedy

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = \sum_{i<j<n} a_{ij}x_ix_j + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_ix_n + a_{nn}x_n^2 =$$

$$= \sum_{i<j<n} a_{ij}x_ix_j + a_{nn}\left(x_n + \frac{1}{a_{nn}}\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i\right)^2 - \frac{1}{a_{nn}}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i\right)^2.$$

Niech g będzie przekształceniem liniowym przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w siebie danym wzorem $g([x_1,\ldots,x_{n-1},x_n]) = \left[x_1,\ldots,x_{n-1},x_n - \frac{1}{a_{nn}}\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i)\right]$.

Wówczas $Ker(g) = \{\theta\}$, więc g jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Ponadto $(F\circ g)([x_1,\ldots,x_n]) = a_{nn}x_n^2 + G([x_1,\ldots,x_{n-1}])$, gdzie G jest formą kwadratową $(n-1)$-zmiennych i $G([x_1,\ldots,x_{n-1}]) = \sum\limits_{i<j<n} a_{ij}x_ix_j - \dfrac{1}{a_{nn}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i\right)^2$. Z założenia indukcyjnego istnieje automorfizm h przestrzeni $\mathbb{R}^{n-1}$ taki, że $(G\circ h)([x_1,\ldots,x_{n-1}]) = c_1x_1^2+\ldots+c_{n-1}x_{n-1}^2$ dla pewnych $c_1,\ldots,c_{n-1}\in\mathbb{R}$. Istnieją zatem funkcjonały $\varphi_i\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dla $i=1,\ldots,n-1$ takie, że $h([x_1,\ldots,x_{n-1}]) = [\varphi_1([x_1,\ldots,x_{n-1}]),\ldots,\varphi_{n-1}([x_1,\ldots,x_{n-1}])]$. Niech $t\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem danym wzorem
$t([x_1,\ldots,x_{n-1},x_n]) = [\varphi_1([x_1,\ldots,x_{n-1}]),\ldots,\varphi_{n-1}([x_1,\ldots,x_{n-1}]),x_n]$. Wówczas t jest przekształceniem liniowym i $Ker\ t = \{\theta\}$, czyli t jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Ponadto $(F\circ(g\circ t))([x_1,\ldots,x_n]) = c_1x_1^2+\ldots+c_{n-1}x_{n-1}^2 + a_{nn}x_n^2$. □

Przykład 14.9. Przy pomocy metody Lagrange'a sprowadzimy do postaci kanonicznej formę kwadratową $F([x_1,x_2,x_3,x_4]) = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$ i znajdziemy automorfizm liniowy f przestrzeni $\mathbb{R}^4$ taki, że $F\circ f$ jest formą kanoniczną. Mamy tutaj przypadek 1, więc $f_1([x_1,x_2,x_3,x_4]) = [x_1,x_2,\frac{x_3+x_4}{2},\frac{x_3-x_4}{2}]$. Wtedy

$$
\begin{aligned}
&(F\circ f_1)([x_1,x_2,x_3,x_4]) = \\
&= x_1x_2 + x_2\frac{x_3+x_4}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}\cdot\frac{x_3-x_4}{2} + \frac{x_3-x_4}{2}x_1 = \\
&= x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{4}x_4^2 + \frac{1}{2}x_2x_4 - \frac{1}{2}x_1x_4 = \\
&= x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{4}(x_4-x_2+x_1)^2 + \frac{1}{4}(x_2-x_1)^2 = \\
&= -\frac{1}{4}(x_4-x_2+x_1)^2 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_3.
\end{aligned}
$$

Stąd $f_2([x_1,x_2,x_3,x_4]) = [x_1,x_2,x_3,x_4+x_2-x_1]$. Zatem $(F\circ f_1\circ f_2)([x_1,x_2,x_3,x_4]) = -\frac{1}{4}x_4^2 + \frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2+\frac{1}{4}x_3^2+\frac{1}{2}x_1x_2+\frac{1}{2}x_1x_3+\frac{1}{2}x_2x_3$. Teraz zajmiemy się formą kwadratową G_1:

$$
\begin{aligned}
G_1([x_1,x_2,x_3]) &= \frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2+\frac{1}{4}x_3^2+\frac{1}{2}x_1x_2+\frac{1}{2}x_1x_3+\frac{1}{2}x_2x_3 = \\
&= \frac{1}{4}(x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3)+\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2+\frac{1}{2}x_1x_2 = \\
&= \frac{1}{4}(x_3+x_1+x_2)^2 - \frac{1}{4}(x_1+x_2)^2+\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2+\frac{1}{2}x_1x_2 = \\
&= \frac{1}{4}(x_3+x_1+x_2)^2
\end{aligned}
$$

Stąd $h_1([x_1,x_2,x_3]) = [x_1,x_2,-x_1-x_2+x_3]$ oraz $(G_1\circ h_1)([x_1,x_2,x_3]) = \frac{1}{4}x_3^2$. Zatem $f_3([x_1,x_2,x_3,x_4]) = [x_1,x_2,x_3-x_1-x_2,x_4]$ oraz

$$
(F\circ f_1\circ f_2\circ f_3)([x_1,x_2,x_3,x_4]) = \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{4}x_4^2.
$$

Pozostaje zatem obliczyć $f_1 \circ f_2 \circ f_3$. Ponieważ $(f_2 \circ f_3)([x_1, x_2, x_3, x_4]) = = f_2([x_1, x_2, x_3 - x_1 - x_2, x_4]) = [x_1, x_2, x_3 - x_1 - x_2, x_4 + x_2 - x_1]$, więc $(f_1 \circ f_2 \circ f_3)([x_1, x_2, x_3, x_4]) = f_1([x_1, x_2, x_3 - x_1 - x_2, x_4 + x_2 - x_1]) = [x_1, x_2, -x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, -x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4]$. Zatem szukanym automorfizmem liniowym przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jest

$$f([x_1, x_2, x_3, x_4]) = \left[x_1, x_2, -x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, -x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right].$$