Wykład 15
Formy kwadratowe II

1 Klasyfikacja form kwadratowych

Twierdzenie 15.1. *Jeśli formy kwadratowe n - zmiennych są równoważne, to ich wyróżniki mają ten sam znak.*

Dowód. Załóżmy, że formy kwadratowe F i G, n-zmiennych są równoważne i mają macierze A i B odpowiednio. Wtedy, z twierdzenia x.3, istnieje odwracalna macierz kwadratowa C taka, że $B = C^T \cdot A \cdot C$. Zatem z twierdzenia Cauchy'ego oraz z tego, że $\det C^T = \det C$ uzyskamy, że $\det B = (\det C)^2 \cdot \det A$. Ale $\det C \neq 0$, więc $(\det C)^2 > 0$ i liczby $\det B$ i $\det A$ mają ten sam znak. □

Twierdzenie 15.2. *Każda forma kwadratowa n-zmiennych jest równoważna formie kanonicznej postaci*

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+s}^2, \tag{1}$$

dla pewnych $k, s \in \mathbb{N}_0$ takich, że $k + s \leq n$.

Dowód. Na mocy twierdzeń x.6 i x.8 wystarczy ograniczyć się do kanonicznych form kwadratowych $F([x_1, \ldots, x_n]) = c_1x_1^2 + \ldots + c_nx_n^2$. Jeśli $c_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$, to wystarczy wziąć $k = s = 0$. Niech dalej $c_j \neq 0$ dla pewnego $j = 1, \ldots, n$. Dla każdej permutacji $\sigma \in S_n$ przekształcenie $f_\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dane wzorem $f_\sigma([x_1, \ldots, x_n]) = [x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$ jest automorfizmem liniowym. Możemy zatem bez zmniejszania ogólności rozważań zakładać, że istnieje liczba naturalna $m \leq n$ taka, że $c_i \neq 0$ dla $i = 1, \ldots, m$ i $c_i = 0$ dla wszystkich $i \geq m$ oraz istnieją nieujemne liczby całkowite k i s takie, że $k+s = m$ i $c_i > 0$ dla $i = 1, \ldots, k$ oraz $c_i < 0$ dla $i = k+1, \ldots, m$. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ przekształcającym wektor $[x_1, \ldots, x_n]$ na wektor $[\frac{1}{\sqrt{c_1}}x_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{c_k}}x_k, \frac{1}{\sqrt{-c_{k+1}}}x_{k+1}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{-c_m}}x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n]$. Wówczas f jest automorfizmem liniowym i $(F \circ f)([x_1, \ldots, x_n]) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_n^2$. □

Twierdzenie 15.3 (o bezwładności). *Równoważne formy kwadratowe kanoniczne n-zmiennych mają te same liczby współczynników dodatnich jak i ujemnych.*

Dowód. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy na mocy wniosku x.10, twierdzenia x.2 i jego dowodu istnieją nieujemne liczby całkowite k, k', s, s' takie, że $k + s = k' + s' = m \leq n$ oraz $k > k'$ i formy kwadratowe $F([x_1, \ldots, x_n]) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+s}^2$ oraz $G([x_1, \ldots, x_n]) = x_1^2 + \ldots + x_{k'}^2 - x_{k'+1}^2 - \ldots - x_{k'+s'}^2$ są równoważne. Istnieje zatem automorfizm liniowy f przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o macierzy $A = [a_{ij}]$ w bazie kanonicznej taki, że $F = G \circ f$. Wtedy $x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+s}^2 = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + \ldots + (a_{k'1}x_1 + \ldots + a_{k'n}x_n)^2 - (a_{(k'+1)\,1}x_1 + \ldots + a_{(k'+1)\,n}x_n)^2 - \ldots - (a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)^2$.

Rozważmy przekształcenie liniowe $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k+k'}$ przekształcające wektor $[x_1, \ldots, x_n]$ na wektor $[a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{k'1}x_1 + \ldots + a_{k'n}x_n, x_{k+1}, \ldots, x_n]$. Ponieważ $k' < k$, więc $n - k + k' < n$ i wobec tego $Ker(g) \neq \{\theta\}$. Zatem istnieje niezerowy wektor $[t_1, \ldots, t_n] \in \mathbb{R}^n$ taki, że $a_{i1}t_1 + \ldots + a_{in}t_n = 0$ dla $i = 1, \ldots, k'$ oraz $t_j = 0$ dla $j = k+1, \ldots, n$. Zatem

$t_1^2 + \ldots + t_k^2 = -(a_{(k'+1)\,1}t_1 + \ldots + a_{(k'+1)\,n}t_n)^2 - \ldots - (a_{m1}t_1 + \ldots + a_{mn}t_n)^2$. Stąd $t_j = 0$ dla $j = 1, \ldots, k$, czyli $[t_1, \ldots, t_n] = \theta$ i mamy sprzeczność. □

Z twierdzeń 15.2 i 15.3 mamy od razu następujący

Wniosek 15.4. *Każda forma kwadratowa n-zmiennych jest równoważna dokładnie jednej z form postaci (1).* □

2 Formy określone

Z twierdzenia Sylwestera-Jacobiego o bezwładności wynika od razu poprawność następujących definicji.

Definicja 15.5. Formę kwadratową rzeczywistą nazywamy **określoną**, jeżeli w jej postaci kanonicznej wszystkie współczynniki różne od 0 mają ten sam znak. Jeśli są one nieujemne, to forma nazywa się **dodatnio określona**, natomiast jeśli są one niedodatnie, to forma nazywa się **ujemnie określona**.

Definicja 15.6. Mówimy, że forma kwadratowa jest **istotnie określona**, gdy wszystkie współczynniki jej postaci kanonicznej są różne od 0 i mają ten sam znak. Jeśli są one dodatnie, to mówimy, że forma jest **istotnie dodatnia**, a jeśli ujemne, to mówimy, że forma jest **istotnie ujemna**.

Wprost z definicji równoważności form kwadratowych i z definicji 15.5 i 15.6 wynikają następujące twierdzenia.

Twierdzenie 15.7. *Na to aby forma kwadratowa F n-zmiennych była dodatnio określona potrzeba i wystarcza, żeby dla dowolnego wektora $[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ zachodziła nierówność $F([x_1, \ldots, x_n]) \geq 0$.* □

Twierdzenie 15.8. *Na to aby forma kwadratowa F n-zmiennych była istotnie dodatnia potrzeba i wystarcza, żeby dla dowolnego niezerowego wektora $[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ zachodziła nierówność $F([x_1, \ldots, x_n]) > 0$.* □

Uwaga 15.9. Niech F będzie formą kwadratową rzeczywistą n-zmiennych. Wówczas forma F jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy forma $-F$ jest dodatnio określona. Ponadto forma F jest istotnie ujemna wtedy i tylko wtedy, gdy forma $-F$ jest istotnie dodatnia.

Z uwagi 15.9 i z twierdze 15.7 i 15.8 wynikają od razu następujące twierdzenia.

Twierdzenie 15.10. *Na to aby forma kwadratowa F n-zmiennych była ujemnie określona potrzeba i wystarcza, żeby dla dowolnego wektora $[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ zachodziła nierówność $F([x_1, \ldots, x_n]) \leq 0$.* □

Twierdzenie 15.11. *Na to aby forma kwadratowa F n-zmiennych była istotnie ujemna potrzeba i wystarcza, żeby dla dowolnego niezerowego wektora $[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ zachodziła nierówność $F([x_1, \ldots, x_n]) < 0$.* □

Lemat 15.12. *Forma kwadratowa F n-zmiennych $n \geq 2$ o macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ jest istotnie dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{11} > 0$ oraz forma G $(n-1)$-zmiennych $x_2, \ldots, x_n$ o macierzy $B = [a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\ldots,n \\ j=2,\ldots,n}}$ jest istotnie dodatnia.*

Dowód. Formę F możemy zapisać w postaci

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = a_{11}x_1^2 + 2x_1\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j + \sum_{j,k=2}^{n} a_{jk}x_jx_k. \tag{2}$$

Załóżmy, że forma F jest istotnie dodatnia. Wtedy podstawiając $x_1 = 1$, $x_j = 0$ dla $j = 2, \ldots, n$ we wzorze (2) uzyskamy, że $a_{11} > 0$. Stąd

$$F = a_{11}\left(x_1 + \frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right)^2 - \frac{1}{a_{11}}\left(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right)^2 + \sum_{j,k=2}^{n} a_{jk}x_jx_k. \tag{3}$$

Ponadto
$-\frac{1}{a_{11}}\left(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right)^2 + \sum_{j,k=2}^{n} a_{jk}x_jx_k = \sum_{j=2}^{n}\left(a_{jj} - \frac{a_{1j}^2}{a_{11}}\right)x_j^2 + 2\sum_{1<j<k}\left(a_{jk} - \frac{a_{1j}a_{1k}}{a_{11}}\right)x_jx_k =$
$= \dfrac{1}{a_{11}}G([x_2, \ldots, x_n])$. Zatem na mocy (3)

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = a_{11}\left(x_1 + \frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right)^2 + \frac{1}{a_{11}}G([x_2, \ldots, x_n]). \tag{4}$$

Weźmy dowolny niezerowy wektor $[x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^{n-1}$ i niech $x_1 = -\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j$. Wtedy z (4) wynika, że $\frac{1}{a_{11}}G([x_2, \ldots, x_n]) > 0$, a ponieważ $a_{11} > 0$, więc $G([x_2, \ldots, x_n]) > 0$. Zatem forma G jest istotnie dodatnia.

Na odwrót, załóżmy teraz, że $a_{11} > 0$ i forma G jest istotnie dodatnia. Wtedy na mocy (4) dla dowolnego niezerowego wektora $[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ jest $F([x_1, \ldots, x_n]) \geq 0$. Załóżmy, że $F([x_1, \ldots, x_n]) = 0$. Wtedy ze wzoru (4) i z tego, że $a_{11} > 0$ uzyskamy $x_1 + \frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j = 0$ oraz $G([x_2, \ldots, x_n]) = 0$. Ale forma G jest istotnie dodatnia, więc $x_j = 0$ dla $j = 2, \ldots, n$, więc też $x_1 = 0$ i w konsekwencji $[x_1, \ldots, x_n] = \theta$. Sprzeczność. Zatem $F([x_1, \ldots, x_n]) > 0$ i forma F jest istotnie dodatnia. □

Lemat 15.13. *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną taką, że $n \geq 2$ oraz $a_{11} > 0$. Wówczas dla każdego $s = 2, \ldots, n$ zachodzi równość:*

$$\det[a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\ldots,s \\ j=2,\ldots,s}} = (a_{11})^{s-2}\det[a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,s \\ j=1,\ldots,s}}.$$

Dowód. Z twierdzenia Laplace'a mamy, że $\det[a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\ldots,s \\ j=2,\ldots,s}} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12} & a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} & \dots & a_{11}a_{2s} - a_{12}a_{1s} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{13}a_{12} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{13} & \dots & a_{11}a_{3s} - a_{13}a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{11}a_{s2} - a_{1s}a_{12} & a_{11}a_{s3} - a_{1s}a_{13} & \dots & a_{11}a_{ss} - a_{1s}a_{1s} \end{vmatrix}.$$

Po zastosowaniu operacji elementarnych $w_j + a_{1j}w_1$ dla $j = 2, \dots, s$ uzyskamy, że

$$\det[a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\dots,s \\ j=2,\dots,s}} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{12} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} & \dots & a_{11}a_{2s} \\ a_{13} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} & \dots & a_{11}a_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s} & a_{11}a_{s2} & a_{11}a_{s3} & \dots & a_{11}a_{ss} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{13} & \dots & a_{11}a_{1s} \\ a_{12} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} & \dots & a_{11}a_{2s} \\ a_{13} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} & \dots & a_{11}a_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s} & a_{11}a_{s2} & a_{11}a_{s3} & \dots & a_{11}a_{ss} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}}(a_{11})^{s-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s} & a_{s2} & a_{s3} & \dots & a_{ss} \end{vmatrix} =$$

$= (a_{11})^{s-2} \det[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,s \\ j=1,\dots,s}}$, bo macierz A jest symetryczna. $\square$

Twierdzenie 15.14 (Kryterium Sylvestera). *Na to, by forma kwadratowa F, n-zmiennych o macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ była istotnie dodatnia potrzeba i wystarcza aby* $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{vmatrix} > 0$ *dla każdego $s = 1, \dots, n$.*

Dowód. Stosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista, bo forma $a_{11}x_1^2$ jest istotnie dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{11} > 0$.

Załóżmy, że teza zachodzi dla form kwadratowych stopnia $n - 1$ i niech F będzie formą kwadratową n-zmiennych o macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$.

Jeżeli forma F jest istotnie dodatnia, to na mocy lematu 15.12, $a_{11} > 0$ oraz forma G $(n-1)$-zmiennych $x_2, \dots, x_n$ o macierzy $B = [a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\dots,n \\ j=2,\dots,n}}$ jest istotnie dodatnia. Zatem z założenia indukcyjnego $\det[a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\dots,s \\ j=2,\dots,s}} > 0$ dla każdego $s = 2, \dots, n$. Stąd, na mocy lematu 15.13, $\det[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,s \\ j=1,\dots,s}} > 0$ dla $s = 2, \dots, n$. Zatem $\det[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,s \\ j=1,\dots,s}} > 0$ dla każdego $s = 1, \dots, n$.

Na odwrót, załóżmy, że $\det[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,s \\ j=1,\dots,s}} > 0$ dla każdego $s = 1, \dots, n$. Wtedy $a_{11} > 0$ oraz na mocy lematu 15.13, $\det[a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\dots,s \\ j=2,\dots,s}} > 0$ dla każdego $s = 2, \dots, n$. Zatem z założenia indukcyjnego forma G jest istotnie dodatnia. Stąd i z lematu 15.12, forma F też jest istotnie dodatnia. $\square$