Wykład 1
Podstawowe wiadomości o macierzach

Oznaczenia:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ - zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
$\mathbb{R}$ - ciało liczb rzeczywistych,
$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

1 Określenie macierzy

Niech m i n będą dowolnymi liczbami naturalnymi. Prostokątną tablicę

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

utworzoną z liczb a_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ nazywamy $m \times n$-**macierzą**. Elementy a_{ij} nazywamy **wyrazami** macierzy. Rzędy pionowe nazywamy **kolumnami**, a poziome - **wierszami** tej macierzy. Kolumny numerujemy od lewej strony do prawej, zaś wiersze - od góry do dołu. Zatem element a_{ij} stoi w i-tym wierszu i j-tej kolumnie rozpatrywanej macierzy.

Przykład 1.1. Jeżeli $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, to $a_{11} = 5$, $a_{12} = 4$, $a_{13} = 7$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 3$, $a_{23} = 4$. □

We wszystkich oznaczeniach dotyczących macierzy takich jak np.

$$a_{ij},\ A_{ij},\ m \times n,\ M_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

przyjmujemy umowę, że pierwszy indeks z lewej strony dotyczy wiersza, zaś drugi-kolumny.
Dla macierzy (1) piszemy też:

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \tag{2}$$

lub krótko: $A = [a_{ij}]$, gdy znane są jej wymiary m i n.
Oznaczenia macierzy: A, B, C, itd. Zbiór wszystkich $m \times n$ - macierzy oznaczamy przez $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Dwie macierze $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ nazywamy równymi, jeżeli jako tablice są identyczne, tzn. macierze te mają takie same wymiary (a więc: m-liczba wierszy macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B i n-liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie kolumn macierzy B) oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

2 Rodzaje macierzy kwadratowych

$n \times n$-macierze, nazywamy *macierzami kwadratowymi stopnia n.* Zbiór wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n będziemy oznaczali przez $M_n(\mathbb{R})$. Ogólne przykłady macierzy kwadratowych stopnia 1, 2, 3, to odpowiednio

$$\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix},$$

natomiast ogólną postacią macierzy kwadratowej stopnia n jest

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Odcinek łączący elementy a_{11} i a_{nn} macierzy (3) nazywamy **główną przekątną** tej macierzy, zaś sumę wszystkich elementów leżących na głównej przekątnej macierzy (3) nazywamy **śladem macierzy** (3) i oznaczamy przez $tr(A)$. Zatem

$$tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}. \tag{4}$$

Macierze kwadratowe $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$, w których $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i > j$, tzn. macierze postaci:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

nazywamy **macierzami trójkątnymi górnymi**. Natomiast macierze kwadratowe $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$, w których $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i < j$, tzn. macierze postaci:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

nazywamy **macierzami trójkątnymi dolnymi**.

Macierze $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$, które są jednocześnie trójkątne górne i dolne, tzn. takie, że $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i \neq j$, a więc macierze postaci:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

nazywamy **macierzami diagonalnymi**. Szczególnym przypadkiem macierzy diagonalnych są tzw. **macierze skalarne**, czyli takie macierze diagonalne $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$, że $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$, a więc macierze postaci:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Macierz skalarną postaci (8) dla $a = 1$ nazywamy **macierzą jednostkową** i oznaczamy przez I_n. Zatem

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Macierze kwadratowe $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ takie, że $a_{ij} = a_{ji}$ dla wszystkich i, j, nazywamy **macierzami symetrycznymi**. Ogólne przykłady macierzy kwadratowych symetrycznych stopnia 1, 2, 3, to odpowiednio

$$\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Macierze kwadratowe $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ takie, że $a_{ij} = -a_{ji}$ dla wszystkich i, j, nazywamy **macierzami antysymetrycznymi**. Ogólne przykłady macierzy kwadratowych antysymetrycznych stopnia 1, 2, 3, to odpowiednio

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ jest macierzą antysymetryczną, to $a_{ii} = 0$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, n$, tzn. na głównej przekątnej takiej macierzy stoją same zera.

3 Działania na macierzach

a) Macierzą transponowaną A^T $m \times n$-macierzy A postaci (1) nazywamy taką $n \times m$-macierz, która jako swą i-tą kolumnę, dla $i = 1, 2, \dots, m$, ma i-ty wiersz macierzy A. Zatem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Przykład 1.2. Macierzą transponowaną macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ jest macierz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, a macierzą transponowaną macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ jest macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, czyli $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. $\square$

Dla dowolnej macierzy A zachodzi wzór:

$$(A^T)^T = A.$$

b) Mnożenie macierzy przez liczbę. Aby pomnożyć macierz A przez liczbę a należy wszystkie jej wyrazy pomnożyć przez a. Zatem

$$a \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_{11} & aa_{12} & \dots & aa_{1n} \\ aa_{21} & aa_{22} & \dots & aa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ aa_{m1} & aa_{m2} & \dots & aa_{mn} \end{bmatrix} \tag{11}$$

W skróconej notacji:

$$a \cdot [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = [a \cdot a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}. \tag{12}$$

Przykład 1.3. $2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$. $\square$

c) Dodawanie macierzy. Macierze A i B o tych samych wymiarach możemy dodawać. Mianowicie, jeżeli $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ oraz $B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, to

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}. \tag{13}$$

Przykład 1.4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$.$\square$

Dodawanie macierzy jest przemienne, łączne i posiada element neutralny tzw. **macierz zerową** $0_{m\times n}$, która jest $m\times n$-macierzą o samych zerach, tzn. dla dowolnych $m\times n$-macierzy A, B, C zachodzą wzory:

$$A+B=B+A,$$

$$(A+B)+C=A+(B+C),$$

$$A+0_{m\times n}=0_{m\times n}+A=A.$$

Macierzą przeciwną do macierzy

$$A=[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

nazywamy macierz

$$-A=[-a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}.$$

Zachodzą dla niej wzory:

$$A+(-A)=(-A)+A=0_{m\times n},$$

$$-A=(-1)\cdot A.$$

Można wykazać, że dla dowolnych $m\times n$-macierzy A, B i dla dowolnych liczb a, b zachodzą wzory:

$$(A+B)^T=A^T+B^T,$$

$$a\cdot(A+B)=a\cdot A+a\cdot B,$$

$$(a\cdot A)^T=a\cdot A^T,$$

$$(a+b)\cdot A=a\cdot A+b\cdot A,$$

$$(ab)\cdot A=a\cdot(b\cdot A).$$

d) Odejmowanie macierzy. Różnicą $m\times n$-macierzy A i B nazywamy macierz

$$A-B=A+(-B).$$

Jeżeli zatem $A=[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ oraz $B=[b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$, to

$$A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}.$$

Przykład 1.5. $\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1\\ -2 & -3\end{bmatrix}.\square$

e) Mnożenie macierzy. Jeżeli A jest $m\times n$-macierzą oraz B jest $n\times k$-macierzą (tzn. **liczba kolumn macierzy** A **jest równa liczbie wierszy macierzy** B), to możemy określić iloczyn $A\cdot B$, który jest $m\times k$-macierzą, przy czym wyraz x_{ij} macierzy $A\cdot B$ jest **iloczynem (skalarnym)** i**-tego wiersza macierzy** A**:**

$$[\ a_{i1}\quad a_{i2}\dots\quad a_{in}\ ]$$

przez j-tą kolumnę macierzy B: $\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$, czyli

$$x_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}. \tag{14}$$

Zatem aby pomnożyć macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ przez macierz $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ należy pierwszy wiersz macierzy A pomnożyć (skalarnie) przez pierwszą kolumnę macierzy B, następnie należy pomnożyć pierwszy wiersz macierzy A przez drugą kolumnę macierzy B, itd. W ten sposób uzyskamy kolejne wyrazy pierwszego wiersza macierzy $A \cdot B$. Aby otrzymać drugi wiersz macierzy $A \cdot B$ należy pomnożyć drugi wiersz macierzy A przez kolejne kolumny macierzy B. W końcu należy pomnożyć ostatni wiersz macierzy A kolejno przez wszystkie kolumny macierzy B.

Przykład 1.6. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Wówczas $B \cdot A$ nie ma sensu (gdyż liczba kolumn macierzy B nie jest równa liczbie wierszy macierzy A) oraz $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, bo $\begin{array}{ll} 1\cdot 2 + 0\cdot 3 + 2\cdot 0 = 2 & 3\cdot 2 + 1\cdot 3 + 0\cdot 0 = 9 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 1 = 3 & 3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 4 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 4 = 9 & 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 4 = 3 \end{array}$.
Wynika stąd, że mnożenie macierzy nie jest na ogół przemienne. □

Twierdzenie 1.7. *Jeżeli* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, $C \in M_{k\times p}(\mathbb{R})$, *to* $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Twierdzenie 1.8. *Jeżeli* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *oraz* $B, C \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, *to* $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Twierdzenie 1.9. *Jeżeli* $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *i* $C \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, *to* $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Odnotujmy jeszcze inne własności działań na macierzach:

Twierdzenie 1.10. *Jeżeli* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *i* $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, *to*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Twierdzenie 1.11. *Jeżeli* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *i* $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, *to dla dowolnej liczby* a:

$$a \cdot (A \cdot B) = (a \cdot A) \cdot B = A \cdot (a \cdot B).$$

Przykład 1.12. Korzystając z podanych własności działań na macierzach obliczymy

$$D = [B \cdot A^T + (A \cdot C)^T]^T,$$

dla $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Otóż, $D = (B \cdot A^T)^T + [(A \cdot C)^T]^T =$
$= (A^T)^T \cdot B^T + (A \cdot C) = A \cdot B^T + A \cdot C = A \cdot (B^T + C)$, czyli

$$D = A \cdot (B^T + C).$$

Ponadto $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, więc $B^T + C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$, czyli $D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$. $\square$

4 Operacje elementarne na macierzach

Bardzo ważne znaczenie w algebrze liniowej odgrywają tzw. **operacje elementarne** na wierszach lub kolumnach macierzy. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie $m \times n$-macierzą.

Operacje elementarne na wierszach macierzy A:

(i) Pomnożenie i-tego wiersza macierzy A przez niezerową liczbę a. Przy tej operacji nie zmieniamy wierszy o numerach różnych od i, zaś każdy wyraz i-tego wiersza mnożymy przez a. Operację tę oznaczamy symbolem $a \cdot w_i$.

(ii) Zamiana miejscami i-tego wiersza macierzy A z wierszem j-tym ($i \neq j$) macierzy A. Przy tej operacji nie zmieniamy wierszy o numerach różnych od i oraz j. Operację tę oznaczamy symbolem $w_i \leftrightarrow w_j$.

(iii) Dodanie do j-tego wiersza macierzy A i-tego ($i \neq j$) wiersza tej macierzy pomnożonego przez dowolną liczbę a. Przy tej operacji nie zmieniamy wierszy o numerach różnych od j, natomiast wiersz j-ty przybiera postać:

$$a_{j1} + a \cdot a_{i1}, \;\; a_{j2} + a \cdot a_{i2}, \; \dots \;, a_{jn} + a \cdot a_{in}.$$

Operację tę oznaczamy symbolem $w_j + a \cdot w_i$.

Operacje elementarne na kolumnach macierzy A:

(i) Pomnożenie i-tej kolumny macierzy A przez niezerową liczbę a. Przy tej operacji nie zmieniamy kolumn o numerach różnych od i, zaś każdy wyraz i-tej kolumny mnożymy przez a. Operację tę oznaczamy symbolem $a \cdot k_i$.

(ii) Zamiana miejscami i-tej kolumny macierzy A z kolumną j-tą ($i \neq j$) macierzy A. Przy tej operacji nie zmieniamy kolumn o numerach różnych od i oraz j. Operację tę oznaczamy symbolem $k_i \leftrightarrow k_j$.

(iii) Dodanie do j-tej kolumny macierzy A i-tej ($i \neq j$) kolumny tej macierzy pomnożonej przez dowolną liczbę a. Przy tej operacji nie zmieniamy kolumn o numerach różnych od j. Operację tę oznaczamy symbolem $k_j + a \cdot k_i$.