Wykład 2
Układy równań liniowych

1 Podstawowe pojęcia związane z układami równań liniowych

Układem m **równań liniowych** o niewiadomych x_1, x_2, ..., x_n nazywamy układ równań postaci:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots & . & \ldots\ldots & . & \ldots & . & \ldots\ldots & . & .. \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. , \tag{1}$$

gdzie współczynniki a_{ij} (dla $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$) oraz elementy b_i (dla $i = 1, \ldots, m$) należą do ciała $\mathbb{R}$. Układ ten nazywamy **jednorodnym**, gdy $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.

Macierzą współczynników układu (1) nazywamy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

zaś **macierzą uzupełnioną** układu (1) nazywamy macierz:

$$A_u = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]. \tag{3}$$

Rozwiązaniem układu (1) nazywamy taki ciąg liczbowy $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, że po zastąpieniu w równaniach tego układu niewiadomych x_i elementami c_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ otrzymujemy równości prawdziwe w ciele $\mathbb{R}$, tj. gdy $A \cdot C = B$, gdzie B jest **kolumną wyrazów wolnych** tzn.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{oraz } C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Wynika stąd, że przy tych oznaczeniach układ (1) można zapisać w postaci macierzowej

$$A \cdot X = B. \tag{5}$$

Definicja 2.1. Powiemy, że równanie

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \;\; = \;\; b \tag{6}$$

jest **kombinacją liniową równań układu** (1), jeżeli istnieją $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ (zwane **współczynnikami tej kombinacji**) takie, że po pomnożeniu stronami i-tego równania przez c_i dla $i = 1, \ldots, m$ i dodaniu stronami otrzymanych równań uzyskamy równanie (1), tzn.

$$b = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i \;\text{ oraz }\; a_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \;\text{ dla }\; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Uwaga 2.2. Zauważmy, że jeśli równanie (6) jest kombinacją liniową pewnych równań układu (1), to jest ono także kombinacją liniową wszystkich równań tego układu (brakujące współczynniki są równe 0).

Twierdzenie 2.3. *Każde rozwiązanie układu (1) jest rozwiązaniem każdego równania będącego kombinacją liniową równań układu (1).*

Dowód. Załóżmy, że równanie (6) jest kombinacją liniową o współczynnikach $c_1, c_2, \ldots, c_m$ równań układu (1) i niech $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ będzie rozwiązaniem układu (1). Wtedy

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}p_1 & + & a_{12}p_2 & + & \ldots & + & a_{1n}p_n & = & b_1 \\ a_{21}p_1 & + & a_{22}p_2 & + & \ldots & + & a_{2n}p_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots & . & \ldots\ldots & . & \ldots & . & \ldots\ldots & . & .. \\ a_{m1}p_1 & + & a_{m2}p_2 & + & \ldots & + & a_{mn}p_n & = & b_m \end{array}\right. ,$$

więc po pomnożeniu obu stron i-tej równości przez c_i dla $i = 1, \ldots, m$ i dodaniu stronami otrzymanych równości uzyskamy na mocy wzorów (7), że $a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n = b$, czyli $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ jest rozwiązaniem równania (6). $\square$

Definicja 2.4. Dwa układy równań liniowych (U_1) i (U_2) z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy **równoważnymi**, gdy każde równanie układu (U_1) jest kombinacją liniową równań układu (U_2) i odwrotnie. Piszemy wtedy $(U_1) \equiv (U_2)$.

Z twierdzenia 2.3 wynika od razu następujące

Twierdzenie 2.5. *Równoważne układy równań liniowych posiadają identyczne zbiory rozwiązań.*

Definicja 2.6. Układ równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy **sprzecznym**, gdy równanie $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$ jest kombinacją liniową równań tego układu.

Ponieważ równanie $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$ nie posiada rozwiązania, więc z powyższej definicji oraz z twierdzenia 2.3 wynika od razu następujące

Twierdzenie 2.7. *Sprzeczny układ równań liniowych nie posiada rozwiązania.*

Lemat 2.8. *Załóżmy, że i-te równanie dla $i = 1, \ldots, k$ układu równań*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a'_{11}x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \ldots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ a'_{21}x_1 & + & a'_{22}x_2 & + & \ldots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ \ldots\ldots & . & \ldots\ldots & . & \ldots & . & \ldots\ldots & . & . \\ a'_{k1}x_1 & + & a'_{k2}x_2 & + & \ldots & + & a'_{kn}x_n & = & b'_k \end{array}\right. , \tag{8}$$

jest kombinacją liniową równań układu (1) o współczynnikach $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{im}$. Jeżeli równanie (6) jest kombinacją liniową równań układu (8) o współczynnikach $c_1, c_2, \ldots, c_k$, to równanie (6) jest kombinacją liniową równań układu (1) o współczynnikach

$$\sum_{i=1}^{k} c_i c_{i1}, \ \sum_{i=1}^{k} c_i c_{i2}, \ \ldots \ , \sum_{i=1}^{k} c_i c_{im}.$$

Dowód. Na mocy (7) mamy, że dla $i = 1, 2, \ldots, k$: $a'_{ij} = \sum_{t=1}^{m} c_{it} a_{tj}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz $b'_i = \sum_{t=1}^{m} c_{it} b_t$. Ponadto $a_j = \sum_{i=1}^{k} c_i a'_{ij}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz $b = \sum_{i=1}^{k} c_i b'_i$. Zatem dla $j = 1, 2, \ldots, n$:

$a_j = \sum_{i=1}^{k}\left(c_i \cdot \sum_{t=1}^{m} c_{it} a_{tj}\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{m} c_i c_{it} a_{tj} = \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} c_i c_{it} a_{tj} = \sum_{t=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i c_{it}\right) a_{tj}$ oraz

$b = \sum_{i=1}^{k}\left(c_i \cdot \sum_{t=1}^{m} c_{it} b_t\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{m} c_i c_{it} b_t = \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} c_i c_{it} b_t = \sum_{t=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i c_{it}\right) b_t$, skąd na mocy (7) mamy tezę. □

Z lematu wynika od razu, że jeśli równanie $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = a$, gdzie $a \neq 0$ jest kombinacją liniową równań układu (1), to układ ten jest sprzeczny. Ponadto z lematu wynikają od razu następujące twierdzenia:

Twierdzenie 2.9. *Załóżmy, że układy równań liniowych (U_1) i (U_2) z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są równoważne. Wówczas układ (U_1) jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy układ (U_2) jest sprzeczny.*

Twierdzenie 2.10. *Niech (U_1), (U_2), (U_3) będą układami równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wówczas:*
(i) $(U_1) \equiv (U_1)$;
(ii) jeżeli $(U_1) \equiv (U_2)$, to $(U_2) \equiv (U_1)$;
(iii) jeżeli $(U_1) \equiv (U_2)$ i $(U_2) \equiv (U_3)$, to $(U_1) \equiv (U_3)$.

Problem **rozwiązania układu** równań liniowych polega na znalezieniu **wszystkich** rozwiązań tego układu. Bardzo użyteczne przy rozwiązywaniu tego problemu są tzw. **operacje elementarne**.

2 Operacje elementarne nad układem równań liniowych

(i). Zamiana miejscami równania i-tego z równaniem j-tym $(i \neq j)$ oznaczana przez $r_i \leftrightarrow r_j$. Operacja odwrotna: $r_i \leftrightarrow r_j$.
(ii). Pomnożenie i-tego równania przez niezerowy skalar a oznaczana przez $a \cdot r_i$. Operacja odwrotna: $\frac{1}{a} \cdot r_i$.
(iii). Dodanie do i-tego równania równania j-tego $(i \neq j)$ pomnożonego przez dowolny skalar a

oznaczana przez $r_i+a\cdot r_j$. Przy tej operacji zmieniamy tylko równanie i-te! Operacja odwrotna: $r_i+(-a)\cdot r_j$.
(iv). Wykreślenie powtarzających się kopii pewnego równania.
(v). Wykreślenie równań postaci $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$ (gdy liczba równań jest większa od 1).
(vi). Zamiana kolejności niewiadomych x_i oraz x_j ($i\neq j$) w każdym równaniu oznaczana przez $x_i\leftrightarrow x_j$. W wyniku zastosowania tej operacji równanie

$$a_1x_1+\ldots+a_ix_i+\ldots+a_jx_j+\ldots+a_nx_n=b$$

przechodzi na równanie

$$a_1x_1+\ldots+a_jx_j+\ldots+a_ix_i+\ldots+a_nx_n=b.$$

Z definicji układów równoważnych mamy zatem, że jeśli układ (U_2) powstaje z układu (U_1) przez wykonanie operacji elementarnej, to układy (U_1) i (U_2) są równoważne. Zatem z twierdzeń 2.5, 2.9 i 2.10 przez prostą indukcję otrzymujemy stąd od razu następujące

Twierdzenie 2.11. *Załóżmy, że układ (U') równań liniowych powstaje z układu (U) przez kolejne wykonanie skończonej liczby operacji elementarnych. Wówczas układy te są równoważne, mają te same zbiory rozwiązań i układ (U) jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy układ (U') jest sprzeczny.*

Na twierdzeniu 2.11 opiera się metoda rozwiązywania układów równań liniowych zwana **metodą eliminacji Gaussa**.

3 Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa polega na znalezieniu dla danego układu (1) (w którym $a_{ij}\neq 0$ dla pewnych i, j) przy pomocy operacji elementarnych równoważnego mu (czyli posiadającego taki sam zbiór rozwiązań) układu (9), który po ewentualnej permutacji niewiadomych $x_1,\ldots,x_n$ ma postać:

$$\begin{cases} x_1 & & & & + & c_{1,\,k+1}x_{k+1}+ & \ldots+ & c_{1n}x_n & =d_1\\ & x_2 & & & + & c_{2,\,k+1}x_{k+1}+ & \ldots+ & c_{2n}x_n & =d_2\\ & & x_3 & & + & c_{3,\,k+1}x_{k+1}+ & \ldots+ & c_{3n}x_n & =d_3\\ & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ & & & x_k & + & c_{k,\,k+1}x_{k+1}+ & \ldots+ & c_{kn}x_n & =d_k\\ & & & & & & & 0 & =d_{k+1}\end{cases}. \tag{9}$$

Jeżeli $d_{k+1}\neq 0$, to układ (9) nie ma rozwiązania, a więc też układ (1) nie ma rozwiązania i jest sprzeczny.
Jeżeli $d_{k+1}=0$ i $k=n$, to układ (1) posiada dokładnie jedno rozwiązanie:

$$x_1=d_1\,,x_2=d_2,\;\ldots\;,x_n=d_n. \tag{10}$$

Jeżeli $d_{k+1} = 0$ oraz $k < n$, to $x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_n$ są dowolnymi skalarami (nazywamy je **parametrami**), zaś pozostałe niewiadome wyliczamy z równań układu (9), tzn.

$$x_i = d_i - c_{i\,k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{in}x_n \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k. \tag{11}$$

Aby sprowadzić układ (1) do postaci (9) należy najpierw przy pomocy operacji elementarnych przekształcić go do układu postaci:

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x_1+ & a'_{12}x_2+ & \ldots+ & a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1+ & a'_{22}x_2+ & \ldots+ & a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1}x_1+ & a'_{m2}x_2+ & \ldots+ & a'_{mn}x_n = b'_m \end{array}\right. . \tag{12}$$

Robimy to np. w ten sposób, że najpierw znajdujemy element $a_{ij} \neq 0$, a następnie przez operacje: $x_1 \leftrightarrow x_j$, $r_1 \leftrightarrow r_i$, $\frac{1}{a_{ij}} \cdot r_1$ doprowadzamy układ (1) do postaci (12).

Następnie przy pomocy równania pierwszego eliminujemy zmienną x_1 z pozostałych równań układu (12) przez wykonanie operacji: $r_2 - a'_{21} \cdot r_1$, $r_3 - a'_{31} \cdot r_1$,...,$r_m - a'_{m1} \cdot r_1$. Otrzymamy wówczas układ postaci:

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x_1+ & a"_{12}x_2+ & \ldots+ & a"_{1n}x_n = b"_1 \\ & a"_{22}x_2+ & \ldots+ & a"_{2n}x_n = b"_2 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a"_{m2}x_2+ & \ldots+ & a"_{mn}x_n = b"_m \end{array}\right. . \tag{13}$$

Z kolei stosujemy nasz algorytm do układu:

$$\left\{\begin{array}{rcr} a"_{12}x_2+ & \ldots+ & a"_{1n}x_n = b"_1 \\ a"_{22}x_2+ & \ldots+ & a"_{2n}x_n = b"_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a"_{m2}x_2+ & \ldots+ & a"_{mn}x_n = b"_m \end{array}\right. \tag{14}$$

nie ruszając pierwszego równania układu (13). Po skończonej liczbie kroków uzyskamy układ postaci:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3+ & \ldots + e_{1k}x_k + e_{1\,k+1}x_{k+1} + \ldots + e_{1n}x_n & = f_1 \\ x_2 + e_{23}x_3+ & \ldots + e_{2k}x_k + e_{2\,k+1}x_{k+1} + \ldots + e_{2n}x_n & = f_2 \\ x_3+ & \ldots + e_{3k}x_k + e_{3\,k+1}x_{k+1} + \ldots + e_{3n}x_n & = f_3 \\ \ddots & \vdots & \\ & x_k + e_{k\,k+1}x_{k+1} + \ldots + e_{kn}x_n & = f_k \\ & 0 & = f_{k+1} \end{array}\right. .$$

Jeżeli $f_{k+1} \neq 0$, to otrzymany układ jest sprzeczny, a więc też układ (1) jest sprzeczny. Jeżeli zaś $f_{k+1} = 0$, to przy pomocy operacji: $r_1 - e_{1k} \cdot r_k$, $r_2 - e_{2k} \cdot r_k$,...,$r_{k-1} - e_{k-1\,k} \cdot r_k$

eliminujemy zmienną x_k z początkowych $k-1$ równań. Później eliminujemy zmienną x_{k-1} z wcześniejszych równań przy pomocy $k-1$-szego równania, itd. W końcu, po skończonej liczbie kroków, uzyskamy w ten sposób układ (9).

Omówiony wyżej sposób rozwiązywania układu równań metodą Gaussa zawiera dużo elementów dowolnych. Dowolność zachodzi na każdym etapie rozważań, ponieważ możemy eliminować dowolną niewiadomą (pod warunkiem, że odpowiedni współczynnik nie równa się 0). Oprócz tego dowolna jest również kolejność równań w danym układzie. Jeżeli np. w jakikolwiek sposób zmienimy kolejność równań w wyjściowym układzie, to proces stopniowego eliminowania niewiadomych przebiegać będzie inaczej. Jednak zawsze musimy otrzymać tę samą liczbę parametrów!

W praktyce proces rozwiązywania układu (1) możemy znacznie uprościć, jeżeli zamiast przekształceń układu równań będziemy przekształcać jego macierz uzupełnioną A_u. Oczywiste jest, że każdej operacji elementarnej układu (1) odpowiada odpowiednia operacja elementarna macierzy A_u, a mianowicie:
operacji $r_i \leftrightarrow r_j$ odpowiada operacja $w_i \leftrightarrow w_j$,
operacji $a \cdot r_i$ odpowiada operacja $a \cdot w_i$,
operacji $r_i + a \cdot r_j$ odpowiada operacja $w_i + a \cdot w_j$,
wykreślaniu i-tego równania odpowiada wykreślanie i-tego wiersza,
operacji $x_i \leftrightarrow x_j$ odpowiada operacja $k_i \leftrightarrow k_j$ (należy przy tym pamiętać, że nie wolno ruszać ostatniej kolumny i na koniec należy jeszcze uwzględnić wszystkie przenumerowania niewiadomych!).

Przykład 2.12. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiążemy nad ciałem $\mathbb{R}$ układ równań:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & - & x_2 & - & 9x_3 & + & 6x_4 & + & 7x_5 & + & 10x_6 & = & 3 \\ & & & - & 6x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & + & 3x_6 & = & 2 \\ & & & - & 3x_3 & + & 2x_4 & - & 11x_5 & - & 15x_6 & = & 1 \end{array}\right. .$$

Będziemy wykonywali rachunki na macierzy uzupełnionej naszego układu:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -9 & 6 & 7 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right] \overset{w_1-3w_3,\ w_2-2w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 40 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right] \overset{x_2 \leftrightarrow x_4}{\equiv}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 40 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_2 \leftrightarrow w_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 40 & 55 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -11 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \end{array}\right] \end{array} \overset{x_3 \leftrightarrow x_5}{\equiv}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 40 & 1 & 0 & 55 & 0 \\ 0 & 2 & -11 & 0 & -3 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 33 & 0 \end{array}\right] \end{array} \overset{\frac{1}{2}w_2,\ \frac{1}{24}w_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 40 & 1 & 0 & 55 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{8} & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overset{w_1-40w_3,\ w_2+\frac{11}{2}w_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{8} & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Zatem zmiennymi bazowymi są x_2, x_3, x_6 oraz $x_1 = -x_2$, $x_4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{16}x_6$, $x_5 = -\frac{11}{8}x_6$. Stąd układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań danych wzorami:

$x_1 = -a$, $x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}b - \frac{1}{16}c$, $x_5 = -\frac{11}{8}c$, $x_6 = c$, gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. $\square$

Przykład 2.13. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Rachunki będziemy wykonywali na macierzy uzupełnionej A_u naszego układu. Mamy, że

$$A_u = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \overset{x_1 \leftrightarrow x_2}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{rrrrr} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_2+2w_1,\ w_3-w_1,\ w_4+w_1}{\equiv}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{rrrrr} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right] \end{array} \overset{x_1 \leftrightarrow x_4}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{rrrrr} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_3+w_2,\ w_4-2w_2}{\equiv}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{rrrrr} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -3 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_4+w_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{rrrrr} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Zatem nasz układ jest sprzeczny i nie posiada rozwiązania, bo ostatnie równanie ma postać:

$$0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_1 = -1. \ \square$$

Przykład 2.14. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}.$$

Rachunki będziemy wykonywali na macierzy uzupełnionej A_u naszego układu. Mamy, że

$$A_u = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right] \overset{x_1 \leftrightarrow x_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{rrrrr} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 2 & 5 & -6 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_3+w_1,\ w_4+2w_1}{\equiv}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{rrrrr} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -4 \end{array}\right] \end{array} \overset{(-1)w_2}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{rrrrr} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -4 \end{array}\right] \end{array}.$$

Wykonujemy operację $w_3 + w_2$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -4 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_4 - 2w_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right] \end{array}.$$

Wykonujemy operacje $\frac{1}{3}w_3$ i $(-\frac{1}{3})w_4$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \end{array} \overset{w_1 + w_4,\ w_2 - 3w_4,\ w_3 - w_4}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \end{array}.$$

Wykonujemy operacje $w_1 - 2w_3$ i $w_2 + 2w_3$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \end{array} \overset{w_1 + w_2}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \end{array}.$$

Zatem układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{5}{3}$, $x_4 = -\frac{4}{3}$. $\square$

Zauważmy jeszcze, że przy stosowaniu metody eliminacji Gaussa liczba równań układu nie zwiększa się. Oznacza to, że **jeśli w układzie (1) liczba równań jest mniejsza od liczby niewiadomych, to układ ten nie może mieć dokładnie jednego rozwiązania!**

Ponadto, jeśli układ (1) nie ma rozwiązania, to na mocy twierdzenia 2.6, układ (9) też nie posiada rozwiązania, a więc $d_{k+1} \neq 0$. Stąd układ (9) jest sprzeczny i na mocy twierdzenia 2.6 układ (1) też jest sprzeczny. Uwzględniając twierdzenie 2.7 udowodniliśmy w ten sposób następujące

Twierdzenie 2.15. *Układ równań liniowych jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada rozwiązania.*