Wykład 3
Wyznaczniki

1 Określenie wyznacznika

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia $n > 1$ i niech i, j będą liczbami naturalnymi $\leq n$. Symbolem A_{ij} oznaczać będziemy macierz kwadratową stopnia $n-1$ powstałą z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy A.

Przykład 3.1. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$. Wówczas $A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ oraz $A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. $\square$

Wyznacznikiem nazywamy taką funkcję przyporządkowującą każdej macierzy kwadratowej A pewną liczbę (oznaczaną przez $\det(A)$), która spełnia następujące warunki:
(i) jeśli $A = [a]$ jest 1×1-macierzą, to $\det(A) = a$,
(ii) jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

gdzie $n > 1$, to

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det(A_{in}). \tag{2}$$

Wyznacznikiem macierzy A nazywa się wartość $\det(A)$ tej funkcji dla macierzy A.
Funkcja-wyznacznik jest jednoznacznie wyznaczona przez warunki (i) i (ii).
Wyznacznik macierzy A postaci (1) oznaczamy też następująco:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Powyższa definicja daje również efektywną metodę obliczania wyznacznika dowolnej macierzy kwadratowej A.

Przykład 3.2. Z własności (ii) i (i) otrzymujemy wzór:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{4}$$

Rzeczywiście, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot b \cdot \det[c] + (-1)^{2+2} \cdot d \cdot \det[a] = ad - bc.$ $\square$

Przykład 3.3. Ze wzoru (4) mamy, że $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = 1.$ □

Przykład 3.4. Z własności (ii) i przykładu 3.2: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} +$ $+(-1)^{2+3} \cdot b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_3(b_1c_2 - b_2c_1) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 + a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$

Zatem aby obliczyć wyznacznik stopnia 3 wystarczy dopisać do niego z prawej strony dwie pierwsze kolumny i następnie wymnożyć prawoskośnie wyrazy ze znakiem + oraz lewoskośnie ze znakiem - i dodać otrzymane wyniki. Taka metoda obliczania wyznacznika stopnia 3 nazywa się **regułą Sarrusa**. Istotnie:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}\right. = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3. \ \square$$

Przykład 3.5. Stosując regułę Sarrusa obliczymy wyznaczniki:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right. = -27 - 8 - 8 - (-3 - 24 - 24) = -43 + 51 = 8,$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right. = 18 + 24 + 16 - (9 + 16 + 48) = 58 - 73 = -15,$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right. = -12 - 18 - 4 - (-6 - 4 - 36) = -34 + 46 = 12,$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right. = -16 - 27 - 16 - (-24 - 6 - 48) = -59 + 78 = 19. \ \square$$

2 Własności wyznaczników

Twierdzenie 3.6. *Jeżeli macierz B powstaje z macierzy kwadratowej A przez zamianę miejscami dwóch wierszy (kolumn), to* $\det(B) = -\det(A)$.

Twierdzenie 3.7. *Jeżeli macierz B powstaje z macierzy kwadratowej A przez pomnożenie pewnego wiersza (kolumny) przez dowolną liczbę a, to* $\det(B) = a \cdot \det(A)$.

Twierdzenie 3.8. *Jeżeli macierz B powstaje z macierzy kwadratowej A przez dodanie do pewnego wiersza (kolumny) innego wiersza (innej kolumny) pomnożonego (pomnożonej) przez dowolną liczbę, to* $\det(B) = \det(A)$.

Stosując operacje elementarne na wierszach i kolumnach macierzy kwadratowej A możemy ją sprowadzić do postaci trójkątnej górnej:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

gdzie c_{ij} dla wszystkich $i \leq j$ są dowolnymi liczbami.

Twierdzenie 3.9. *Wyznacznik macierzy C postaci (5) jest równy iloczynowi wszystkich jej elementów na głównej przekątnej, czyli* $\det(C) = c_{11} \cdot c_{22} \cdot \ldots \cdot c_{nn}$.

Twierdzenia 3.6-3.9 umożliwiają nam efektywne obliczenie dowolnego wyznacznika przy pomocy operacji elementarnych. Pokażemy to na następującym przykładzie.

Przykład 3.10. Obliczymy wyznacznik

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}.$$

Po wykonaniu kolejno operacji $w_2 - w_1$, $w_3 + w_1$, $w_4 + 3 \cdot w_1$ uzyskujemy, że

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Następnie, stosując operację $w_2 + w_4$, uzyskamy, że

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Po zastosowaniu kolejno operacji $w_3 + 2 \cdot w_2$, $w_4 + 3 \cdot w_2$ otrzymamy, że

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \\ 0 & 0 & -26 & -61 \end{vmatrix}.$$

Stosując twierdzenie 3.7 do trzeciego wiersza uzyskujemy, że

$$W = (-9) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -26 & -61 \end{vmatrix}.$$

Po wykonaniu operacji $w_4 + 26 \cdot w_3$ otrzymamy, że

$$W = (-9) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{vmatrix}.$$

Zatem z twierdzenia 3.9: $W = (-9) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 17 = -153$. □

Z twierdzenia 3.7 mamy natychmiast następujący

Wniosek 3.11. *Jeżeli pewien wiersz (kolumna) macierzy kwadratowej A składa się z samych zer, to* $\det(A) = 0$.

Z twierdzenia 3.8 i z wniosku 3.11 otrzymujemy od razu następujący

Wniosek 3.12. *Jeżeli macierz kwadratowa A ma identyczne dwa wiersze (kolumny), to* $\det(A) = 0$.

Twierdzenie 3.13. *Wyznacznik macierzy transponowanej macierzy kwadratowej A jest równy wyznacznikowi macierzy A, czyli* $\det(A^T) = \det(A)$.

Twierdzenie 3.14 (Cauchy'ego). *Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to* $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Twierdzenie 3.15 (Rozwinięcie Laplace'a względem i-tego wiersza).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -1)^{i+1} \cdot a_{i1} \det(A_{i1}) + \ldots + (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \det(A_{in}).$$

Twierdzenie 3.16 (Rozwinięcie Laplace'a względem j-tej kolumny).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \det(A_{1j}) + \ldots + (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \det(A_{nj}).$$

W praktyce najszybszym sposobem obliczania wyznacznika jest stosowanie operacji elementarnych i rozwinięcia Laplace'a względem takiego wiersza (kolumny), w którym występuje co najwyżej jeden niezerowy wyraz. Pokażemy to w następnym przykładzie.

Przykład 3.17.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} \overset{w_4 - 4 \cdot w_1}{=} \begin{array}{c} \begin{matrix} & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} \end{array} = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} & \downarrow & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} \end{array} = (-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot$$

$(-5)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-5)\cdot(2\cdot 2-3\cdot 8) = 100$. Strzałkami $\downarrow$ oznaczyliśmy kolumnę, względem której zastosowano rozwinięcie Laplace'a.□

Przykład 3.18. Stosując rozwinięcie Laplace'a względem trzeciego wiersza obliczymy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Mamy, że

$$W = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}a\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}b\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}c\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} +$$
$$(-1)^{3+4}d\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Cztery wyznaczniki stopnia trzy obliczymy stosując regułę Sarrusa:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right. = -27-8-8-(-3-24-24) = -43+51 = 8,$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right. = 18+24+16-(9+16+48) = 58-73 = -15,$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right. = -12-18-4-(-6-4-36) = -34+46 = 12,$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right. = -16-27-16-(-24-6-48) = -59+78 = 19.$$

Stąd $W = 8a + 15b + 12c - 19d$.