Wykład 4
Macierz odwrotna i twierdzenie Cramera

1 Odwracanie macierzy

I_n jest elementem neutralnym mnożenia macierzy w zbiorze $M_n(\mathbb{R})$ tzn.

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

dla dowolnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ponadto z twierdzenia 3.9 mamy, że

$$\det(I_n) = 1.$$

Powiemy, że macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest **odwracalna**, jeżeli istnieje macierz $B \in M_n(\mathbb{R})$ taka, że

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n. \tag{1}$$

W tej sytuacji mówimy, że B jest **macierzą odwrotną** do macierzy A i piszemy $B = A^{-1}$.

Jeżeli macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest odwracalna, to z twierdzenia Cauchy'ego wynika od razu, że $\det(A) \neq 0$. Można udowodnić, że zachodzi następujące

Twierdzenie 4.1. *Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det(A) \neq 0$.

Z twierdzenia 4.1 łatwo można wyprowadzić następujące

Twierdzenie 4.2. *Macierz $B \in M_n(\mathbb{R})$ jest macierzą odwrotną do macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ wtedy, i tylko wtedy, gdy $A \cdot B = I_n$.*

2 Algorytm wyznacznikowy odwracania macierzy

Krok 1: Obliczamy $\det(A)$. Jeżeli $\det(A) = 0$, to A^{-1} nie istnieje. Jeżeli $\det(A) \neq 0$, to przechodzimy do następnego kroku.

Krok 2: Dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$ obliczamy $\det(A_{ij})$, czyli wyznaczniki macierzy powstających z macierzy A przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny. Obliczamy też **dopełnienia algebraiczne** d_{ij} elementu a_{ij} macierzy A: $d_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$.

Krok 3: Tworzymy **macierz dopełnień** $D(A)$

$$D(A) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Krok 4: Wypisujemy macierz odwrotną do macierzy A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot D(A)^T. \tag{3}$$

Przykład 4.3. Wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ nad ciałem liczb rzeczywistych. Z twierdzenia 3.9, $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Ponadto
$d_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $d_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -a$, $d_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ 1 & b \end{vmatrix} = ab - c$,
$d_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $d_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $d_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & b \end{vmatrix} = -b$,
$d_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $d_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $d_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.
Zatem $D(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab - c & -b & 1 \end{bmatrix}$ oraz $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot D(A)^T$, czyli $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & ab - c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
bo $\det(A) = 1$. $\square$

Przykład 4.4. Wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy najpierw wyznacznik macierzy A:
$\det(A) = \left|\begin{matrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{matrix} = -18 + 100 - 84 - 105 + 16 + 90 = -1$, czyli $\det(A) = -1 \neq 0$,
więc A^{-1} istnieje.

Teraz obliczamy dopełnienia algebraiczne wszystkich wyrazów macierzy A:
$d_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1$, $d_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(-18 - 20) = 38$,
$d_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27$.

$d_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 + 14) = 1$, $d_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 35 = -41$,
$d_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 25) = 29$.

$d_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1$, $d_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 42) = 34$, $d_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24$.

Tworzymy macierz dopełnień $D(A) = \begin{bmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{bmatrix}$. Zatem $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot D(A)^T =$ $(-1) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{bmatrix}$, czyli ostatecznie $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$. $\square$

3 Odwracanie macierzy przy pomocy operacji elementarnych

Z definicji mnożenia macierzy wynika, że dla dowolnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$: operacji elementarnej na wierszach macierzy A odpowiada pomnożenie macierzy A z lewej strony przez macierz, która powstaje z macierzy jednostkowej I_n przez wykonanie na niej tej samej operacji.

Stosując operacje elementarne na wierszach **nieosobliwej macierzy** A (tzn. takiej, że $\det(A) \neq 0$) możemy ją przekształcić do macierzy jednostkowej I_n. Wynika stąd, że istnieją macierze $B_1, B_2, \ldots, B_s$ takie, że

$$B_s \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot A = I_n. \tag{4}$$

Zatem $A^{-1} = B_s \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1$, czyli $A^{-1} = B_s \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot I_n$. Stąd **macierz A^{-1} powstaje z macierzy I_n przez wykonanie na niej tych samych operacji elementarnych, co na macierzy A.**

W praktyce przy obliczaniu macierzy odwrotnej do macierzy nieosobliwej A przy pomocy operacji elementarnych na wierszach postępu-jemy w sposób następujący. Z prawej strony macierzy A dopisujemy macierz jednostkową I_n tego samego stopnia. Na wierszach otrzymanej w ten sposób macierzy blokowej $[A|I_n]$ wykonujemy operacje elementarne aż do uzyskania macierzy blokowej postaci $[I_n|B]$. Macierz B jest wtedy macierzą odwrotną do macierzy A, tj. $B = A^{-1}$.

$$[A|I_n] \xrightarrow{\text{operacje elementarne na wierszach}} [I_n|A^{-1}]$$

Przykład 4.5. Stosując operacje elementarne wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Mamy: $\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w_1-w_4,\ w_2-2w_4,\ w_3-w_4}{\equiv}$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 0 & 2 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 14 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w_1 \leftrightarrow w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 14 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\overset{w_2-3w_3,\ w_4-2w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{w_2 \leftrightarrow w_3}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{w_3-4w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{w_3 \leftrightarrow w_4}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right] \overset{(-1)w_3,\ (-1)w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{w_1+6w_4,\ w_2-5w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 24 & -6 & -30 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -20 & 5 & 26 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right] \overset{w_1+2w_3,\ w_2-3w_3}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right]. \text{ Zatem: } A^{-1} = \left[\begin{array}{rrrr} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right]. \ \square$$

4 Wzory Cramera

Niech dany będzie układ n równań liniowych z n niewiadomymi x_1, x_2, ..., x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} . \tag{5}$$

Wyznacznikiem głównym układu (8) nazywamy

$$W = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Oznaczmy przez W_i (dla $i = 1, 2, \dots, n$) wyznacznik powstający z W przez zastąpienie i-tej kolumny W kolumną wyrazów wolnych $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$. Zatem

$$W_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ W_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \dots, \ W_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Wówczas zachodzi następujące

Twierdzenie 4.6 (Cramera). *Jeżeli wyznacznik główny układu (6) jest różny od zera, to układ ten posiada dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorami Cramera:*

$$x_1 = \frac{W_1}{W}, \ x_2 = \frac{W_2}{W}, \ \dots, \ x_n = \frac{W_n}{W}. \tag{6}$$

Jeżeli zaś $W = 0$, ale $W_i \neq 0$ dla pewnego $i = 1, \dots, n$, to układ (6) jest sprzeczny (a więc nie posiada rozwiązania).

Przykład 4.7. Stosując wzory Cramera rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}.$$

Obliczamy najpierw wyznacznik główny naszego układu. Stosujemy kolejno: operacje k_4+k_1, k_3+k_1, k_2+k_1, rozwinięcie Laplace'a względem czwartego wiersza, operację k_2-3k_1, rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza:

$$\text{W}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (7-24) = (-3) \cdot (-17) = 51.$$

Stąd $W = 51 \neq 0$, więc z twierdzenia Cramera układ nasz posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Obliczamy teraz wyznacznik W_1 stosując kolejno: operacje $k_1 + k_2$, $k_3 - k_4$, $k_2 + 2 \cdot k_4$, rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza, operację $k_2 + k_3$, rozwinięcie Laplace'a względem drugiego wiersza:

$$W_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot (-1) \cdot$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$ bo w ostatnim wyznaczniku mamy dwie identyczne kolumny. Postępując podobnie obliczamy: $W_2 = 0$ i $W_3 = 51$. Zatem ze wzorów Cramera: $x_1 = \frac{W_1}{W} = 0$, $x_2 = \frac{W_2}{W} = 0$ oraz $x_3 = \frac{W_3}{W} = 1$. Wyznacznika W_4 nie musimy już obliczać, bo z pierwszego równania $x_4 = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2 = 0 + 0 - 1 + 2 = 1$. $\square$