Wykład 6
Podprzestrzenie przestrzeni liniowych

1 Określenie podprzestrzeni

Definicja 6.1. Niepusty podzbiór $V_1 \subseteq V$ nazywamy **podprzestrzenią** przestrzeni liniowej V, jeśli ma on następujące własności:
(I) suma dowolnych dwu wektorów należących do V_1 należy do V_1,
(II) jeśli $\alpha \in V_1$ i $a \in K$, to $a \circ \alpha \in V_1$.

Uwaga 6.2. Wektor zerowy θ należy do każdej podprzestrzeni V_1 przestrzeni V. Rzeczywiście, ponieważ $V_1 \neq \emptyset$, więc istnieje $\alpha \in V_1$ i wówczas z (II) mamy, że $0 \circ \alpha \in V_1$, skąd z własności 5.15 jest $\theta \in V_1$.

Uwaga 6.3. Podprzestrzeń V_1 przestrzeni liniowej V jest przestrzenią liniową względem dodawania wektorów zredukowanego do V_1 i mnożenia przez skalary zredukowanego do V_1. Sprawdzenie prawdziwości aksjomatów **A1-A8** nie przedstawia trudności. Np. z (II) oraz z własności 5.16 wynika, że $-\alpha \in V_1$ dla każdego $\alpha \in V_1$.

Każda przestrzeń liniowa V zawiera co najmniej dwie podprzestrzenie: zbiór V oraz podprzestrzeń złożoną tylko z wektora θ. Pierwszą z tych podprzestrzeni nazywamy **niewłaściwą**, a drugą **zerową**.

Twierdzenie 6.4. *Część wspólna dowolnej niepustej rodziny podprzestrzeni danej przestrzeni liniowej V jest podprzestrzenią przestrzeni V.*

Dowód. Niech $\mathcal{W}$ będzie dowolną niepustą rodziną podprzestrzeni przestrzeni liniowej V i niech $W_0 = \bigcap_{W \in \mathcal{W}} W$. Z uwagi 6.2 mamy, że $\theta \in W$ dla każdego $W \in \mathcal{W}$. Zatem $\theta \in W_0$. Niech $\alpha, \beta \in W_0$. Wtedy $\alpha, \beta \in W$ dla każdego $W \in \mathcal{W}$, skąd $\alpha + \beta \in W$ dla każdego $W \in \mathcal{W}$, więc $\alpha + \beta \in W_0$. Jeśli $a \in \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in W_0$, to $\alpha \in W$ dla każdego $W \in \mathcal{W}$, skąd $a \circ \alpha \in W$ dla każdego $W \in \mathcal{W}$, więc $a \circ \alpha \in W_0$. Zatem W_0 jest podprzestrzenią przestrzeni V. $\square$

2 Podprzestrzenie generowane i ich własności

Twierdzenie 6.5. *Niech V będzie przestrzenią liniową i niech A będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni V. Istnieje najmniejsza (w sensie inkluzji) podprzestrzeń przestrzeni V zawierająca A.*

Dowód. Oznaczmy przez $\mathcal{W}$ rodzinę wszystkich podprzestrzeni W przestrzeni V takich, że $A \subseteq W$. Rodzina $\mathcal{W}$ jest niepusta, bo np. $V \in \mathcal{W}$. Z twierdzenia 6.4 mamy, że $W_0 = \bigcap_{W \in \mathcal{W}} W$ jest podprzestrzenią przestrzeni V, a ponieważ $A \subseteq W$ dla każdego $W \in \mathcal{W}$, więc $A \subseteq W_0$. Niech teraz V_1 będzie podprzestrzenią przestrzeni V taką, że $A \subseteq V_1$. Wtedy $V_1 \in \mathcal{W}$, skąd $W_0 \subseteq V_1$. Zatem W_0 jest najmniejszą w sensie inkluzji podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą zbiór A. $\square$

Uwaga 6.6. Najmniejszą podprzestrzeń przestrzeni liniowej V zawierającą zbiór $A \subseteq V$ nazywamy **podprzestrzenią rozpiętą na podzbiorze** A lub **generowaną przez podzbiór** A i oznaczamy przez $lin(A)$. Z tego określenia wynika od razu, że $lin(\emptyset) = \{\theta\}$. Jeśli zbiór A jest skończony i $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, to zamiast $lin(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\})$ będziemy pisali $lin(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Zauważmy, że dla każdego $\alpha \in V$ jest $lin(\alpha) = \{a \circ \alpha : a \in \mathbb{R}\}$. Rzeczywiście, $\alpha = 1 \circ \alpha \in \{a \circ \alpha : a \in \mathbb{R}\}$ oraz dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ mamy, że $a \circ \alpha + b \circ \alpha = (a+b) \circ \alpha$ i $a \circ (b \circ \alpha) = (ab) \circ \alpha$, więc $\{a \circ \alpha : a \in \mathbb{R}\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą α. Jeżeli zaś W jest podprzestrzenią przestrzeni V taką, że $\alpha \in W$, to dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ jest $a \circ \alpha \in W$, skąd $\{a \circ \alpha : a \in \mathbb{R}\} \subseteq W$. Zatem $lin(\alpha) = \{a \circ \alpha : a \in \mathbb{R}\}$.

Ponadto z definicji podprzestrzeni generowanej wynika od razu, że jeżeli A i B są podzbiorami przestrzeni liniowej V takimi, że $A \subseteq B$, to $lin(A) \subseteq lin(B)$.

Twierdzenie 6.7. *Niech $V_1, V_2, \ldots, V_n$ będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V. Wówczas zbiór*

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n : \alpha_i \in V_i \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni V. Ponadto $V_1 + V_2 + \ldots + V_n = lin(V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n)$.

Dowód. Niech $\alpha_i \in V_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wtedy $\alpha_i = \underbrace{\theta + \ldots + \theta}_{i-1} + \alpha_i + \underbrace{\theta + \ldots + \theta}_{n-i}$, skąd $\alpha_i \in V_1 + \ldots + V_n$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Zatem $V_1 \cup \ldots \cup V_n \subseteq V_1 + \ldots + V_n$. Niech $\alpha, \beta \in V_1 + \ldots + V_n$. Wtedy istnieją $\alpha_i, \beta_i \in V_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ takie, że $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ i $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_n$, skąd $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) \in V_1 + \ldots + V_n$, bo $\alpha_i + \beta_i \in V_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Ponadto dla $a \in K$ mamy, że $a \circ \alpha_i \in V_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, skąd z własności 5.20 $a \circ \alpha = a \circ \alpha_1 + \ldots + a \circ \alpha_n \in V_1 + \ldots + V_n$. Zatem $V_1 + \ldots + V_n$ jest podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą zbiór $V_1 \cup \ldots \cup V_n$.

Niech teraz W będzie dowolną podprzestrzenią przestrzeni V taką, że $V_1 \cup \ldots \cup V_n \subseteq W$. Weźmy dowolne $\alpha \in V_1 + \ldots + V_n$. Wtedy istnieją $\alpha_i \in V_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ takie, że $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Ale $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in W$, więc $\alpha \in W$. Zatem $V_1 + \ldots + V_n \subseteq W$. Stąd $V_1 + \ldots + V_n \subseteq lin(V_1 \cup \ldots \cup V_n)$. Ale $lin(V_1 \cup \ldots \cup V_n)$ jest najmniejszą podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą zbiór $V_1 \cup \ldots \cup V_n$, więc stąd $V_1 + \ldots + V_n = lin(V_1 \cup \ldots \cup V_n)$. $\square$

Twierdzenie 6.8. *Dla dowolnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni liniowej V zachodzi wzór:*

$$lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \{a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Dowód. Ponieważ $\alpha_i \in lin(\alpha_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, więc $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq lin(\alpha_1) \cup \ldots \cup lin(\alpha_n)$, skąd $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subseteq lin(lin(\alpha_1) \cup \ldots \cup lin(\alpha_n))$. Ponadto $\{\alpha_i\} \subseteq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, więc $lin(\alpha_i) \subseteq lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Zatem $lin(lin(\alpha_1) \cup \ldots \cup lin(\alpha_n)) \subseteq lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Stąd $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = lin(lin(\alpha_1) \cup \ldots \cup lin(\alpha_n)) = lin(\alpha_1) + \ldots + lin(\alpha_n) = \{a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ na mocy twierdzenia 6.7 i uwagi 6.6. $\square$

Twierdzenie 6.9. *Dla dowolnych podzbiorów X i Y przestrzeni liniowej V zachodzi wzór:*

$$lin(X \cup Y) = lin(X) + lin(Y).$$

Dowód. Mamy, że $X \subseteq lin(X) \subseteq lin(X) + lin(Y)$ i $Y \subseteq lin(Y) \subseteq lin(X) + lin(Y)$, więc $X \cup Y \subseteq lin(X) + lin(Y)$. Ale $lin(X \cup Y)$ jest najmniejszą podprzestrzenią zawierającą zbiór $X \cup Y$, więc stąd $lin(X \cup Y) \subseteq lin(X) + lin(Y)$. Dalej, $X \subseteq X \cup Y \subseteq lin(X \cup Y)$, skąd $lin(X) \subseteq lin(X \cup Y)$ oraz $Y \subseteq X \cup Y \subseteq lin(X \cup Y)$, więc $lin(Y) \subseteq lin(X \cup Y)$. Stąd $lin(X) + lin(Y) \subseteq lin(X \cup Y)$ i ostatecznie $lin(X \cup Y) = lin(X) + lin(Y)$. □

Z twierdzenia 6.9 mamy natychmiast następujący

Wniosek 6.10. *Dla dowolnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ przestrzeni liniowej V zachodzi wzór:*

$$lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m) = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + lin(\beta_1, \ldots, \beta_m).$$

Twierdzenie 6.11. *Dla dowolnego podzbioru X przestrzeni liniowej V i dla każdego wektora $\alpha \in V$:*

$$\alpha \in lin(X) \Leftrightarrow lin(X \cup \{\alpha\}) = lin(X).$$

Dowód. Załóżmy, że $lin(X \cup \{\alpha\}) = lin(X)$. Ponieważ $X \cup \{\alpha\} \subseteq lin(X \cup \{\alpha\})$, więc stąd $X \cup \{\alpha\} \subseteq lin(X)$, skąd $\alpha \in lin(X)$. Na odwrót, niech teraz $\alpha \in lin(X)$. Wtedy $lin(\alpha) \subseteq lin(X)$, skąd $lin(\alpha) + lin(X) = lin(X)$. Ale z twierdzenia 6.9, $lin(X \cup \{\alpha\}) = lin(X) + lin(\alpha)$, więc $lin(X \cup \{\alpha\}) = lin(X)$. □

3 Kombinacja liniowa wektorów

Definicja 6.12. Niech V będzie przestrzenią liniową. Powiemy, że wektor $\alpha \in V$ jest **kombinacją liniową wektorów** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in V$, jeżeli istnieją skalary $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (zwane **współczynnikami tej kombinacji**) takie, że

$$\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n. \tag{1}$$

Uwaga 6.13. Twierdzenie 6.8 możemy wypowiedzieć następująco: $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ składa się ze wszystkich kombinacji liniowych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Twierdzenie 6.14. *Niech X będzie dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{R}$. Wówczas $lin(X)$ jest zbiorem wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych podzbiorów zbioru X.*

Dowód. Oznaczmy przez V_1 zbiór wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych podzbiorów zbioru X. Dla $\alpha \in X$ mamy, że $\alpha = 1 \circ \alpha \in V_1$, więc $X \subseteq V_1$. Ponieważ $X \neq \emptyset$, więc $V_1 \neq \emptyset$. Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz $\alpha, \beta \in V_1$. Wtedy istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in X$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$ oraz $\beta = b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_m \circ \beta_m$. Zatem $a \circ \alpha = (aa_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (aa_n)\alpha_n \in V_1$ oraz $\alpha \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $\beta \in lin(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, więc z wniosku

6.10, $\alpha + \beta \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$, czyli na mocy uwagi 6.13 $\alpha + \beta \in V_1$. Stąd V_1 jest podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą X. Niech W będzie dowolną podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą X. Wtedy dla dowolnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X$ mamy, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in W$, skąd dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ jest $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n \in W$. Zatem $V_1 \subseteq W$, czyli V_1 jest najmniejszą podprzestrzenią przestrzeni X zawierającą zbiór X. Zatem $V_1 = lin(X)$. □

Twierdzenie 6.15. *Niech $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ będą wektorami przestrzeni liniowej V. Jeżeli wektor α jest kombinacją liniową wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_m$ oraz dla $i = 1, 2, \ldots, m$ wektor β_i jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, to wektor α jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.*

Dowód. Z uwagi 6.13 mamy, że $\beta_1, \ldots, \beta_m \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Zatem $lin(\beta_1, \ldots, \beta_m) \subseteq lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ale z uwagi 6.13 $\alpha \in lin(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, więc stąd $\alpha \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, czyli z uwagi 6.13 wektor α jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. □

Przykład 6.16. Niech $n \in \mathbb{N}$. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ określamy wektory

$$\varepsilon_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0],\ \varepsilon_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0],\ \varepsilon_3 = [0, 0, 1, \ldots, 0],\ \ldots,\ \varepsilon_n = [0, 0, 0, \ldots, 1]$$

Dla dowolnych skalarów $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{r} a_1 \circ \varepsilon_1 = [a_1, 0, 0, \ldots, 0] \\ a_2 \circ \varepsilon_2 = [0, a_2, 0, \ldots, 0] \\ a_3 \circ \varepsilon_3 = [0, 0, a_3, \ldots, 0] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n \circ \varepsilon_n = [0, 0, 0, \ldots, a_n] \end{array},$$

więc po dodaniu stronami tych równości uzyskamy wzór:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_1 \circ \varepsilon_1 + a_2 \circ \varepsilon_2 + \ldots + a_n \circ \varepsilon_n. \tag{2}$$

Z tego wzoru wynika zatem, że każdy wektor przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest kombinacją liniową wektorów $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, czyli $\mathbb{R}^n = lin(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Mówimy też, że wektory $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^n$.□

4 Operacje elementarne na układach wektorów

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą dowolnymi wektorami przestrzeni liniowej V. Wyróżniamy następujące operacje elementarne nad układem wektorów $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$:

O1. Zamiana miejscami wektorów α_i z α_j (dla $i \neq j$) oznaczana przez $w_i \leftrightarrow w_j$. Oczywiście operacja ta jest do siebie odwrotna.

O2. Pomnożenie i-tego wektora przez niezerowy skalar $a \in \mathbb{R}$, oznaczenie: $a \cdot w_i$. Ponieważ dla $a \neq 0$ jest $a^{-1} \circ (a \circ \alpha_i) = (a^{-1}a) \circ \alpha_i = 1 \circ \alpha_i = \alpha_i$, więc operacją odwrotną do $a \cdot w_i$ jest operacja $a^{-1} \cdot w_i$.

O3. Dodanie do wektora α_i wektora α_j (dla $i \neq j$) pomnożonego przez dowolny skalar $a \in \mathbb{R}$, oznaczenie: $w_i + a \cdot w_j$. Ponieważ $(\alpha_i + a \circ \alpha_j) + (-a) \circ \alpha_j = \alpha_i + a \circ \alpha_j + (-(a \circ \alpha_j)) = \alpha_i$, więc operacją odwrotną do operacji $w_i + a \cdot w_j$ jest operacja $w_i + (-a) \cdot w_j$.

Twierdzenie 6.17. *Jeżeli układ wektorów $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ przestrzeni liniowej V powstaje z układu wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przez kolejne wykonanie skończonej liczby operacji elementarnych, to*

$$lin(\beta_1, \dots, \beta_n) = lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Dowód. Indukcja pozwala nam ograniczyć się do jednej operacji. Ponadto operacje elementarne są odwracalne, więc wystarczy wykazać, że $lin(\beta_1, \dots, \beta_n) \subseteq lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, czyli, że $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Dla operacji **O1** jest to oczywiste. Dla operacji **O2** mamy, że $\beta_j = \alpha_j$ dla $j \neq i$ oraz $\beta_i = a \circ \alpha_i \in lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Dla operacji **O3** $\beta_k = \alpha_k$ dla $k \neq i$ oraz $\beta_i = \alpha_i + a \circ \alpha_j \in lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. $\square$

Przykład 6.18. Sprawdzimy, czy wektor $[1, 2, 3]$ należy do podprzestrzeni $W = lin([1, 3, 2], [1, 2, 1], [2, 5, 3])$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$. Po wykonaniu operacji $w_2 - w_1$, $w_3 - 2w_1$ uzyskamy na mocy twierdzenia 6.17, że $W = lin([1, 3, 2], [0, -1, -1], [0, -1, -1]) = lin([1, 3, 2], [0, -1, -1]) = \{x \circ [1, 3, 2] + y \circ [0, -1, -1] : x, y \in \mathbb{R}\} = \{[x, 3x - y, 2x - y] : x, y \in \mathbb{R}\}$. Zatem $[1, 2, 3] \in W$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $x, y \in \mathbb{R}$ takie, że $[1, 2, 3] = [x, 3x - y, 2x - y]$, czyli gdy $x = 1$ oraz $3x - y = 2x - y = -1$, a więc gdy $x = 1$ i $x = 0$. Uzyskana sprzeczność pokazuje, że $[1, 2, 3] \notin W$. $\square$

5 Liniowa niezależność wektorów

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą dowolnymi wektorami przestrzeni liniowej V. Powiemy, że układ wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest **liniowo zależny**, jeżeli istnieją skalary $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ nie wszystkie równe 0 i takie, że $a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n = \theta$.

Przykład 6.19. Wektory $\theta, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$ są liniowo zależne, bo np. $1 \circ \theta + 0 \circ \alpha_1 + \dots + 0 \circ \alpha_n = \theta$ oraz $1 \neq 0$. $\square$

Uwaga 6.20. Jeżeli układ wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest liniowo zależny, to dla dowolnej bijekcji $f\colon \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ układ $(\alpha_{f(1)}, \dots, \alpha_{f(n)})$ też jest liniowo zależny.

Przykład 6.21. Wektory $\alpha, \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ są liniowo zależne, bo $1 \circ \alpha + (-1) \circ \alpha + 0 \circ \alpha_1 + \dots + 0 \circ \alpha_n = \theta$ i $1 \neq 0$. $\square$

Definicja 6.22. Powiemy, że układ wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni liniowej V jest **liniowo niezależny**, jeżeli nie jest on liniowo zależny, tzn.

$$\forall_{a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}}\ [a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \theta \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0].$$

Przykład 6.23. Ze wzoru (2) wynika od razu, że układ wektorów $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest liniowo niezależny. □

Uwaga 6.24. Z uwagi 6.20 wynika, że jeśli układ wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni liniowej V jest liniowo niezależny (w skrócie **lnz**), to dla dowolnej bijekcji $f\colon \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ układ $(\alpha_{f(1)}, \dots, \alpha_{f(n)})$ też jest liniowo niezależny. Ponadto z przykładu 6.21 wynika, że wtedy $\alpha_i \neq \alpha_j$ dla $i \neq j$. Możemy zatem powiedzieć, że zbiór wektorów $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest liniowo niezależny. Dalej, z przykładu 6.219 wynika, że $\theta \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Jeżeli $X = \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ jest niepustym podzbiorem zbioru $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, to zbiór X też jest liniowo niezależny, gdyż w przeciwnym wypadku istniałyby skalary $b_1, \dots, b_k$ nie wszystkie równe 0 i takie, że $b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_k \circ \beta_k = \theta$ i wówczas uzupełniając ciąg $(b_1, \dots, b_k)$ zerami uzyskamy ciąg $(a_1, \dots, a_n)$ taki, że $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \theta$, wbrew liniowej niezależności zbioru $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. □

Z uwagi 6.24 wynika zatem, że definicję liniowej niezależności można rozszerzyć na dowolne podzbiory przestrzeni liniowej.

Definicja 6.25. Powiemy, że podzbiór X przestrzeni liniowej V jest liniowo niezależny (w skrócie **lnz**), jeżeli każdy skończony podzbiór zbioru X jest liniowo niezależny. Zbiór pusty wektorów uważamy za liniowo niezależny.

Z uwagi 6.24 oraz z tej definicji mamy od razu następujące

Twierdzenie 6.26. *Dowolny podzbiór liniowo niezależnego zbioru wektorów przestrzeni liniowej jest zbiorem liniowo niezależnym.*

Przykład 6.27. W przestrzeni liniowej $V = \mathbb{R}[x]$ zbiór $\{1, x, x^2, \dots\}$ jest liniowo niezależny. □

Przykład 6.28. Jeżeli α jest niezerowym wektorem przestrzeni liniowej V, to zbiór $\{\alpha\}$ jest liniowo niezależny. Rzeczywiście, niech $a \in \mathbb{R}$ będzie takie, że $a \circ \alpha = \theta$. Wtedy z uwagi 5.19 mamy, że $a = 0$, czyli zbiór $\{\alpha\}$ jest lnz. □

Twierdzenie 6.29. *Jeżeli układ wektorów $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ przestrzeni liniowej V powstaje z układu $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przez kolejne wykonanie skończonej liczby operacji elementarnych, to układ $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy układ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest liniowo niezależny.*

Dowód. Indukcja pozwala nam ograniczyć się do jednej operacji elementarnej. Ponadto operacje elementarne są odwracalne, więc wystarczy wykazać, że jeżeli układ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest lnz, to układ $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ jest lnz. Dla operacji **O1** jest to oczywiste. Dla operacji **O2** mamy, że $\beta_j = \alpha_j$ dla $j \neq i$ oraz $\beta_i = a \circ \alpha_i$ dla pewnego $a \neq 0$. Weźmy dowolne $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ takie, że $a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n = \theta$. Wtedy $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + (a_i a) \circ \alpha_i + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \theta$. Stąd z liniowej niezależności układu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mamy, że $a_1 = a_2 = \ldots = a_i a = \ldots = a_n = 0$. Ale $a \neq 0$, więc stąd $a_1 = \ldots = a_i = \ldots = a_n = 0$, czyli układ $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jest lnz.

Dla operacji **O3** bez zmniejszania ogólności możemy zakładać, że $b_1 = \alpha_1 + a \circ \alpha_2$ oraz $\beta_j = \alpha_j$ dla $j = 2, \ldots, n$. Weźmy dowolne $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takie, że $a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n = \theta$. Wtedy $a_1 \circ (\alpha_1 + a \circ \alpha_2) + a_2 \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \theta$, czyli $a_1 \circ \alpha_1 + (a_1 a + a_2) \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \theta$, skąd z lnz układu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mamy, że $a_1 = a_1 a + a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$, czyli $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, a więc układ $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jest lnz. $\square$

Twierdzenie 6.30. *Niech X będzie zbiorem liniowo niezależnym wektorów przestrzeni liniowej V. Wówczas dla każdego wektora $\alpha \in V$:*

$$\alpha \in lin(X) \Leftrightarrow [\alpha \in X \text{ lub zbiór } X \cup \{\alpha\} \text{ jest liniowo zależny}].$$

Dowód. $\Leftarrow$. Załóżmy, że $\alpha \notin lin(X)$. Wtedy $\alpha \notin X$, gdyż $X \subseteq lin(X)$. Zatem zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest liniowo zależny. Ale zbiór X jest liniowo niezależny, więc istnieją parami różne wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X$ takie, że zbiór $\{\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest liniowo zależny. Zatem istnieją skalary $a, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ nie wszystkie równe 0 i takie, że $a \circ \alpha + a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \theta$. Stąd z liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wynika, że $a \neq 0$. Zatem $\alpha = (-\frac{a_1}{a}) \circ \alpha_1 + \ldots + (-\frac{a_n}{a}) \circ \alpha_n \in lin(X)$, czyli $\alpha \in lin(X)$ na mocy twierdzenia 6.14 i mamy sprzeczność.

$\Rightarrow$. Na mocy twierdzenia 6.14 istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$. Zatem $1 \circ \alpha + (-a_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (-a_n) \circ \alpha_n = \theta$, skąd wynika, że $\alpha \in X$ albo $\alpha \notin X$ i zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest liniowo zależny. $\square$