Wykład 7
Baza i wymiar przestrzeni liniowej

1 Baza przestrzeni liniowej

Niech V będzie przestrzenią liniową. Powiemy, że podzbiór $X \subseteq V$ jest **maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym**, jeśli X jest zbiorem liniowo niezależnym oraz dla każdego zbioru liniowo niezależnego $Y \subseteq V$ takiego, że $X \subseteq Y$ jest $X = Y$.

Definicja 7.1. Każdy maksymalny liniowo niezależny podzbiór X wektorów przestrzeni liniowej V nazywamy **bazą** tej przestrzeni.

Twierdzenie 7.2. *Każdy liniowo niezależny zbiór wektorów X_0 przestrzeni liniowej V można rozszerzyć do bazy $X \supseteq X_0$ tej przestrzeni.*

Dowód. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów liniowo niezależnych przestrzeni V zawierających zbiór X_0. Wtedy $\mathcal{A} \neq \emptyset$, bo $X_0 \in \mathcal{A}$. Ponadto zbiór $\mathcal{A}$ jest częściowo uporządkowany przez inkluzję zbiorów. Jeżeli $\mathcal{B}$ jest łańcuchem w $\mathcal{A}$, tzn. dla dowolnych $Y, Z \in \mathcal{B}$ jest $Y \subseteq Z$ lub $Z \subseteq Y$, to $Y_0 = \bigcup_{Y \in \mathcal{B}} Y$ też jest zbiorem liniowo niezależnym, gdyż dla dowolnych $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in Y_0$ istnieją $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{B}$ takie, że $\alpha_i \in Y_i$ dla $i = 1, \dots, n$. Wtedy istnieje $k \leq n$ takie, że $Y_i \subseteq Y_k$ dla każdego $i = 1, \dots, n$, skąd $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in Y_k$. Ale zbiór Y_k jest liniowo niezależny, więc zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ też jest liniowo niezależny. Zatem w $\mathcal{A}$ każdy łańcuch ma ograniczenie górne, więc z lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje w $\mathcal{A}$ element maksymalny X, który jest szukaną bazą przestrzeni V zawierającą X_0. □

Ponieważ zbiór pusty jest liniowo niezależny, więc z twierdzenia 7.2 mamy natychmiast następujące

Twierdzenie 7.3. *Każda przestrzeń liniowa posiada bazę.* □

Twierdzenie 7.4. *Niech V będzie przestrzenią liniową. Zbiór $X \subseteq V$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem liniowo niezależnym oraz $V = lin(X)$ (tzn. X generuje V).*

Dowód. Załóżmy, że X jest bazą przestrzeni V. Wówczas X jest zbiorem liniowo niezależnym. Weźmy dowolne $\alpha \in V$ i załóżmy, że $\alpha \notin lin(X)$. Wtedy z twierdzenia 6.30 wynika, że $\alpha \notin X$ oraz zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest liniowo niezależny. Zatem X nie jest maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym i mamy sprzeczność.

Na odwrót, załóżmy, że zbiór X jest liniowo niezależny oraz $V = lin(X)$. Weźmy dowolny liniowo niezależny zbiór $Y \subseteq V$ taki, że $X \subseteq Y$. Gdyby $X \neq Y$, to dla pewnego $\alpha \in Y$ byłoby, że $\alpha \notin X$ i zbiór $X \cup \{\alpha\} \subseteq Y$ jest liniowo niezależny. Zatem z twierdzenia 6.30 mielibyśmy, że $\alpha \notin lin(X) = V$, co prowadzi do sprzeczności. Zatem $X = Y$ i zbiór X jest bazą przestrzeni V. □

Przykład 7.5. Ponieważ zbiór $\{1, x, x^2, \dots\}$ generuje przestrzeń $\mathbb{R}[x]$ i jest liniowo niezależny, więc na mocy twierdzenia 7.4 jest on bazą tej przestrzeni. □

Przykład 7.6. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wówczas z twierdzenia 7.4 oraz z przykładów 6.16 i 6.23 wynika od razu, że zbiór $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Nazywamy ją **bazą kanoniczną**. □

Z twierdzeń 6.17, 7.11 i 7.16 wynika od razu następujące

Twierdzenie 7.7. *Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą parami różnymi wektorami i niech $\beta_1, \dots, \beta_n$ będą parami różnymi wektorami przestrzeni liniowej V. Załóżmy, że układ wektorów $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ powstaje z układu $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przez kolejne zastosowanie skończonej liczby operacji elementarnych. Wówczas zbiór $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest bazą tej przestrzeni.* □

Twierdzenie 7.8. *Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą wektorami przestrzeni liniowej V. Wówczas każdy maksymalny (względem liczby elementów) podzbiór liniowo niezależny $A \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest bazą podprzestrzeni $lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.*

Dowód. Niech $A \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ będzie maksymalnym (względem liczby elementów) podzbiorem liniowo niezależnym. Wówczas oczywiście $lin(A) \subseteq lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = W$. Niech $i = 1, \dots, n$. Jeśli $\alpha_i \in A$, to $\alpha_i \in lin(A)$; jeśli zaś $\alpha_i \notin A$, to z maksymalności A wynika, że zbiór $A \cup \{\alpha_i\}$ jest liniowo zależny. Zatem z twierdzenia 6.30 $\alpha_i \in lin(A)$. Stąd $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq lin(A)$, czyli $W \subseteq lin(A)$ i ostatecznie $lin(A) = W$. Zatem z twierdzenia 7.4 zbiór A jest bazą podprzestrzeni W. □

Twierdzenie 7.9. *Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą parami różnymi wektorami przestrzeni liniowej V. Wówczas zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor $\alpha \in V$ można jednoznacznie zapisać w postaci*

$$\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n \text{ dla pewnych } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Dowód. Załóżmy, że zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V. Wówczas z twierdzenia 7.4 mamy, że $V = lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ oraz zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest liniowo niezależny. Zatem dla dowolnego $\alpha \in V$ istnieją $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$. Jeśli $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ są takie, że $\alpha = b_1 \circ \alpha_1 + \ldots + b_n \circ \alpha_n$, to $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = b_1 \circ \alpha_1 + \ldots + b_n \circ \alpha_n$, czyli $(a_1 - b_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (a_n - b_n) \circ \alpha_n = \theta$, więc z liniowej niezależności zbioru $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ mamy, że $a_i - b_i = 0$, czyli $a_i = b_i$ dla $i = 1, \dots, n$.

Na odwrót, jeżeli $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ są takie, że $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \theta$, to $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = 0 \circ \alpha_1 + \ldots + 0 \circ \alpha_n$, skąd z jednoznaczności zapisu wektora $a_i = 0$ dla $i = 1, \dots, n$, czyli zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest liniowo niezależny. Ponadto z założenia $V = lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, więc z twierdzenia 7.4 zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V. □

Definicja 7.10. Niech $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ będzie bazą przestrzeni liniowej V. Wówczas ciąg $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nazywamy **bazą uporządkowaną** przestrzeni V. Niech $\alpha \in V$. Wtedy na mocy twierdzenia 7.9 istnieje dokładnie jeden ciąg $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ taki, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$. Ciąg $(a_1, \dots, a_n)$ nazywamy **ciągiem współrzędnych wektora** α w bazie $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, a element a_i, dla każdego $i = 1, \dots, n$, nazywa się **i-tą współrzędną wektora** α w tej bazie.

Wniosek 7.11. *Niech V będzie przestrzenią liniową i niech, dla pewnej liczby naturalnej n, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą uporządkowaną tej przestrzeni. Przyporządkujmy każdemu wektorowi $\alpha \in V$, ciąg jego współrzędnych w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Otrzymane w ten sposób odwzorowanie ϕ jest bijekcją zbioru V na zbiór $\mathbb{R}^n$. Przy tym $\phi(\alpha_i) = \varepsilon_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.*$\square$

Definicja 7.12. Odwzorowanie ϕ określone w powyższym wniosku nazywamy **układem współrzędnych wyznaczonym przez bazę** $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

2 Wymiar przestrzeni liniowej

Lemat 7.13. *Niech wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni V i niech $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$, przy czym $a_j \neq 0$. Wówczas wektory*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n \tag{1}$$

też tworzą bazę przestrzeni V.

Dowód. Zauważmy, że wektory (1) powstają z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przez kolejne wykonanie następujących operacji elementarnych:
$a_j \cdot w_j, w_j + a_1 \cdot w_1, \ldots, w_j + a_{j-1} \cdot w_{j-1}, w_j + a_{j+1} \cdot w_{j+1}, \ldots, w_j + a_n \cdot w_n$. Zatem na mocy twierdzenia 7.18, wektory (1) tworzą bazę przestrzeni V. $\square$

Twierdzenie 7.14 (Steinitza o wymianie). *Jeśli wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V, a wektory $\beta_1, \ldots, \beta_s$ są liniowo niezależne, to*

(i) $s \leq n$ oraz

(ii) spośród wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ można wybrać $n - s$ wektorów, które łącznie z wektorami $\beta_1, \ldots, \beta_s$ tworzą bazę przestrzeni V.

Dowód. Zastosujemy indukcję względem s. Dla $s = 0$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla liczb mniejszych od pewnej liczby naturalnej s i rozpatrzmy s wektorów liniowo niezależnych $\beta_1, \ldots, \beta_s$. Wektory $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}$ są liniowo niezależne, a więc z założenia indukcyjnego $s-1 \leq n$ i istnieje $n-s+1 = n-(s-1)$ wektorów spośród wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, które łącznie z $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}$ tworzą bazę przestrzeni V. Dla uproszczenia znakowania przyjmiemy, że tymi wektorami są $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-s+1}$.

Wykażemy najpierw, że $s - 1 < n$. W przeciwnym razie byłoby $n = s - 1$ (bo $s - 1 \leq n$), a zatem już wektory $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}$ tworzyłyby bazę przestrzeni V, a stąd wynikałoby, że $\beta_s \in lin(\beta_1, \ldots, \beta_{s-1})$, co na mocy twierdzenia 6.30 prowadzi do sprzeczności (gdyż wektory $\beta_1, \ldots, \beta_s$ są liniowo niezależne). Wobec tego $s - 1 < n$, a stąd $s \leq n$. To dowodzi (i).

Ponieważ wektory $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-s+1}$ tworzą bazę przestrzeni V, więc β_s jest ich kombinacją liniową. Wobec liniowej niezależności wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_s$ i twierdzenia 6.30, w kombinacji liniowej przedstawiającej β_s, co najmniej jeden z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-s+1}$ występuje ze współczynnikiem różnym od zera. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy przyjąć, że $a_{n-s+1} \neq 0$. Wtedy z lematu 7.13 wektory $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-s}, \beta_s$ tworzą bazę przestrzeni V, czyli wektory $\beta_1, \ldots, \beta_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-s}$ tworzą bazę przestrzeni V, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Wniosek 7.15. *Jeśli n-elementowy zbiór jest bazą przestrzeni liniowej V, to każda baza tej przestrzeni składa się z dokładnie n wektorów.*

Dowód. Niech wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V. Niech X będzie inną bazą tej przestrzeni. Gdyby zbiór X miał więcej niż n elementów, to byłyby one liniowo niezależne i otrzymalibyśmy sprzeczność z twierdzeniem Steinitza o wymianie. Zatem $|X| \leq n$. Ale wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne i zbiór skończony X jest bazą przestrzeni V, więc znowu z twierdzenia Steinitza o wymianie $n \leq |X|$, czyli ostatecznie $|X| = n$. □

Definicja 7.16. Liczbę elementów dowolnej skończonej bazy przestrzeni liniowej V nazywamy **wymiarem przestrzeni** V i oznaczamy przez $\dim V$.

W ten sposób wymiar jest określony dla wszystkich takich przestrzeni, które mają skończoną bazę. Jeśli dana przestrzeń liniowa V nie ma skończonej bazy, to mówimy, że jej **wymiar jest nieskończony** i piszemy $\dim V = \infty$. Można udowodnić, że wszystkie bazy dowolnej przestrzeni liniowej V mają tę samą moc. Wobec tego można określić wymiar dowolnej przestrzeni liniowej V jako moc dowolnej bazy przestrzeni V.

Przykład 7.18. Ponieważ przestrzeń $\mathbb{R}^n$ posiada bazę n-elementową (np. bazę kanoniczną), więc $\dim \mathbb{R}^n = n$. □

Przykład 7.19. Ponieważ zbiór pusty jest bazą przestrzeni zerowej $\{\theta\}$, więc $\dim\{\theta\} = 0$. □

Przykład 7.20. Ponieważ zbiór $\{1, x, x^2, \ldots\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}[x]$, więc $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$. □

Przykład 7.21. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^\infty$ wektory $\epsilon_1 = [1, 0, 0, \ldots], \epsilon_2 = [0, 1, 0, \ldots], \ldots$ są liniowo niezależne. Zatem z twierdzenia Steinitza o wymianie $\dim \mathbb{R}^\infty = \infty$. □

Twierdzenie 7.22. *Jeśli przestrzeń liniowa V ma wymiar n, to każda jej podprzestrzeń W ma wymiar nie większy niż n.*

Dowód. Niech X będzie bazą podprzestrzeni W. Wtedy zbiór X jest liniowo niezależny, więc na mocy twierdzenia Steinitza o wymianie $|X| \leq n$. □

Twierdzenie 7.23. *Dla dowolnej podprzestrzeni W przestrzeni liniowej V wymiaru skończonego równoważne są warunki:*

(i) $\dim W = \dim V$, *(ii)* $W = V$.

Dowód. (ii)⇒(i). Oczywiste. (i)⇒(ii). Oznaczmy $n = \dim V$. Wtedy istnieje baza $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ przestrzeni V. Ale $\dim W = n$, więc istnieje baza $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ podprzestrzeni W. Zatem wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ są liniowo niezależne i na mocy twierdzenia Steinitza o wymianie można je uzupełnić do bazy przestrzeni V, $n - n = 0$ wektorami wybranymi spośród wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Zatem wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tworzą bazę przestrzeni V, skąd $V = lin(\beta_1, \ldots, \beta_n) = W$. □

Z twierdzenia 7.8 wynika od razu następujące

Twierdzenie 7.24. *Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą wektorami przestrzeni liniowej V. Wówczas*

$\dim lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq n$. *Ponadto* $\dim lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = n$ *wtedy i tylko wtedy, gdy wektory* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *są liniowo niezależne.* $\square$

Twierdzenie 7.25. *Niech* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *będą wektorami przestrzeni liniowej* V *wymiaru* n. *Wówczas równoważne są warunki:*
(i) zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *jest bazą przestrzeni* V,
(ii) zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *jest liniowo niezależny,*
(iii) zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *generuje przestrzeń* V.

Dowód. (i)$\Rightarrow$(ii). Oczywiste. (ii)$\Rightarrow$(iii). Wynika od razu z twierdzenia Steinitza o wymianie. (iii)$\Rightarrow$(i). Z założenia wynika, że $V = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Zatem $\dim lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = n$ i na mocy twierdzenia 7.23 zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest liniowo niezależny. Zatem ostatecznie ten zbiór jest bazą przestrzeni V. $\square$

Twierdzenie 7.26. *Niech* V_1 *i* V_2 *będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni liniowej* V. *Wówczas podprzestrzenie* $V_1 \cap V_2$ *i* $V_1 + V_2$ *są również skończenie wymiarowe i zachodzi wzór:*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2). \tag{2}$$

Dowód. Ponieważ $V_1 \cap V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni skończenie wymiarowej V_1, więc z twierdzenia 7.21 przestrzeń $V_1 \cap V_2$ jest skończenie wymiarowa. Niech $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ będzie bazą przestrzeni $V_1 \cap V_2$. Wtedy z twierdzenia Steinitza o wymianie ten zbiór można uzupełnić do bazy $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_s\}$ przestrzeni V_1 i można go też uzupełnić do bazy $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ przestrzeni V_2. Wtedy $\dim(V_1 \cap V_2) = k$, $\dim V_1 = k+s$ i $\dim V_2 = k+r$, więc pozostaje wykazać, że $\dim(V_1+V_2) = k+s+r$. Ale $V_1+V_2 = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s) + lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ $= lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)$, więc wystarczy wykazać, że wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ są liniowo niezależne. W tym celu weźmy dowolne skalary $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ takie, że
$a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_k \circ \alpha_k + b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_s \circ \beta_s + c_1 \circ \gamma_1 + \ldots + c_r \circ \gamma_r = \theta$. Oznaczmy: $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_k \circ \alpha_k$, $\beta = b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_s \circ \beta_s$, $\gamma = c_1 \circ \gamma_1 + \ldots + c_r \circ \gamma_r$. Wtedy $\gamma = -(\alpha + \beta) \in V_1 \cap V_2$. Zatem istnieją $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{R}$ takie, że $\gamma = d_1 \circ \alpha_1 + \ldots + d_k \circ \alpha_k$, skąd $c_1 \circ \gamma_1 + \ldots + c_r \circ \gamma_r + (-d_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (-d_k) \circ \alpha_k = \theta$. Zatem z liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ mamy, że $c_1 = \ldots = c_r = -d_1 = \ldots = -d_k = 0$, czyli $\gamma = \theta$ oraz $\theta = \alpha + \gamma$. Zatem z liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s$ otrzymamy, że $a_1 = \ldots = a_k = b_1 = \ldots = b_s = 0$ i ostatecznie wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ są liniowo niezależne. $\square$

Wniosek 7.27. *Niech* V_1, V_2 *będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej* V *wymiaru* n. *Wtedy* $\dim(V_1 \cap V_2) \geq \dim V_1 + \dim V_2 - n$.

Dowód. Ponieważ $\dim(V_1 + V_2) \leq n$, więc z twierdzenia 7.25 uzyskujemy, że $\dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) \leq n$, skąd mamy tezę. $\square$

3 Suma prosta podprzestrzeni

Lemat 7.28. *Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V. Następujące warunki są równoważne:*
(i) $V_i \cap V_2 = \{\theta\}$;
(ii) Dla dowolnych $\alpha_1, \beta_1 \in V_1$, $\alpha_2, \beta_2 \in V_2$ z tego, że $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ wynika, że $\alpha_1 = \beta_1$ i $\alpha_2 = \beta_2$.

Dowód. (i)$\Rightarrow$(ii). Weźmy dowolne $\alpha_i, \beta_i \in V_i$ dla $i = 1, 2$ takie, że $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$. Wtedy $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 \in V_1 \cap V_2$. Ale $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$, więc $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \theta$, skąd $\alpha_1 = \beta_1$ i $\alpha_2 = \beta_2$.
(ii)$\Rightarrow$(i). Weźmy dowolne $\alpha \in V_1 \cap V_2$. Ponieważ $\alpha + \theta = \theta + \alpha$ oraz $\alpha, \theta \in V_1$ i $\theta, \alpha \in V_2$, więc $\alpha = \theta$ i $\theta = \alpha$, skąd $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$. □

Definicja 7.29. Mówimy, że przestrzeń liniowa V jest *sumą prostą swoich podprzestrzeni* V_1 i V_2, gdy $V = V_1 + V_2$ oraz spełniony jest którykolwiek warunek (a więc oba warunki) powyższego lematu. Piszemy wtedy $V = V_1 \oplus V_2$. Mówimy też, że podprzestrzeń V_2 jest **dopełnieniem liniowym podprzestrzeni** V_1 (w przestrzeni V).

Twierdzenie 7.30. *Dla dowolnej podprzestrzeni V_1 przestrzeni liniowej V istnieje podprzestrzeń $W \subseteq V$ taka, że $V = V_1 \oplus W$.*

Dowód. Z twierdzenia 7.3 podprzestrzeń V_1 posiada bazę X. Zatem z twierdzenia 7.2 istnieje podzbiór $Y \subseteq V$ rozłączny z X i taki, że zbiór $X \cup Y$ jest bazą przestrzeni V. Ponadto $V_1 = lin(X)$ oraz $V = lin(X \cup Y)$. Niech $W = lin(Y)$. Wtedy z twierdzenia 6.9 mamy, że $lin(X \cup Y) = lin(X) + lin(Y)$, czyli $V = V_1 + W$. Niech $\alpha \in V_1 \cap W$. Wtedy istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X$, $\beta_1, \ldots, \beta_k \in Y$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_k \circ \beta_k$, skąd $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n + (-b_1) \circ \beta_1 + \ldots + (-b_k) \circ \beta_k = \theta$. Zatem z liniowej niezależności zbioru $X \cup Y$ mamy, że $a_1 = \ldots = a_n = -b_1 = \ldots = -b_k = 0$, czyli $\alpha = \theta$ i $V_1 \cap W = \{\theta\}$. Zatem $V = V_1 \oplus W$. □

4 Hiperpłaszczyzny liniowe

Definicja 7.31. Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią liniową. **Hiperpłaszczyzną liniową przestrzeni** V nazywamy każdą podprzestrzeń przestrzeni V o wymiarze $n - 1$.

Twierdzenie 7.32. *Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n i niech V_1 będzie podprzestrzenią wymiaru k. Wówczas V_1 jest częścią wspólną $n - k$ hiperpłaszczyzn liniowych przestrzeni V.*

Dowód. Niech $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ będzie bazą podprzestrzeni V_1. Z twierdzenia Steinitza o wymianie możemy ją uzupełnić do bazy $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\}$ przestrzeni V. Niech $W_i = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_{k+i-1}, \alpha_{k+i+1}, \ldots, \alpha_n)$ dla $i = 1, \ldots, n - k$. Wówczas $W_1, \ldots, W_{n-k}$ są hiperpłaszczyznami zawierającymi V_1, skąd $V_1 \subseteq W_1 \cap \ldots \cap W_{n-k}$. Niech $\alpha \in W_1 \cap \ldots \cap W_{n-k}$. Wtedy istnieją $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$. Dla liczb naturalnych $i \leq n - k$ mamy, że $\alpha \in W_i$, więc wektor α można przedstawić w postaci $\alpha = a_{i1} \circ \alpha_1 + \ldots +$

$a_{i\,k+i-1} \circ \alpha_{k+i-1} + a_{i\,k+i+1} \circ \alpha_{k+i+1} + \ldots + a_{in} \circ \alpha_n$. Z jednoznaczności przedstawienia wektora α w postaci kombinacji liniowej wektorów bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ wynika, że $a_{k+i} = 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n-k$. Wobec tego $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_k \circ \alpha_k \in V_1$. Zatem $W_1 \cap \ldots \cap W_{n-k} \subseteq V_1$ i ostatecznie $V_1 = W_1 \cap \ldots \cap W_{n-k}$. □

Twierdzenie 7.33. *Niech l będzie liczbą naturalną. Niech $V_1, \ldots, V_l$ będą hiperpłaszczyznami n-wymiarowej przestrzeni liniowej V. Wówczas $\dim(V_1 \cap \ldots \cap V_l) \geq n - l$.*

Dowód. Dla $l = 1$ teza jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnego naturalnego $l = k$ i niech $V_1, \ldots, V_{k+1}$ będą hiperpłaszczyznami przestrzeni V. Z założenia indukcyjnego wynika, że $\dim(V_1 \cap \ldots \cap V_k) \geq n - k$, a z wniosku 7.26 otrzymujemy $\dim(V_1 \cap \ldots \cap V_k \cap V_{k+1}) \geq \dim(V_1 \cap \ldots \cap V_k) + n - 1 - n$. Zatem $\dim(V_1 \cap \ldots \cap V_k \cap V_{k+1}) \geq n - k + n - 1 - n = n - (k+1)$. Z zasady indukcji wynika zatem, że nasze twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej l. □

Z twierdzeń 7.32 i 7.33 wynika od razu następujący

Wniosek 7.34. *Każda k-wymiarowa podprzestrzeń W n-wymiarowej przestrzeni liniowej V daje się przedstawić jako przecięcie $n - k$, ale nie mniejszej liczby hiperpłaszczyzn liniowych.* □

5 Podprzestrzenie przestrzeni współrzędnych

Twierdzenie 7.35. *Podprzestrzeń W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wyznaczona przez równanie $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$, gdzie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i co najmniej jeden ze współczynników $a_1, \ldots, a_n$ jest różny od zera, jest hiperpłaszczyzną liniową.*

Dowód. Załóżmy, że współczynnik $a_i \neq 0$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$. Podprzestrzeń W jest różna od $\mathbb{R}^n$, gdyż wektor ε_i nie jest rozwiązaniem rozpatrywanego równania, a stąd $\dim W \leq n - 1$. Dla dowodu równości $\dim W = n - 1$ wystarczy więc wskazać $n - 1$ liniowo niezależnych rozwiązań równania $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$. Łatwo sprawdzić, że wektory $\varepsilon_1 - \frac{a_1}{a_i} \circ \varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_{i-1} - \frac{a_{i-1}}{a_i} \circ \varepsilon_i, \varepsilon_{i+1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} \circ \varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_n - \frac{a_n}{a_i} \circ \varepsilon_i$ czynią zadość temu żądaniu. □

Z twierdzeń 7.26 i 7.35 wynika od razu następujący

Wniosek 7.36. *Podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wyznaczona przez układ m równań jednorodnych liniowych ma wymiar nie mniejszy niż $n - m$.* □

Twierdzenie 7.37. *Każda hiperpłaszczyzna liniowa W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ jest wyznaczona przez pewne równanie $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$, gdzie $a_1, \ldots, a_n \in K$.*

Dowód. Niech wektory $\alpha_i = [a_{i1}, \ldots, a_{in}]$ dla $i = 1, \ldots, n-1$ tworzą bazę hiperpłaszczyzny W i niech V będzie podprzestrzenią opisaną przez układ równań

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{n-1\,n}x_n & = & 0 \end{array} \right. . \tag{3}$$

Z wniosku 7.36 wynika, że $\dim V \geq n - (n-1) = 1$, a więc podprzestrzeń V zawiera niezerowy wektor. Niech $[b_1, \ldots, b_n]$ będzie niezerowym wektorem podprzestrzeni V. Przestrzeń V_1 wyznaczona przez równanie $b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n = 0$ jest na mocy twierdzenia 7.35 hiperpłaszczyzną liniową. Ponadto z określenia wektora $[b_1, \ldots, b_n]$ wynika, że wektory α_j dla $j = 1, \ldots, n-1$ należą do hiperpłaszczyzny V_1, a zatem $W = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \subseteq V_1$. Ponieważ $\dim W = \dim V_1 = n - 1$, więc z twierdzenia 7.22, $W = V_1$. $\square$

Z twierdzenia 7.37 i z wniosku 7.34 mamy natychmiast następujący

Wniosek 7.38. *Każda k-wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ jest wyznaczona przez układ złożony z $n-k$, ale nie mniej, równań liniowych jednorodnych.* $\square$