Wykład 9
Przekształcenia liniowe i ich zastosowania

1 Przekształcenia liniowe i ich własności

Definicja 9.1. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi. Przekształcenie $f\colon V \to W$ spełniające warunki:
(I) $\forall_{\alpha,\beta\in V}\ f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta)$ oraz (II) $\forall_{\alpha\in V}\forall_{a\in\mathbb{R}}\ f(a\circ\alpha) = a\circ f(\alpha)$
nazywamy **przekształceniem liniowym** przestrzeni V w przestrzeń W.

Stwierdzenie 9.2. *Złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.*
Dowód. Niech $f\colon V\to W$ i $g\colon W\to U$ będą przekształceniami liniowymi. Wówczas dla dowolnych $\alpha,\beta\in V$ jest $(g\circ f)(\alpha+\beta) = g(f(\alpha+\beta)) = g(f(\alpha)+f(\beta)) = g(f(\alpha))+g(f(\beta)) = (g\circ f)(\alpha)+(g\circ f)(\beta)$ oraz dla dowolnych $\alpha\in V$, $a\in\mathbb{R}$ jest: $(g\circ f)(a\circ\alpha) = g(f(a\circ\alpha)) = g(a\circ f(\alpha)) = a\circ g(f(\alpha)) = a\circ(g\circ f)(\alpha)$. Zatem $g\circ f$ jest przekształceniem liniowym. $\square$

Stwierdzenie 9.3. *Niech $f\colon V\to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej V w przestrzeń liniową W. Wówczas:*
(i) $f(\theta)=\theta$,
(ii) $f(-\alpha) = -f(\alpha)$ dla każdego $\alpha\in V$,
(iii) $f(\alpha-\beta) = f(\alpha)-f(\beta)$ dla dowolnych $\alpha,\beta\in V$,
(iv) $f(a_1\circ\alpha_1+\ldots+a_n\circ\alpha_n) = a_1\circ f(\alpha_1)+\ldots+a_n\circ f(\alpha_n)$ dla dowolnych $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in V$ i dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$.
Dowód. (i). Na mocy (II) jest $f(\theta) = f(0\circ\theta) = 0\circ f(\theta) = \theta$.
(ii). Na mocy (I) i (i) mamy, że $f(\alpha)+f(-\alpha) = f(\alpha+(-\alpha)) = f(\theta) = \theta$, więc $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.
(iii). Na mocy (I) i (ii) jest $f(\alpha-\beta) = f(\alpha+(-\beta)) = f(\alpha)+f(-\beta) = f(\alpha)+(-f(\beta)) = f(\alpha)-f(\beta)$.
(iv). Stosujemy indukcję względem n. Dla $n=1$ teza wynika z (II). Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnego naturalnego n i niech $a_1,\ldots,a_{n+1}\in\mathbb{R}$ oraz $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}\in V$. Wtedy na mocy (I), (II) i założenia indukcyjnego mamy, że $f(a_1\circ\alpha_1+\ldots+a_{n+1}\circ\alpha_{n+1}) = f((a_1\circ\alpha_1+\ldots+a_n\circ\alpha_n)+a_{n+1}\circ\alpha_{n+1}) = f(a_1\circ\alpha_1+\ldots+a_n\circ\alpha_n)+f(a_{n+1}\circ\alpha_{n+1}) = a_1\circ f(\alpha_1)+\ldots+a_n\circ f(\alpha_n)+a_{n+1}\circ f(\alpha_{n+1})$. Zatem teza zachodzi dla liczby $n+1$. $\square$

Stwierdzenie 9.4. *Niech $f\colon V\to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej V w przestrzeń liniową W. Wówczas zbiór $Ker(f) = \{\alpha\in V : f(\alpha)=\theta\}$ zwany* **jądrem** *f jest podprzestrzenią przestrzeni V. Ponadto f jest różnowartościowe (tzn. f jest* **monomorfizmem liniowym***) wtedy i tylko wtedy, gdy $Ker(f) = \{\theta\}$.*
Dowód. Na mocy stwierdzenia 9.3(i) mamy, że $\theta\in Ker(f)$. Niech $a\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\in Ker(f)$. Wtedy na mocy (I) $f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta) = \theta+\theta = \theta$, więc $\alpha+\beta\in Ker(f)$ oraz na mocy (II) $f(a\circ\alpha) = a\circ f(\alpha) = a\circ\theta = \theta$, skąd $a\circ\alpha\in Ker(f)$. Zatem $Ker(f)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Załóżmy, że f jest różnowartościowe i niech $\alpha \in Ker(f)$. Wtedy $f(\alpha) = \theta$. Ale na mocy stwierdzenia 9.3(i) jest $\theta = f(\theta)$, więc $f(\alpha) = f(\theta)$, skąd $\alpha = \theta$. Zatem $Ker(f) = \{\theta\}$. Na odwrót, załóżmy, że $Ker(f) = \{\theta\}$ i weźmy dowolne $\alpha, \beta \in V$ takie, że $f(\alpha) = f(\beta)$. Wtedy na mocy stwierdzenia 9.3(iii) jest $\theta = f(\alpha) - f(\beta) = f(\alpha - \beta)$, czyli $\alpha - \beta \in Ker(f)$. Zatem $\alpha - \beta = \theta$, skąd $\alpha = \beta$ i f jest monomorfizmem. □

Uwaga 9.5. Każda podprzestrzeń W przestrzeni liniowej V jest jądrem pewnego przekształcenia liniowego $f\colon V \to V$. Rzeczywiście, z twierdzenia 7.30 istnieje podprzestrzeń U przestrzeni V taka, że $V = W \oplus U$ i każdy wektor $\alpha \in V$ można zapisać jednoznacznie w postaci $\alpha = \beta + \gamma$ dla pewnych $\beta \in W$ i $\gamma \in U$. Przyjmijmy: $f(\alpha) = \gamma$. Weźmy dowolne $\alpha_1, \alpha_2 \in V$, $a \in \mathbb{R}$. Wtedy istnieją $\beta_1, \beta_2 \in W$, $\gamma_1, \gamma_2 \in U$ takie, że $\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1$ i $\alpha_2 = \beta_2 + \gamma_2$, skąd $\alpha_1 + \alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2) + (\gamma_1 + \gamma_2)$ oraz $\beta_1 + \beta_2 \in W$ i $\gamma_1 + \gamma_2 \in U$. Zatem $f(\alpha_1 + \alpha_2) = \gamma_1 + \gamma_2 = f(\alpha_1) + f(\alpha_2)$. Ponadto $a \circ \alpha_1 = a \circ \beta_1 + a \circ \gamma_1$ oraz $a \circ \beta_1 \in W$ i $a \circ \gamma_1 \in U$, więc $f(a \circ \alpha_1) = a \circ \gamma_1 = a \circ f(\alpha_1)$. Stąd f jest przekształceniem liniowym. Nazywamy je **rzutem przestrzeni V na podprzestrzeń U wzdłuż podprzestrzeni W**. Dla $\beta \in W$ mamy, że $\beta = \beta + \theta$ i $\theta \in U$, więc $f(\beta) = \theta$, skąd $W \subseteq Ker(f)$. Jeśli zaś $\alpha \in Ker(f)$, to istnieją $\beta \in W$ i $\gamma \in U$ takie, że $\alpha = \beta + \gamma$ i $\theta = f(\alpha) = \gamma$, skąd $\alpha = \beta \in W$. Zatem ostatecznie $W = Ker(f)$. Łatwo też zauważyć, że $Im(f) = U$. □

Stwierdzenie 9.6. *Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej V w przestrzeń liniową W. Wówczas zbiór $Im(f) = f(V) = \{f(\alpha) : \alpha \in V\}$ zwany* **obrazem** *f jest podprzestrzenią przestrzeni W.*

Dowód. Ze stwierdzenia 9.3(i) mamy, że $\theta = f(\theta) \in f(V)$. Niech $\alpha, \beta \in f(V)$. Wtedy istnieją $\alpha_1, \beta_1 \in V$ takie, że $\alpha = f(\alpha_1)$ i $\beta = f(\beta_1)$. Zatem $\alpha + \beta = f(\alpha_1) + f(\beta_1) = f(\alpha_1 + \beta_1) \in f(V)$ oraz dla $a \in \mathbb{R}$: $a \circ \alpha = a \circ f(\alpha_1) = f(a \circ \alpha_1) \in f(V)$. Zatem $f(V)$ jest podprzestrzenią przestrzeni W. □

Stwierdzenie 9.7. *Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej V w przestrzeń liniową W. Wówczas dla dowolnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$: jeżeli wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne, to wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ też są liniowo niezależne. Jeżeli dodatkowo f jest monomorfizmem, to wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne.*

Dowód. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$. Załóżmy, że wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne. Weźmy dowolne $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takie, że $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \theta$. Wtedy na mocy stwierdzenia 9.3 mamy, że $a_1 \circ f(\alpha_1) + \ldots + a_n \circ f(\alpha_n) = \theta$, skąd z lnz wektorów $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ jest $a_1 = \ldots = a_n = 0$, czyli wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ też są liniowo niezależne.

Niech teraz dodatkowo f będzie monomorfizmem. Załóżmy, że wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są lnz i weźmy dowolne $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takie, że $a_1 \circ f(\alpha_1) + \ldots + a_n \circ f(\alpha_n) = \theta$. Wtedy ze stwierdzenia 9.3 mamy, że $f(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = f(\theta)$, skąd $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \theta$. Zatem z lnz wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wynika, że $a_1 = \ldots = a_n = 0$, czyli wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne. □

Definicja 9.8. Przekształcenie liniowe $f\colon V \to W$ nazywamy **epimorfizmem**, jeżeli $f(V) = W$ (tzn. f jest "na"). Przekształcenie liniowe $f\colon V \to V$ przestrzeni V w siebie nazywamy

endomorfizmem przestrzeni V.

Uwaga 9.9. Z tych określeń wynika od razu, że izomorfizm liniowy jest to taki monomorfizm, który jest jednocześnie epimorfizmem.

Stwierdzenie 9.10. *Niech $f\colon V \to W$ będzie izomorfizmem przestrzeni liniowych V i W. Jeżeli wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni V, to wektory $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ tworzą bazę przestrzeni W.*

Dowód. Ze stwierdzenia 9.7 wynika od razu, że wektory $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne. Weźmy dowolne $\beta \in W$. Wtedy istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\beta = f(\alpha)$. Zatem istnieją $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n$, skąd na mocy stwierdzenia 9.3 jest, że $\beta = a_1 \circ f(\alpha_1) + \dots + a_n \circ f(\alpha_n)$. Zatem wektory $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ generują przestrzeń W i są liniowo niezależne, czyli tworzą bazę przestrzeni W. □

Twierdzenie 9.11. *Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Jeżeli przestrzeń V jest skończenie wymiarowa, to przestrzeń $Im(f)$ też jest skończenie wymiarowa i zachodzi wzór:*

$$\dim V = \dim Ker(f) + \dim Im(f).$$

Dowód. Z twierdzenia 7.30 istnieje podprzestrzeń U przestrzeni V taka, że $Ker(f) \oplus U = V$ i każdy wektor $\alpha \in V$ można jednoznacznie zapisać w postaci $\alpha = \beta + \gamma$ dla pewnych $\beta \in Ker(f)$ i $\gamma \in U$. Stąd $f(\alpha) = f(\beta) + f(\gamma) = \theta + f(\gamma) = f(\gamma)$. Zatem $Im(f) = f(U)$, czyli przekształcenie liniowe $f|U$ jest "na". Weźmy dowolne $\gamma \in Ker(f|U)$. Wtedy $\gamma \in U$ i $\gamma \in Ker(f)$, więc $\gamma \in Ker(f) \cap U = \{\theta\}$, skąd $\gamma = \theta$. Zatem ze stwierdzenia 9.4, $f|U$ jest monomorfizmem i ostatecznie $f|U\colon U \to Im(f)$ jest izomorfizmem. Zatem z twierdzenia 9.10, $\dim(Im(f)) = \dim(U)$. Stąd przestrzeń $Im(f)$ też jest skończenie wymiarowa. Ale z twierdzenia 7.26, $\dim(V) = \dim Ker(f) + \dim(U)$, gdyż $\dim(Ker(f) \cap U) = 0$, więc $\dim V = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$. □

Twierdzenie 9.12. *Niech wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V i niech $\beta_1, \dots, \beta_n$ będą dowolnymi wektorami przestrzeni liniowej W. Wówczas istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $f\colon V \to W$ takie, że $f(\alpha_i) = \beta_i$ dla każdego $i = 1, \dots, n$. Ponadto takie f jest dane wzorem:*

$$f(a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n) = a_1 \circ \beta_1 + \dots + a_n \circ \beta_n \tag{1}$$

dla $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Przekształcenie f jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\beta_1, \dots, \beta_n$ są liniowo niezależne. Ponadto f jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\beta_1, \dots, \beta_n$ generują przestrzeń W oraz f jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\beta_1, \dots, \beta_n$ tworzą bazę przestrzeni W.

Dowód. Dla przekształcenia f danego wzorem (1) mamy, że $f(\alpha_i) = \beta_i$ przy $i = 1, \dots, n$. Weźmy dowolne $\alpha, \beta \in V$ i dowolne $a \in \mathbb{R}$. Wtedy istnieją $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n$ oraz $\beta = b_1 \circ \alpha_1 + \dots + b_n \circ \alpha_n$. Zatem $f(\alpha + \beta) = f((a_1 + b_1) \circ \alpha_1 + \dots + (a_n + b_n) \circ \alpha_n) = (a_1 + b_1) \circ \beta_1 + \dots + (a_n + b_n) \circ \beta_n = (a_1 \circ \beta_1 + \dots + a_n \circ \beta_n) + (b_1 \circ \beta_1 + \dots + b_n \circ \beta_n) = f(\alpha) + f(\beta)$ oraz $f(a \circ \alpha) = f((aa_1) \circ \alpha_1 + \dots + (aa_n) \circ \alpha_n) = (aa_1) \circ \beta_1 + \dots + (aa_n) \circ \beta_n =$

$a \circ (a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n) = a \circ f(\alpha)$. Zatem f jest szukanym przekształceniem liniowym. Jeżeli $g\colon V \to W$ jest przekształceniem liniowym takim, że $g(\alpha_i) = \beta_i$ dla $i = 1, \ldots, n$, to ze stwierdzenia 9.3 mamy, że $g(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = a_1 \circ g(\alpha_1) + \ldots + a_n \circ g(\alpha_n) = a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n = f(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n)$ dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Ponieważ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V, więc stąd $g = f$.

Jeżeli f jest różnowartościowe, to na mocy stwierdzenia 9.7 wektory $\beta_1 = f(\alpha_1), \ldots, \beta_n = f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne. Na odwrót, załóżmy, że wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ są liniowo niezależne. Niech $\alpha \in Ker(f)$. Wtedy istnieją $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$, skąd $\Theta = f(\alpha) = a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n$, czyli $a_1 = \ldots = a_n = 0$ i $\alpha = \Theta$. Zatem na mocy stwierdzenia 9.4 f jest monomorfizmem.

Jeżeli f jest epimorfizmem, to dla każdego $\beta \in W$ istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\beta = f(\alpha)$. Ale $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$ dla pewnych $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, więc ze wzoru (1), $\beta = a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n$, czyli wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ generują przestrzeń W. Na odwrót, załóżmy, że wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ generują przestrzeń W. Weźmy dowolne $\beta \in W$. Wtedy istnieją $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takie, że $\beta = a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n = f(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n)$, czyli f jest epimorfizmem.

Ostatnia część twierdzenia wynika z jego pierwszej części. □

Z twierdzenia 9.12 wynika od razu następujące, bardzo ważne w algebrze liniowej twierdzenie, pokazujące kluczową rolę przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wśród wszystkich przestrzeni skończenie wymiarowych.

Twierdzenie 9.13. *Skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe V i W są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam wymiar. Jeśli wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni V, zaś wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tworzą bazę przestrzeni W, to istnieje dokładnie jeden taki izomorfizm $f\colon V \to W$, że $f(\alpha_i) = \beta_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. W szczególności każda n-wymiarowa przestrzeń liniowa jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbb{R}^n$.*

2 Przykłady i zastosowania przekształceń liniowych

Przykład 9.14. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi. Wówczas przekształcenie $f\colon V \to W$ dane wzorem $f(\alpha) = \theta$ dla $\alpha \in V$ jest przekształceniem liniowym, bo dla $\alpha, \beta \in V$, $a \in \mathbb{R}$: $f(\alpha + \beta) = \theta = \theta + \theta = f(\alpha) + f(\beta)$ oraz $f(a \circ \alpha) = \theta = a \circ \theta = a \circ f(\alpha)$. Przekształcenie to nazywamy **zerowym** lub **trywialnym**. □

Przykład 9.15. Niech V będzie przestrzenią liniową. Niech a będzie dowolną ustaloną liczbą. Wtedy przekształcenie $\phi_a\colon V \to V$ dane wzorem $\phi_a(\alpha) = a \circ \alpha$ dla $\alpha \in V$, jest liniowe, gdyż dla $\alpha, \beta \in V$, $b \in \mathbb{R}$ mamy, że $\phi_a(\alpha + \beta) = a \circ (\alpha + \beta) = a \circ \alpha + a \circ \beta = \phi_a(\alpha) + \phi_a(\beta)$ oraz $\phi_a(b \circ \alpha) = a \circ (b \circ \alpha) = (ab) \circ \alpha = (ba) \circ \alpha = b \circ (a \circ \alpha) = b \circ \phi_a(\alpha)$. To przekształcenie nazywamy **homotetią** o współczynniku a. □

Przykład 9.16. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V. Wówczas przekształcenie $f\colon W \to V$ dane wzorem $f(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in W$ jest oczywiście liniowe. Jest ono ponadto monomorfizmem podprzestrzeni W w przestrzeń V. W szczególności przekształcenie identycznościowe $id_V\colon V \to V$ dane wzorem $id_V(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in V$, jest przekształceniem liniowym. $\square$

Przykład 9.17. Opiszemy wszystkie przekształcenia liniowe $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dla dowolnych ustalonych liczb naturalnych m, n. Ponieważ wektory $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ jest $[x_1, \ldots, x_n] = x_1 \circ \varepsilon_1 + \ldots + x_n \circ \varepsilon_n$, więc na mocy twierdzenia 9.12 wszystkimi przekształceniami liniowymi $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ są jedynie przekształcenia f postaci:

$$f([x_1, \ldots, x_n]) = x_1 \circ \beta_1 + \ldots + x_n \circ \beta_n,$$

dla dowolnych ustalonych $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}^m$. Ale dla $j = 1, \ldots, n$ istnieją $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ takie, że $\beta_j = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}]$, więc stąd otrzymujemy tzw. **wzór analityczny** na dowolne przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$f([x_1, \ldots, x_n]) = [a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n]. \tag{2}$$

Zauważmy ponadto, że jeżeli $a'_{ij} \in \mathbb{R}$ dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ są takie, że przekształcenie f dane wzorem (2) spełnia wzór
$f([x_1, \ldots, x_n]) = [a'_{11}x_1 + \ldots + a'_{1n}x_n, \ldots, a'_{m1}x_1 + \ldots + a'_{mn}x_n]$, to dla $\beta'_j = [a'_{1j}, a'_{2j}, \ldots, a'_{mj}]$, $j = 1, \ldots, n$, będziemy mieli, że $\beta'_j = f(\varepsilon_j) = \beta_j$, czyli $a'_{ij} = a_{ij}$ dla wszystkich i, j. Wynika stąd, że przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest jednoznacznie wyznaczone przez $m \times n$-macierz $A = [a_{ij}]$. Ponadto z definicji mnożenia macierzy mamy, że dla przekształcenia f danego wzorem (2) zachodzi wzór:

$$f([x_1, \ldots, x_n]) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Przy tych oznaczeniach mamy też, że $f(\mathbb{R}^n) = lin(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ oraz wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ możemy traktować jako kolumny macierzy A, więc stąd dla przekształcenia f mamy wzór:

$$\dim Im(f) = r(A). \tag{4}$$

Zatem z twierdzenia 9.11 mamy, że $n = \dim \mathbb{R}^n = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$, więc na mocy wzoru (4):

$$\dim Ker(f) = n - r(A). \tag{5}$$

Zauważmy też, że $[a_1, \ldots, a_n] \in Ker(f)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[a_1, \ldots, a_n]$ jest rozwiązaniem układu jednorodnego

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots + & a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots + & a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots + & a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Wynika stąd następujące

Twierdzenie 9.18. *Zbiór rozwiązań układu jednorodnego (6) o macierzy współczynników A jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej* $\mathbb{R}^n$ *wymiaru* $n - r(A)$. $\square$

Podamy teraz drugi sposób wyznaczania jednorodnego układu równań liniowych o zadanej podprzestrzeni rozwiązań. Niech V będzie dowolną podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$. Wyznaczamy najpierw bazę i wymiar podprzestrzeni V. Niech wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ tworzą bazę podprzestrzeni V. Wtedy $\dim V = s$. W praktyce wyznaczamy bazę V w takiej postaci, aby można było ją uzupełnić w prosty sposób do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^n$ pewnymi wektorami bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_{n-s}$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Na mocy twierdzenia 9.12 istnieje dokładnie jeden epimorfizm $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-s}$ taki, że $f(\alpha_i) = \Theta$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, s$ oraz $f(\beta_j) = \varepsilon_j$ dla $j = 1, \ldots, n-s$. Z określenia f mamy, że $V \subseteq Ker(f)$. Ponadto $\dim Im(f) = \dim \mathbb{R}^{n-s} = n - s$, więc z twierdzenia 9.11 mamy, że $n = \dim \mathbb{R}^n = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$, skąd $\dim Ker(f) = s$. Ale $\dim V = s$ oraz $V \subseteq Ker(f)$, więc stąd $V = Ker(f)$. Pozostaje zatem wyznaczyć wzór analityczny na przekształcenie f i w ten sposób uzyskamy natychmiast żądany układ jednorodny.

Przykład 9.19. Znajdziemy układ jednorodny równań liniowych, którego przestrzenią rozwiązań jest $V = lin([1,-1,1],[1,1,-1])$. Najpierw znajdujemy bazę przestrzeni V:
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{w_2-w_1}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}\cdot w_2}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Zatem bazą przestrzeni V jest $\{[1,-1,1],[0,1,-1]\}$.
Następnie uzupełniamy znalezioną bazę przestrzeni V do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przy pomocy wektora $[0,0,1]$. Istnieje przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takie, że $f([1,-1,1]) = 0$, $f([0,1,-1]) = 0$, $f([0,0,1]) = 1$. Wtedy $f([0,1,0]) = f([0,1,-1]) + f([0,0,1]) = 0 + 1 = 1$ oraz $f([1,0,0]) = f([1,-1,1]) - f([0,1,-1]) = 0 - 0 = 0$. Zatem dla dowolnych $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ mamy, że $f([x_1,x_2,x_3]) = x_1 \cdot f([1,0,0]) + x_2 \cdot f([0,1,0]) + x_3 \cdot f([0,0,1]) = x_2 + x_3$. Ale $\dim(Im\, f) = 1$, więc $\dim(Ker\ f) = 3 - 1 = 2$. Ponadto $V \subseteq Ker\ f$ oraz $\dim(V) = 2$, więc $V = Ker\ f$. Stąd szukanym układem równań jest:

$$x_2 + x_3 = 0. \ \square$$

Przykład 9.20. Znajdziemy układ jednorodny równań liniowych, którego przestrzeń rozwiązań jest generowana przez wektory: $[1,-1,1,-1,1]$, $[1,1,0,0,3]$, $[3,1,1,-1,7]$, $[0,2,-1,1,2]$.

Znajdujemy najpierw bazę podprzestrzeni V generowanej przez wektory: $[1,-1,1,-1,1]$, $[1,1,0,0,3]$, $[3,1,1,-1,7]$, $[0,2,-1,1,2]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{w_2-w_1,\ w_3-3w_1}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{w_2+w_4,\ w_3+w_4}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zatem bazą V jest $\{[1,1,0,0,3],[0,2,-1,1,2]\}$ oraz $\dim V = 2$. Ponieważ nasze wektory mają 5 współrzędnych, więc szukany układ równań będzie się składał z $5-2=3$ równań. Ponadto bazą przestrzeni $\mathbb{R}^5$ jest $\{[1,1,0,0,3],[0,2,-1,1,2],[0,0,1,0,0],[0,0,0,1,0],[0,0,0,0,1]\}$, więc istnieje przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$f([1,1,0,0,3]) = [0,0,0], \tag{7}$$

$$f([0,2,-1,1,2]) = [0,0,0], \tag{8}$$

$$f([0,0,1,0,0]) = [1,0,0], \tag{9}$$

$$f([0,0,0,1,0]) = [0,1,0], \tag{10}$$

$$f([0,0,0,0,1]) = [0,0,1]. \tag{11}$$

Ponieważ wektory $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz należą do $f(\mathbb{R}^5)$, więc $f(\mathbb{R}^5) = \mathbb{R}^3$, czyli $\dim f(\mathbb{R}^5) = 3$. Ale $5 = \dim \mathbb{R}^5 = \dim Ker(f) + \dim f(\mathbb{R}^5)$, więc $\dim Ker(f) = 5-3 = 2$. Ponadto z (7) i (8) mamy, że $V = lin([1,1,0,0,3],[0,2,-1,1,2]) \subseteq Ker(f)$ oraz $\dim V = 2$, więc $V = Ker(f)$. Pozostaje zatem wyznaczyć wzór analityczny na takie przekształcenie f. Niech $\varepsilon_1 = [1,0,0,0,0]$, $\varepsilon_2 = [0,1,0,0,0]$, $\varepsilon_3 = [0,0,1,0,0]$, $\varepsilon_4 = [0,0,0,1,0]$, $\varepsilon_5 = [0,0,0,0,1]$. Wtedy dla dowolnych $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \in \mathbb{R}$:

$$[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] = x_1 \circ \varepsilon_1 + x_2 \circ \varepsilon_2 + x_3 \circ \varepsilon_3 + x_4 \circ \varepsilon_4 + x_5 \circ \varepsilon_5.$$

Zatem z liniowości przekształcenia f mamy, że $f([x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]) = x_1 \circ f(\varepsilon_1) + x_2 \circ f(\varepsilon_2) + x_3 \circ f(\varepsilon_3) + x_4 \circ f(\varepsilon_4) + x_5 \circ f(\varepsilon_5)$.

Ze wzoru (8) mamy, że $2 \circ f(\varepsilon_2) - f(\varepsilon_3) + f(\varepsilon_4) + 2 \circ f(\varepsilon_5) = [0,0,0]$, więc $2 \circ f(\varepsilon_2) - [1,0,0] + [0,1,0] + 2 \circ [0,0,1] = [0,0,0]$, skąd $f(\varepsilon_2) = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1]$.

Ze wzoru (7) mamy, że $f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) + 3 \circ f(\varepsilon_5) = [0,0,0]$, czyli $f(\varepsilon_1) + [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1] + 3 \circ [0,0,1] = [0,0,0]$, skąd $f(\varepsilon_1) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2]$. Stąd
$f([x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]) = x_1 \circ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2] + x_2 \circ [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1] + x_3 \circ [1,0,0] + x_4 \circ [0,1,0] + x_5 \circ [0,0,1] = [-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3, \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4, -2x_1 - x_2 + x_5]$.

Zatem $V = Ker(f)$ jest zbiorem rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}. \ \square$$