

Egzamin z algebry liniowej I 2006

Imię
 Nazwisko

Zad.1	Zad.2	Zad.3	Zad.4	Zad.5	Zad.6	Σ

Zadanie 1. Podaj (w odpowiedniej kolejności) definicje: ciała; ciała liczb zespolonych; przestrzeni liniowej; podprzestrzeni przestrzeni liniowej; układu równań liniowych; liniowej niezależności wektorów α, β, γ ; wyznacznika; macierzy odwrotnej; bazy przestrzeni liniowej; wymiaru przestrzeni liniowej.

Zadanie 2. Sformułuj zasadnicze twierdzenie algebry, wzór de Moivre'a i twierdzenia: Cramera, Cauchy'ego, Laplace'a dla wierszy, o istnieniu i postaci macierzy odwrotnej, twierdzenie opisujące podprzestrzenie przestrzeni K^n ; twierdzenie opisujące elementy podprzestrzeni $\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; twierdzenie o pierwiastkowaniu liczb zespolonych; twierdzenie o znaku złożenia dwóch permutacji.

Zadanie 3. a) Wyznacz wszystkie liczby zespolone z takie, że $z^2 = (\bar{z})^4$.
 b) Przy pomocy liczb zespolonych oblicz $\cos 72^\circ$.

Zadanie 4. a) Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż nad ciałem $\mathbb{Q}$ układ równań:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 9x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 10x_6 = 3 \\ - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 2 \\ - 3x_3 + 2x_4 - 11x_5 - 15x_6 = 1 \end{cases}.$$

b) Obliczając macierz odwrotną do odpowiedniej macierzy wyznaczyć macierz $X \in M_3(\mathbb{R})$, jeśli

$$X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. a) Oblicz wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 7 \\ -\frac{9}{2} & -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -8 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{2}{3} & -1 & -4 \\ -3 & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & -5 \end{vmatrix}.$$

b) Stosując wzory Cramera rozwiąż nad ciałem $\mathbb{C}$ układ równań:

$$\begin{cases} (4+3i)z + (2-i)w = 5-5i \\ (2+i)z + (-2+3i)w = -1+i \end{cases}.$$

Zadanie 6. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie:

$V = \text{lin}([1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 1, 0, 2], [3, 3, 1, 5])$ i $W = \text{lin}([0, 2, 1, 1], [0, 2, 2, 3], [0, 2, 1, 2], [0, 3, 2, 3])$.

Wyznacz bazę i wymiar podprzestrzeni: a) V , b) W , c) $V+W$, d) $V \cap W$.

Ułóż jednorodny układ równań liniowych nad ciałem $\mathbb{R}$, którego przestrzenią rozwiązań jest $V \cap W$.