

Przygotowanie do egzaminu z algebry liniowej część I

Zadanie 1. Rozwiązać następujące równania kwadratowe w liczbach zespolonych:

- (a) $z^2 - 5z + (7 + i) = 0$, (b) $z^2 = 9 + 40i$, (c) $z^2 - 5z + (4 + 10i) = 0$,
 (d) $z^2 - 3z + (3 + i) = 0$, (e) $(4 - 3i)z^2 - (2 + 11i)z - (5 + i) = 0$,
 (f) $z^2 + 2(1 + i)z + 2i = 0$, (g) $z^2 + (1 + 4i)z - (5 + i) = 0$, (h) $z^2 + (2 - i)z - 1 - 7i = 0$.

Zadanie 2. Znaleźć takie liczby rzeczywiste a, b , aby zachodziły równości:

- (a) $a(2 + 3i) = b(4 - 5i) = 6 - 2i$, (b) $a(-\sqrt{2} + i) + b(3\sqrt{2} + 5i) = 8i$,
 (c) $a(4 - 3i)^2 + b(1 + i)^2 = 7 - 12i$, (d) $\frac{a}{2-3i} + \frac{b}{3+2i} = 1$, (e) $a\frac{2+i}{3-i} + b\left(\frac{4-i}{1-3i}\right)^2 = 1 + i$,
 (f) $\frac{2a-3i}{5-3i} + \frac{3b+2i}{3-5i} = 0$.

Zadanie 3. Stosując wzory Cramera rozwiązać nad ciałem $\mathbf{C}$ układy równań:

- (a)
$$\begin{cases} 2(2+i)z - i(3+2i)w = 5+4i \\ (3-i)z + 2(2+i)w = 2(1+3i) \end{cases},$$
 (b)
$$\begin{cases} (4-3i)z + (2+i)w = 5(1+i) \\ (2-i)z - (2+3i)w = -(1+i) \end{cases},$$

 (c)
$$\begin{cases} \frac{z}{2-i} + \frac{w}{1+i} = 2 \\ \frac{5z}{(2-i)^2} + \frac{2w}{(1+i)^2} = 3 \end{cases}.$$

Zadanie 4. Przedstawić w postaci trygonometrycznej (bez pomocy tablic) następujące liczby zespolone:

- (a) $1, -1, i, -i$, (b) $1+i, 1-i, -1+i, -1-i$, (c) $1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}, -1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}$,
 (d) $\sqrt{3}+i, \sqrt{3}-i, -\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i$, (e) $\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, (f) $\sqrt{6}-\sqrt{2}+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

Zadanie 5. Wykonać działania stosując przedstawienie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej:

- (a) $(1+i)^{31}(1+i\sqrt{3})^{71}$, (b) $\frac{(1-i)^{47}}{(-1+i\sqrt{3})^{92}}$, (c) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

Zadanie 6. Znajdź wszystkie liczby zespolone z takie, że

- (a) $z^6 = 1$, (b) $z^7 = \bar{z}$, (c) $z^5 = 1 + i$.

Zadanie 7. Nad ciałem $\mathbf{R}$ obliczyć rzędy podanych macierzy:

- (a)
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix},$$
 (b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix},$$
 (c)
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

 (d)
$$\begin{bmatrix} 377 & 259 & 481 & 407 \\ 19 & 133 & 247 & 209 \\ 25 & 175 & 325 & 275 \end{bmatrix},$$
 (e)
$$\begin{bmatrix} 1241 & 381 & 273 & -165 \\ 134 & -987 & 562 & 213 \\ 702 & 225 & -1111 & 49 \end{bmatrix},$$

$$(f) \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}, (g) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, (h) \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8. W zależności od parametru a obliczyć nad ciałem $\mathbf{R}$ rząd macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 2 & 1 & a & a^2 \\ 2 & 2 & 1 & a \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, (b) \begin{bmatrix} a+1 & a^2+1 & a^2 \\ 3a-1 & 3a^2-1 & a^2+2a \\ a-1 & a^2-1 & a \end{bmatrix}, (c) \begin{bmatrix} 3+2a & 1+3a & a & a-1 \\ 3a & 3+2a & a & a-1 \\ 3a & 3a & 3 & a-1 \\ 3a & 3a & a & a-1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9. Stosując wzory Cramera rozwiązać nad ciałem $\mathbf{Q}$ następujące układy równań liniowych o niewiadomych x_1, x_2, x_3, x_4 i macierzach rozszerzonych postaci:

$$(a) \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array} \right], (b) \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{array} \right], (c) \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & -6 \\ 6 & 8 & 1 & 5 & -8 \\ 3 & 5 & 3 & 7 & -8 \end{array} \right],$$

$$(d) \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & 9 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right], (e) \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -6 & 3 & -1 \\ 7 & -4 & 2 & -15 & -32 \\ 1 & -2 & -4 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -6 & -8 \end{array} \right], (f) \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 5 & -2 & 4 & -4 \\ 9 & -1 & 4 & -1 & 13 \\ 3 & 4 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & -9 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$(g) \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 8 & -1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right].$$

Zadanie 10. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać nad ciałem $\mathbf{R}$ układy równań liniowych o niewiadomych x_1, x_2, x_3, x_4 i macierzach rozszerzonych postaci:

$$(a) \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 5 & 12 & 10 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \end{array} \right], (b) \left[\begin{array}{cccc|c} -9 & 6 & 7 & 10 & 3 \\ -6 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \end{array} \right], (c) \left[\begin{array}{cccc|c} -9 & 10 & 3 & 7 & 7 \\ -4 & 7 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & -4 & -6 & 3 \end{array} \right],$$

$$(d) \left[\begin{array}{cccc|c} 12 & 9 & 3 & 10 & 13 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 2 & 5 & 7 \end{array} \right], (e) \left[\begin{array}{cccc|c} -6 & 9 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ -4 & 6 & 4 & 3 & 3 \end{array} \right], (f) \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{array} \right].$$

Zadanie 11. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać nad ciałem $\mathbf{R}$ układy równań liniowych o niewiadomych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 posiadające macierze rozszerzone postaci:

$$\begin{aligned} & \text{(a)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 12 & 14 & -15 & 23 & 27 & 5 \\ 16 & 18 & -22 & 29 & 37 & 8 \\ 18 & 20 & -21 & 32 & 41 & 9 \\ 10 & 12 & -16 & 20 & 23 & 4 \end{array} \right], \text{ (b)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 12 & -18 & 102 & -174 & -216 & 132 \\ 14 & -21 & 119 & -203 & -252 & 154 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 & -3 \end{array} \right], \\ & \text{(c)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right], \text{ (d)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 13 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right], \text{ (e)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Zadanie 12. W zależności od parametru p rozwiązać nad ciałem $\mathbf{R}$ następujące układy równań liniowych:

$$\begin{aligned} & \text{(a)} \begin{cases} (2p+1)x + (p-3)y = p+1 \\ (p+2)x - 2y = 2p \end{cases}, \text{ (b)} \begin{cases} x + py + z = 1 \\ 2x + y + z = p \\ x + y + pz = p^2 \end{cases}, \\ & \text{(c)} \begin{cases} px + y + z = 1 \\ x + y - z = p \\ x - y + pz = 1 \end{cases}, \text{ (d)} \begin{cases} 2px + 4y - pz = 4 \\ 2x + y + pz = 1 \\ (4+2p)x + 6y + pz = 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Zadanie 13. Obliczyć następujące wyznaczniki:

$$\begin{aligned} & \text{(a)} \begin{vmatrix} 202 & 44 & 122 \\ 250 & 55 & 153 \\ 50 & 11 & 31 \end{vmatrix}, \text{ (b)} \begin{vmatrix} 4+7i & 2+4i & 4-3i \\ 2+7i & 4i & 3-4i \\ 3+6i & 1+3i & 4-4i \end{vmatrix}, \text{ (c)} \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}, \\ & \text{(d)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \text{ (e)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}, \text{ (f)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \text{ (g)} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$(h) \begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}, (i) \begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 10 \\ 105 & 84 & 70 & 60 \\ 168 & 140 & 120 & 105 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 14. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}, (b) B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (c) C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix},$$

$$(d) D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, (e) E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (f) F = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 15. Rozwiązać równania macierzowe:

$$(a) X^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, (b) X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{bmatrix},$$

$$(c) X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, (d) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix},$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 16. Znajdź bazę podprzestrzeni V przestrzeni liniowej $\mathbf{R}^4$ generowanej przez wektory: $[-1, 4, -3, -2]$, $[3, -7, 5, 3]$, $[3, -2, 1, 0]$, $[-4, 1, 0, 1]$.

Zadanie 17. Niech w przestrzeni liniowej $\mathbf{R}^4$: $V = L([0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 2], [-2, 0, 1, 1])$ oraz $W = L([-1, 3, 2, -1], [1, 1, 0, -1])$. Wyznaczyć bazę i wymiar podprzestrzeni: V , W , $V \cap W$, $V + W$.

Zadanie 18. Niech w przestrzeni liniowej $\mathbf{R}^4$: $V = L([1, 1, 1, 1], [1, 1, -1, -1], [1, -1, 1, -1])$ oraz $W = L([1, -1, -1, -1], [2, -2, 0, 0], [3, -1, 1, 1])$. Wyznaczyć bazę i wymiar podprzestrzeni: V , W , $V + W$, $V \cap W$.

Zadanie 19. W zależności od wartości parametru $a \in \mathbf{R}$ obliczyć wymiar podprzestrzeni V przestrzeni $\mathbf{R}^3$ generowanej przez wektory $[2, 1, a]$, $[1, 2, 3]$, $[-5, a - 2, 1]$.

Zadanie 20. Znajdź układ równań liniowych, którego zbiorem rozwiązań jest przestrzeń $V = L([1, -1, 1, -1, 1], [1, 1, 0, 0, 3], [3, 1, 1, -1, 7], [0, 2, -1, 1, 2])$.

Zadanie 21. Znajdź układ równań liniowych, którego zbiorem rozwiązań jest

przestrzeń $V = L([1, 2, -1], [0, 1, 1], [1, 0, -3], [1, 1, -2])$.

Zadanie 22. Znajdź układ równań liniowych, którego zbiorem rozwiązań jest przestrzeń $V = L([-3, 1, 5, 3, 2], [2, 3, 0, 1, 0], [1, 2, 3, 2, 1], [3, -5, -1, -3, -1], [3, 0, 1, 0, 0])$.

Zadanie 23. W zależności od wartości parametru $a \in \mathbf{R}$ obliczyć wymiar podprzestrzeni V przestrzeni liniowej $\mathbf{R}^4$ generowanej przez wektory:

$[3 + 2a, 1 + 3a, a, a - 1], [3a, 3 + 2a, a, a - 1], [3a, 3a, 3, a - 1], [3a, 3a, a, a - 1]$.

Zadanie 24. Znajdź przekształcenie liniowe $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ takie, że $\text{Ker}(f) = L([1, -1, 2])$ oraz $\text{Im}(f) = L([1, 2, 1, -1], [3, 1, 2, 0])$.

Zadanie 25. Znajdź przekształcenie liniowe f przestrzeni $\mathbf{R}^3$ na przestrzeń $\mathbf{R}^2$ takie, że $[1, 1, -1] \in \text{Ker}(f)$.

Zadanie 26. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbf{R}$ w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ wektory: $[a^2 + 1, 3a^2 - 1, a^2 - 1], [a^2, a^2 + 2a, a], [a + 1, 3a - 1, a - 1]$ są liniowo niezależne?