Wyznaczanie macierzy odwrotnej

Zadanie 1. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Obliczamy najpierw wyznacznik macierzy A:
$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 7 - (-4)\cdot 3 = -2$, czyli $\det(A) = -2 \neq 0$, więc A^{-1} istnieje.

Teraz wyznaczamy dopełnienia algebraiczne wszystkich wyrazów macierzy A:
$d_{11} = (-1)^{1+1}\cdot 7 = 7$, $d_{12} = (-1)^{1+2}\cdot(-4) = 4$,
$d_{21} = (-1)^{2+1}\cdot 3 = -3$, $d_{22} = (-1)^{2+2}\cdot(-2) = -2$.

Tworzymy macierz dopełnień $D = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$. Zatem macierzą odwrotną do macierzy A jest macierz $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot D^T = (-\frac{1}{2})\cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, czyli ostatecznie

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Obliczamy najpierw wyznacznik macierzy A:
$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 5 & 7 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & -2 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right. = -18 + 100 - 84 - 105 + 16 + 90 = -1$, czyli $\det(A) = -1 \neq 0$, więc A^{-1} istnieje.

Teraz obliczamy dopełnienia algebraiczne wszystkich wyrazów macierzy A:
$d_{11} = (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1$, $d_{12} = (-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(-18 - 20) = 38$,
$d_{13} = (-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27$.

$d_{21} = (-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 + 14) = 1$, $d_{22} = (-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 35 = -41$,
$d_{23} = (-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 25) = 29$.

$d_{31} = (-1)^{3+1}\cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1$, $d_{32} = (-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 42) = -34$, $d_{33} = (-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24$.

Tworzymy macierz dopełnień $D = \begin{bmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & -34 & -24 \end{bmatrix}$. Zatem $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot D^T = (-1)\cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & -34 \\ -27 & 29 & -24 \end{bmatrix}$, czyli ostatecznie

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & 34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. I Sposób. Stosujemy metodę wyznacznikową.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} \overset{w_1-2w_3,\ w_2-3w_3}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \left| \begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 6 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -6 & 1 & -2 \end{array} \right| =$$

$-(-12+5+12+12-10-6) = -1$, czyli $\det(A) = -1 \neq 0$ i A^{-1} istnieje.

Obliczamy teraz dopełnienia algebraiczne wszystkich elementów macierzy A:

$$d_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & -2 \end{array} \right| = -18+0-4-0-6+6 = -22,$$

$$d_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -6 & 1 & -2 \end{array} \right| = -[-12-1-4-2-4+6] = 17,$$

$$d_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right| = -12-3+0-2-0+18 = 1,$$

$$d_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right| = -[-4+3+0-1-0+6] = -4.$$

$$d_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & -2 \end{array} \right| = -[-12+0-8-0-4+18] = 6,$$

$$d_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -6 & 1 & -2 \end{array} \right| = -6-3-8-4-2+18 = -5,$$

$$d_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right| = -[-6-2+0-4-0+12] = 0,$$

$$d_{24} = (-1)^{2+4} \cdot \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right| = -2+2+0-3-0+4 = 1.$$

$$d_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & -2 \end{array} \right| = -12+0-24-0+8+54 = 26,$$

$$d_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -6 & 1 & -2 \end{array} \right| = -[-6+6-16-4+4+36] = -20,$$

$$d_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right. = -18 + 4 + 0 - 12 - 0 + 24 = -2,$$

$$d_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right. = -[-6 + 2 + 0 - 9 - 0 + 8] = 5.$$

$$d_{41} = (-1)^{4+1} \cdot \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right. = -[-2 + 6 + 12 - 4 - 4 + 9] = -17,$$

$$d_{42} = (-1)^{4+2} \cdot \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right. = -1 + 6 + 8 - 4 - 2 + 6 = 13,$$

$$d_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right. = -[-3 + 4 + 8 - 12 - 2 + 4] = 1,$$

$$d_{44} = (-1)^{4+4} \cdot \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right. = 3 + 2 + 6 - 9 - 1 - 4 = -3.$$

Tworzymy macierz dopełnień:

$$D = \begin{bmatrix} -22 & 17 & 1 & -4 \\ 6 & -5 & 0 & 1 \\ 26 & -20 & -2 & 5 \\ -17 & 13 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Wypisujemy macierz odwrotną do macierzy A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot D^T = (-1) \cdot \begin{bmatrix} -22 & 6 & 26 & -17 \\ 17 & -5 & -20 & 13 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \text{ czyli ostatecznie:}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

II Sposób. Stosując operacje elementarne na wierszach macierzy $[A|I_4]$ przekształcimy ją do postaci $[I_4|A^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w_1 - w_4,\ w_2 - 2w_4,\ w_3 - w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 0 & 2 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 14 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w_1 \leftrightarrow w_4}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 14 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 10 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{w_2 - 3w_3,\ w_4 - 2w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{w_2 \leftrightarrow w_3}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{w_3 - 4w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{w_3 \longrightarrow w_4}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right] \overset{(-1)w_3,\ (-1)w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right] \overset{w_1+6w_4,\ w_2-5w_4}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 24 & -6 & -30 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -20 & 5 & 26 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right] \overset{w_1+2w_3,\ w_2-3w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right].$$

Zatem ostatecznie:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$