Egzamin poprawkowy
z algebry liniowej II 2008

Imię ....
Nazwisko ....

Zad.1	Zad.2	Zad.3	Σ

Zadanie 1. Wyznacz macierz Jordana endomorfizmu $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ posiadającego w bazie kanonicznej macierz $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 2. Macierzą endomorfizmu g przestrzeni $\mathbb{R}^4$ w bazie kanonicznej jest

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Wyznacz macierz g w bazie $([1,1,1,1],[1,0,0,0],[0,1,1,0],[0,0,1,-1])$;
(b) Znajdź wzór na B^n w zależności od $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3. (a) Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$ generowaną przez wektory $[2,2,1]$ i $[3,3,1]$. Czy równe są warstwy $[0,1,1]+W$ i $[4,5,2]+W$? Znajdź bazę i wymiar przestrzeni $\mathbb{R}^3/W$.

(b) Podaj określenie przekształcenia liniowego. Czy istnieje endomorfizm liniowy f przestrzeni $\mathbb{R}^6$ taki, że $Ker\ f = Im\ f$? Odpowiedź uzasadnij.

(c) O endomorfizmie $f\colon \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ wiemy, że
1. Jego wielomianem charakterystycznym jest $w_f(x) = (x-2)^3(x-6)^5$ oraz
2. Wymiar podprzestrzeni niezmienniczej wektorów własnych endomorfizmu f odpowiadających wartości własnej 2 jest równy 2.
3. Wymiar podprzestrzeni niezmienniczej wektorów własnych endomorfizmu f odpowiadających wartości własnej 6 jest równy 3.

Wyznacz wszystkie możliwe postacie jakie może przybrać macierz Jordana endomorfizmu f. Podaj warunki konieczne i wystarczające na to aby wyznaczona postać Jordana zachodziła.

(d) Sformułuj twierdzenie Cayleya-Hamiltona i twierdzenie Kroneckera-Capellego.

(e) Endomorfizm f przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{R}$ posiada w bazie (α, β) macierz $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Oblicz: $f(5 \circ \alpha - 3 \circ \beta)$ i wyznacz wymiary podprzestrzeni $Ker\ f$ i $Im\ f$.

(f) Podaj definicję rzędu wierszowego macierzy.