

Przestrzenie liniowe w zadaniach

Zadanie 1. Czy wektor $[3, 4, 4]$ jest kombinacją liniową wektorów $[1, 1, 1]$, $[1, 0, -1]$, $[1, 3, 5]$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

Rozwiązanie. Szukamy $x, y, z \in \mathbb{R}$ takich, że

$$[3, 4, 4] = x \circ [1, 1, 1] + y \circ [1, 0, -1] + z \circ [1, 3, 5].$$

Ale $x \circ [1, 1, 1] + y \circ [1, 0, -1] + z \circ [1, 3, 5] = [x + y + z, x + 3z, x - y + 5z]$, więc z warunku równości wektorów otrzymujemy, że szukane liczby x, y, z spełniają układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 3z = 4 \\ x - y + 5z = 4 \end{cases}.$$

Stosujemy metodę eliminacji Gaussa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{x \leftrightarrow y} \left[\begin{array}{ccc|c} y & x & z & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} y & x & z & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} y & x & z & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

Zatem nasz układ jest sprzeczny i wobec tego wektor $[3, 4, 4]$ nie jest kombinacją liniową wektorów $[1, 1, 1]$, $[1, 0, -1]$, $[1, 3, 5]$.

Zadanie 2. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zbadać wprost z definicji liniową niezależność wektorów: $[1, 2, 1, -2]$, $[2, 3, 1, 0]$, $[1, 2, 2, -3]$.

Rozwiązanie. Weźmy dowolne liczby rzeczywiste a, b, c takie, że

$$a \circ [1, 2, 1, -2] + b \circ [2, 3, 1, 0] + c \circ [1, 2, 2, -3] = [0, 0, 0, 0]. \quad (1)$$

Wtedy $[a + 2b + c, 2a + 3b + 2c, a + b + 2c, -2a - 3c] = [0, 0, 0, 0]$, więc otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 2a + 3b + 2c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \\ -2a - 3c = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

który rozwiążemy metodą eliminacji Gaussa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - w_1, w_4 + 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2, w_4 + 4w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{(-1) \cdot w_2, w_4 + w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Zatem układ (2) ma dokładnie jedno rozwiązanie: $a = 0, b = 0, c = 0$. Stąd jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równość (1), to $a = b = c = 0$. Zatem wektory $[1, 2, 1, -2]$, $[2, 3, 1, 0]$, $[1, 2, 2, -3]$ są liniowo niezależne.

Zadanie 3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zbadać liniową niezależność wektorów: $[1, 1, 2]$, $[-1, 3, 0]$, $[2, 0, 3]$.

Rozwiązanie. Macierzą tego układu wektorów jest $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

I Sposób. Ponieważ $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 9 + 0 + 0 - (12 + 0 - 3) = 0$, więc wektory

$[1, 1, 2]$, $[-1, 3, 0]$, $[2, 0, 3]$ są liniowo zależne.

II Sposób. Obliczamy rząd macierzy A :

$$r(A) \stackrel{w_2 - 3w_1}{=} r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 1 + r \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{w_1 + 2w_2}{=} 1 + r \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 1 + 1 = 2. \text{ Ponieważ}$$

$r(A) < 3$, więc wektory $[1, 1, 2]$, $[-1, 3, 0]$, $[2, 0, 3]$ są liniowo zależne.

Zadanie 4. W przestrzeni $\mathbb{R}^5$ zbadać liniową niezależność wektorów:

$[5, -3, 2, 1, 10]$, $[-1, 8, 1, -4, 7]$, $[2, 1, 9, -3, 6]$, $[1, 3, -5, 9, 11]$.

Rozwiązanie. Macierzą tego układu wektorów jest $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 & 10 \\ -1 & 8 & 1 & -4 & 7 \\ 2 & 1 & 9 & -3 & 6 \\ 1 & 3 & -5 & 9 & 11 \end{bmatrix}$. Obliczamy

rząd macierzy A :

$$r(A) \stackrel{w_1 - 5w_4, w_2 + w_4, w_3 - 2w_4}{=} r \begin{bmatrix} 0 & -18 & 27 & -44 & -45 \\ 0 & 11 & -4 & 5 & 18 \\ 0 & -5 & 19 & -21 & -16 \\ 1 & 3 & -5 & 9 & 11 \end{bmatrix} = 1 + r \begin{bmatrix} -18 & 27 & -44 & -45 \\ 11 & -4 & 5 & 18 \\ -5 & 19 & -21 & -16 \end{bmatrix} \stackrel{k_3 + k_2}{=} \\ 1 + r \begin{bmatrix} -18 & 27 & -17 & -45 \\ 11 & -4 & 1 & 18 \\ -5 & 19 & -2 & -16 \end{bmatrix} \stackrel{w_1 + 17w_2, w_3 + 2w_2}{=} 1 + r \begin{bmatrix} 169 & -74 & 0 & 261 \\ 11 & -4 & 1 & 18 \\ 17 & 11 & 0 & 20 \end{bmatrix} = 2 + r \begin{bmatrix} 169 & -74 & 261 \\ 17 & 11 & 20 \end{bmatrix} =$$

$2 + 2 = 4$, bo macierz $\begin{bmatrix} 169 & -74 & 261 \\ 17 & 11 & 20 \end{bmatrix}$ ma rząd 2, gdyż posiada niezerowy minor $\begin{vmatrix} 169 & -74 \\ 17 & 11 \end{vmatrix} = 169 \cdot 11 + 17 \cdot 74 > 0$ stopnia 2. Zatem rząd macierzy układu czterech wektorów $[5, -3, 2, 1, 10]$, $[-1, 8, 1, -4, 7]$, $[2, 1, 9, -3, 6]$, $[1, 3, -5, 9, 11]$ jest równy 4, czyli te wektory są liniowo niezależne.

Zadanie 5. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zbadać liniową niezależność wektorów:

$[1, 4, 7, 10]$, $[2, 5, 8, 11]$, $[2, 6, 9, 12]$.

Rozwiązanie. Macierzą tego układu wektorów jest $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$.

$$\text{Ale } r(A) \stackrel{\frac{1}{3}w_3}{=} r \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \stackrel{w_1 - w_3, w_2 - 2w_3}{=} r \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 + r \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{w_1 - 2w_2}{=} 1 +$$

$r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 1 + 1 = 2 < 3$, więc wektory $[1, 4, 7, 10]$, $[2, 5, 8, 11]$, $[2, 6, 9, 12]$ są liniowo zależne.

Zadanie 6. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ wektory $[1, 1, 1]$, $[1, a, 2]$, $[2, 3, 4]$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

Rozwiązanie. Macierzą tego układu wektorów jest $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Zatem

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4a + 4 + 3 - 2a - 6 - 4 = 2a - 3. \text{ Stąd } \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{3}{2} \text{ i wektory}$$

$[1, 1, 1]$, $[1, a, 2]$, $[2, 3, 4]$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \neq \frac{3}{2}$.

Zadanie 7. Pokazać, że $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznaczyć bazę i wymiar V .

Rozwiązanie. Zauważmy, że $V = \{[x, y, -x - y] : x, y \in \mathbb{R}\} = \{[x, 0, -x] + [0, y, -y] : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x \circ [1, 0, -1] + y \circ [0, 1, -1] : x, y \in \mathbb{R}\} = L([1, 0, -1], [0, 1, -1])$, więc V jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Ponadto wektory $[1, 0, -1]$, $[0, 1, -1]$ generują V oraz są liniowo niezależne, bo $r \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2$, więc wektory $[1, 0, -1]$, $[0, 1, -1]$ tworzą bazę podprzestrzeni V i wymiar V jest równy 2.

Zadanie 8. Wektory $[2, 3, 4, 5]$, $[3, 4, 8, 9]$ uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez V podprzestrzeń generowaną przez wektory $[2, 3, 4, 5]$, $[3, 4, 8, 9]$. Stosując metodę eliminacji Gaussa na wierszach macierzy tego układu wektorów znajdziemy taką bazę podprzestrzeni V , którą łatwo będzie uzupełnić do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftarrow w_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftarrow w_2 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$. Stąd baza V jest $\{[1, 1, 4, 4], [0, 1, -4, -3]\}$. Zatem $\dim(V) = 2$ i wobec tego wektory $[2, 3, 4, 5]$, $[3, 4, 8, 9]$ są liniowo niezależne. Ponadto wektory $[1, 1, 4, 4]$, $[0, 1, -4, -3]$, $[0, 0, 1, 0]$, $[0, 0, 0, 1]$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$,

bo $r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4$. Zatem wektory $[2, 3, 4, 5]$, $[3, 4, 8, 9]$, $[0, 0, 1, 0]$, $[0, 0, 0, 1]$ tworzą szukaną

bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 9. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni V przestrzeni $\mathbb{R}^4$ generowanej przez wektory: $[-1, 4, -3, -2]$, $[3, -7, 5, 3]$, $[3, -2, 1, 0]$, $[-4, 1, 0, 1]$.

Rozwiązanie. Bazę podprzestrzeni V znajdziemy stosując metodę eliminacji Gaussa na wierszach macierzy A danego układu wektorów. Równoważności $\equiv$ dotyczą teraz zachowywania podprzestrzeni generowanych.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2+3w_1, w_3+3w_1, w_4-4w_1} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 10 & -8 & -6 \\ 0 & -15 & 12 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3-2w_2, w_4+3w_2} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \equiv \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \end{bmatrix}. \text{ Stąd wektory } [-1, 4, -3, -2], [0, 5, -4, -3] \text{ generują podprzestrzeń } V \text{ i są li-}$$

niowo niezależne (bo macierz z nich utworzona ma rząd 2). Zatem bazą V jest $\{[-1, 4, -3, -2], [0, 5, -4, -3]\}$ oraz $\dim(V) = 2$.

Zadanie 10. Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni V przestrzeni $\mathbb{R}^5$ generowanej przez wektory: $[-3, 1, 5, 3, 2]$, $[2, 3, 0, 1, 0]$, $[1, 2, 3, 2, 1]$, $[3, -5, -1, -3, -1]$, $[3, 0, 1, 0, 0]$.

Uzupełnij znaną bazę podprzestrzeni V do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^5$.

Rozwiązanie. Bazę podprzestrzeni V znajdziemy stosując metodę eliminacji Gaussa na wierszach macierzy A danego układu wektorów. Równoważności $\equiv$ dotyczą teraz zachowywania podprzestrzeni generowanych.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1-2w_3, w_4+w_3} \begin{bmatrix} -5 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1+w_2, w_3-2w_2, w_4+w_2} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{w_1+w_5, w_4-2w_5, w_3+w_5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -0 & -4 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftarrow w_3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3+3w_1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3+2w_2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3+4w_2}$$

$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 28 & 12 & 9 \end{bmatrix}$. Zatem bazę podprzestrzeni V tworzą wektory $[-1, 3, -1, 1, 0]$, $[0, 1, 6, 3, 2]$,

$[0, 0, 28, 12, 9]$, skąd $\dim(V) = 3$. Ponieważ $r \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 28 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4$, więc szukaną bazą prze-

strzeni $\mathbb{R}^5$ jest $\{[-1, 3, -1, 1, 0], [0, 1, 6, 3, 2], [0, 0, 28, 12, 9], [0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 1]\}$.

Zadanie 11. Znajdź układ jednorodny równań liniowych, którego zbiorem rozwiązań jest podprzestrzeń V przestrzeni $\mathbb{R}^5$ generowana przez wektory:

$[-3, 1, 5, 3, 2]$, $[2, 3, 0, 1, 0]$, $[1, 2, 3, 2, 1]$, $[3, -5, -1, -3, -1]$, $[3, 0, 1, 0, 0]$.

Rozwiązanie. Z rozwiązania zadania 10 mamy, że wektory $[-1, 3, -1, 1, 0]$, $[0, 1, 6, 3, 2]$, $[0, 0, 28, 12, 9]$ tworzą bazę V oraz wektory $[-1, 3, -1, 1, 0]$, $[0, 1, 6, 3, 2]$, $[0, 0, 28, 12, 9]$, $[0, 0, 0, 1, 0]$, $[0, 0, 0, 0, 1]$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^5$. Istnieje zatem przekształcenie liniowe $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takie, że

$$f([-1, 3, -1, 1, 0]) = [0, 0], \quad (3)$$

$$f([0, 1, 6, 3, 2]) = [0, 0], \quad (4)$$

$$f([0, 0, 28, 12, 9]) = [0, 0], \quad (5)$$

$$f([0, 0, 0, 1, 0]) = [1, 0], \quad (6)$$

$$f([0, 0, 0, 0, 1]) = [0, 1]. \quad (7)$$

Wtedy $f(\mathbb{R}^5) = L([1, 0], [0, 1]) = \mathbb{R}^2$, więc $\dim f(\mathbb{R}^5) = 2$. Ale $\dim \text{Ker}(f) + \dim f(\mathbb{R}^5) = \dim \mathbb{R}^5$, więc $\dim \text{Ker}(f) = 5 - 2 = 3$. Ponadto $V \subseteq \text{Ker}(f)$ i $\dim V = 3$, więc $V = \text{Ker}(f)$. Pozostaje zatem znaleźć wzór analityczny na przekształcenie f . W tym celu zaś wystarczy wyznaczyć $f(\epsilon_k)$ dla $k = 1, 2, 3, 4, 5$, gdzie $\epsilon_1 = [1, 0, 0, 0, 0]$, $\epsilon_2 = [0, 1, 0, 0, 0]$, $\epsilon_3 = [0, 0, 1, 0, 0]$, $\epsilon_4 = [0, 0, 0, 1, 0]$, $\epsilon_5 = [0, 0, 0, 0, 1]$. Ze wzorów (6) i (7) mamy od razu, że $f(\epsilon_4) = [1, 0]$ oraz $f(\epsilon_5) = [0, 1]$. Z liniowości przekształcenia f oraz ze wzoru (5) otrzymujemy, że $28 \circ f(\epsilon_3) + 12 \circ f(\epsilon_4) + 9 \circ f(\epsilon_5) = [0, 0]$, czyli $28 \circ f(\epsilon_3) + 12 \circ [1, 0] + 9 \circ [0, 1] = [0, 0]$, skąd $28 \circ f(\epsilon_3) = [-12, -9]$, więc $f(\epsilon_3) = [-\frac{12}{28}, -\frac{9}{28}]$. Z liniowości f i ze wzoru (4) mamy, że $f(\epsilon_2) + 6 \circ f(\epsilon_3) + 3 \circ f(\epsilon_4) + 2 \circ f(\epsilon_5) = [0, 0]$. Zatem $f(\epsilon_2) + 6 \circ [-\frac{12}{28}, -\frac{9}{28}] + 3 \circ [1, 0] + 2 \circ [0, 1] = [0, 0]$, czyli $f(\epsilon_2) + [-\frac{72}{28}, -\frac{54}{28}] + [\frac{84}{28}, 0] + [0, \frac{56}{28}] = [0, 0]$, więc $f(\epsilon_2) = [-\frac{12}{28}, -\frac{2}{28}]$. Z liniowości f i ze wzoru (3) mamy, że $-f(\epsilon_1) + 3 \circ f(\epsilon_2) - f(\epsilon_3) + f(\epsilon_4) = [0, 0]$. Zatem $-f(\epsilon_1) + 3 \circ [-\frac{12}{28}, -\frac{2}{28}] - [-\frac{12}{28}, -\frac{9}{28}] + [1, 0] = [0, 0]$, czyli $f(\epsilon_1) = [-\frac{36}{28}, -\frac{6}{28}] + [\frac{12}{28}, \frac{9}{28}] + [\frac{28}{28}, 0]$, skąd $f(\epsilon_1) = [\frac{4}{28}, \frac{3}{28}]$.

Ale $f([x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]) = f(x_1 \circ \epsilon_1 + x_2 \circ \epsilon_2 + x_3 \circ \epsilon_3 + x_4 \circ \epsilon_4 + x_5 \circ \epsilon_5) = x_1 \circ f(\epsilon_1) + x_2 \circ f(\epsilon_2) + x_3 \circ f(\epsilon_3) + x_4 \circ f(\epsilon_4) + x_5 \circ f(\epsilon_5) = x_1 \circ [\frac{4}{28}, \frac{3}{28}] + x_2 \circ [-\frac{12}{28}, -\frac{2}{28}] + x_3 \circ [-\frac{12}{28}, -\frac{9}{28}] + x_4 \circ [\frac{28}{28}, 0] + x_5 \circ [0, \frac{28}{28}] = [\frac{1}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 - \frac{3}{7}x_3 + x_4, \frac{3}{28}x_1 - \frac{2}{28}x_2 - \frac{9}{28}x_3 + \frac{28}{28}x_5]$.

Zatem $V = \text{Ker}(f)$ jest zbiorem rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 - \frac{3}{7}x_3 + x_4 = 0 \\ \frac{3}{28}x_1 - \frac{2}{28}x_2 - \frac{9}{28}x_3 + \frac{28}{28}x_5 = 0 \end{cases},$$

który możemy też zapisać w postaci:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 7x_4 & = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 9x_3 + & + 28x_5 = 0 \end{cases}.$$

Zadanie 12. Niech w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$: $V = L([1, 1, 1, 1], [1, 1, -1, -1], [1, -1, 1, -1])$ oraz $W = L([1, -1, -1, -1], [2, -2, 0, 0], [3, -1, 1, 1])$. Wyznaczyć bazę i wymiar podprzestrzeni: V , W , $V+W$, $V \cap W$.

Rozwiązanie. Znajdujemy bazę podprzestrzeni V :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2-w_1, w_3-w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-\frac{1}{2})w_2, (-\frac{1}{2})w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1-w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem bazą V jest $\{[1, 1, 0, 0], [0, 1, 0, 1], [0, 0, 1, 1]\}$, skąd $\dim V = 3$.

Znajdujemy bazę podprzestrzeni W :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2-w_1, w_3-3w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2+w_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}w_2, (-1)w_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1+w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem bazą W jest $\{[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1]\}$, skąd $\dim W = 3$.

Ponadto $V + W = L([1, 1, 0, 0], [0, 1, 0, 1], [0, 0, 1, 1], [1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1]) = L([1, 1, 0, 0], [0, 1, 0, 1], [0, 0, 1, 1], [1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0]) = L([1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 1, 0, 1], [0, 0, 1, 1]) = L([1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]) = \mathbb{R}^4$, więc bazą $V+W$ jest $\{[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]\}$ oraz $\dim(V+W) = 4$.

Ze wzoru $\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$ wyliczamy $\dim(V \cap W) = 3 + 3 - 4 = 2$, czyli $\dim(V \cap W) = 2$. Ponadto $[0, 0, 1, 1] \in V \cap W$, $[1, 1, 0, 0] = [1, 0, 0, 0] + [0, 1, 0, 0] \in W$ i $[1, 1, 0, 0] \in V$, więc $[1, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1] \in V \cap W$. Ale wektory $[1, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1]$ są liniowo niezależne i $\dim(V \cap W) = 2$, więc bazą $V \cap W$ jest $\{[1, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1]\}$.