

Wzory Cramera w zadaniach

Zadanie 1. Stosując wzory Cramera rozwiąż nad ciałem $\mathbb{Q}$ układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}.$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyznacznik główny W naszego układu:

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{k_2 \leftarrow k_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 11 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftarrow w_3} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 14 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 14 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftarrow 4w_2, w_3 \leftarrow w_2} \begin{vmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(-12 - 2) = 14.$$

Zatem $W = 14 \neq 0$ i z twierdzenia Cramera układ nasz posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

$$W_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_4 \leftarrow w_3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot [6 - 45 + 11 - (-33 + 10 + 9)] = 2 \cdot [-28 + 14] = -28.$$

Zatem ze wzorów Cramera $x_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{-28}{14} = -2$, czyli $x_1 = -2$.

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_4 \leftarrow w_3} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{k_4 \leftarrow 2k_1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 9 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 11 & 9 \\ 1 & 5 & 4 \\ -3 & 3 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{k_2 \leftarrow k_1, k_3 \leftarrow 2k_1} \begin{vmatrix} 2 & 13 & 13 \\ 1 & 6 & 6 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

bo ostatni wyznacznik ma dwie identyczne kolumny.

Zatem ze wzorów Cramera

$$x_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{0}{14} = 0, \text{ czyli } x_2 = 0.$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{k_2 \leftarrow k_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_3 \leftarrow w_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftarrow 4w_1, w_3 \leftarrow w_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -(-10 - 4) = 14.$$

Zatem ze wzorów Cramera:

$$x_3 = \frac{W_3}{W} = \frac{14}{14} = 1, \text{ czyli } x_3 = 1.$$

Podstawiając wyliczone wartości $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ do równania drugiego uzyskamy, że $-2 + 0 + 5 + 2x_4 = 1$, skąd $x_4 = -1$.

Odp. Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

Zadanie 2. Stosując wzory Cramera rozwiąż nad ciałem $\mathbb{Q}$ układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37 \end{cases}.$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyznacznik główny W naszego układu:

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{k_2-2k_1, k_3-2k_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{k_4-k_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$(-1) \cdot (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (2-1) = -3. \text{ Zatem } W = -3 \neq 0 \text{ i z twierdzenia Cramera układ}$$

nasz ma dokładnie jedno rozwiązanie.

$$W_1 = \begin{vmatrix} 20 & 5 & 4 & 1 \\ 11 & 3 & 2 & 1 \\ 40 & 10 & 9 & 7 \\ 37 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{k_1-4k_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{w_4+5w_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 9 & 7 \\ 0 & 23 & 19 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \\ 23 & 19 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{w_3-w_2}{=} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \\ 13 & 10 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{w_2-7w_1}{=} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -25 & -19 & 0 \\ 13 & 10 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -25 & -19 \\ 13 & 10 \end{vmatrix} = -250 +$$

$247 = -3$. Zatem ze wzorów Cramera: $x_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{-3}{-3} = 1$, czyli $x_1 = 1$.

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 20 & 4 & 1 \\ 1 & 11 & 2 & 1 \\ 2 & 40 & 9 & 7 \\ 3 & 37 & 9 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{k_2-5k_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 9 & 7 \\ 3 & -8 & 9 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{k_3-2k_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 5 & 7 \\ 3 & -8 & 3 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{k_1-2k_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -12 & -5 & 5 & 7 \\ -1 & -8 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -12 & -5 & 5 \\ -1 & -8 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{k_1+k_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -17 & -5 & 5 \\ -9 & -8 & 3 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -17 & 5 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = -51 + 45 = -6.$$

Zatem ze wzorów Cramera: $x_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{-6}{-3} = 2$, czyli $x_2 = 2$.

$$W_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 20 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 1 \\ 2 & 10 & 40 & 7 \\ 3 & 8 & 37 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{k_3-4k_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 10 & 0 & 7 \\ 3 & 8 & 5 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{w_4+5w_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 10 & 0 & 7 \\ 8 & 23 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 7 \\ 8 & 23 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{w_2-w_1, w_3-4w_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (15 - 18) = -6. \text{ Zatem ze}$$

wzorów Cramera: $x_3 = \frac{W_3}{W} = \frac{-6}{-3} = 2$, czyli $x_3 = 2$.

Podstawiając wyliczone wartości $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 2$ do pierwszego równania uzyskamy, że $2 + 10 + 8 + x_4 = 20$, skąd $x_4 = 0$.

Odp. Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = 0$.

Zadanie 3. Stosując wzory Cramera rozwiązać nad ciałem $\mathbb{C}$ układ równań:

$$\begin{cases} (4-3i)z + (2+i)w = 5(1+i) \\ (2-i)z - (2+3i)w = -(1+i) \end{cases}.$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyznacznik główny W naszego układu:

$$W = \begin{vmatrix} 4-3i & 2+i \\ 2-i & -2-3i \end{vmatrix} = (4-3i) \cdot (-2-3i) - (2-i) \cdot (2+i) = -8-12i+6i+9 \cdot (-1) - [2^2 - (-1)] =$$

$-17 - 6i - 5 = -22 - 6i$. Zatem $W = -22 - 6i \neq 0$ i z twierdzenia Cramera układ nasz posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

$W_z = \begin{vmatrix} 5+5i & 2+i \\ -1-i & -2-3i \end{vmatrix} = (5+5i) \cdot (-2-3i) - (2+i) \cdot (-1-i) = -10 - 15i - 10i - 15 \cdot (-1) + 2 + 2i + i + (-1) = 6 - 22i$. Zatem ze wzorów Cramera: $z = \frac{W_z}{W} = \frac{6-22i}{-22-6i} = \frac{i \cdot (-22-6i)}{-22-6i} = i$, czyli $z = i$.

$W_w = \begin{vmatrix} 4-3i & 5+5i \\ 2-i & -1-i \end{vmatrix} = (4-3i) \cdot (-1-i) - (5+5i) \cdot (2-i) = -4 - 4i + 3i + 3 \cdot (-1) - 10 + 5i - 10i + 5 \cdot (-1) = -22 - 6i$. Zatem ze wzorów Cramera: $w = \frac{W_w}{W} = \frac{-22-6i}{-22-6i} = 1$, czyli $w = 1$.

Odp. Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $z = i$, $w = 1$.

Zadanie 4. W zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ rozwiąż nad ciałem $\mathbb{R}$ układ równań:

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2x + y + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Obliczamy najpierw wyznacznik główny W naszego układu:

$W = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot a + 2 - (1 + 1 + 2a^2) = 2a - 2a^2 = 2a(1 - a)$. Zatem $W = 0 \Leftrightarrow [a = 0 \text{ lub } a = 1]$.

Możliwe są zatem tylko następujące przypadki:

1. $a \neq 0$ i $a \neq 1$. Wtedy $W \neq 0$, więc z twierdzenia Cramera układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

$W_x = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot a + a - a^3 = a + a^3 - a^3 = a$. Zatem ze wzorów Cramera: $x = \frac{W_x}{W} = \frac{a}{2a(1-a)} = \frac{1}{2(1-a)}$.

$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot a + 2a^2 - a - a^2 - 2a = 2a^2 - 3a + 1 = (a-1)(2a-1)$. Zatem ze wzorów Cramera: $y = \frac{W_y}{W} = \frac{(a-1)(2a-1)}{2a(1-a)} = \frac{1-2a}{2a}$.

Podstawiając wyliczone wartości x i y do równania drugiego otrzymamy, że $\frac{2a-2}{2a} + \frac{1-2a}{2a} + z = a$, skąd $z = a + \frac{1}{2a}$.

2. $a = 0$. Wtedy $W = 0$ oraz $W_x = -1 \neq 0$, więc z twierdzenia Cramera układ jest sprzeczny.

3. $a = 1$. Wtedy układ nasz jest równoważny układowi

$\begin{cases} z + x + y = 1 \\ z + 2x + y = 1 \end{cases} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{cases} z + x + y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{cases} z = 1 - y \\ x = 0 \end{cases}$. Zatem w tym przypadku układ ma nieskończenie wiele rozwiązań: $x = 0$, y -dowolna liczba rzeczywista, $z = 1 - y$.

Odp. Dla $a = 0$ układ jest sprzeczny. Dla $a \neq 0$ i $a \neq 1$ układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $x = \frac{1}{2(1-a)}$, $y = \frac{1-2a}{2a}$, $z = a + \frac{1}{2a}$. Natomiast dla $a = 1$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań danych wzorami: $x = 0$, y -dowolna liczba rzeczywista, $z = 1 - y$.