Metoda eliminacji Gaussa w zadaniach

Zadanie 1. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż nad ciałem liczb rzeczywistych układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
 & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & -3 \\
 & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\
 & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & -1
\end{array}\right. .$$

Rozwiązanie. Rachunki będziemy wykonywali na macierzy uzupełnionej A_u naszego układu. Mamy, że

$$A_u = \left[\begin{array}{ccccc|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{w_2-w_1}{\equiv} \left[\begin{array}{ccccc|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{w_2 \leftrightarrow w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{ccccc|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{w_4-w_3}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Po wykreśleniu ostatniego wiersza uzyskamy macierz:

$$\left[\begin{array}{ccccc|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{w_2-w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{cccrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{w_2-w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{cccrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{w_1-w_2}{\equiv}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Zatem zmienną bazową jest jedynie x_5 oraz otrzymujemy stąd, że $x_5 = t$ jest dowolną liczbą rzeczywistą, $x_1 = 6 - t$, $x_2 = t - 5$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1 - t$.

Odp. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań danych wzorami:
$x_1 = 6 - t$, $x_2 = t - 5$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1 - t$, $x_5 = t$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.

Zadanie 2. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż nad ciałem liczb rzeczywistych układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & - & 9x_3 & + & 6x_4 & + & 7x_5 & + & 10x_6 & = & 3 \\
 & & & - & 6x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & + & 3x_6 & = & 2 \\
 & & & - & 3x_3 & + & 2x_4 & - & 11x_5 & - & 15x_6 & = & 1
\end{array}\right. .$$

Rozwiązanie. Rachunki będziemy wykonywali na macierzy uzupełnionej A_u naszego układu. Mamy, że

$$A_u = \left[\begin{array}{ccrrrr|c} 1 & 1 & -9 & 6 & 7 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right] \overset{x_2 \leftrightarrow x_6}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_6 & x_3 & x_4 & x_5 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{crrrrc|c} 1 & 10 & -9 & 6 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -15 & -3 & 2 & -11 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Po wykonaniu operacji $w_3 + 5w_2$ uzyskamy macierz:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_6 & x_3 & x_4 & x_5 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccrrrc|c} 1 & 10 & -9 & 6 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -33 & 22 & -1 & 0 & 11 \end{array}\right] \end{array} \overset{x_3 \leftrightarrow x_5}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccrrrc|c} 1 & 10 & 7 & 6 & -9 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 22 & -33 & 0 & 11 \end{array}\right] \end{array}.$$

Na otrzymanej macierzy wykonujemy operacje $w_1 + 7w_3$ i $w_2 + 2w_3$:

$$\begin{array}{c}\begin{matrix} x_1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 10 & 0 & 160 & -240 & 1 & 80 \\ 0 & 3 & 0 & 48 & -72 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & -1 & 22 & -33 & 0 & 11 \end{array}\right]\end{array} \overset{\frac{1}{3}w_2,\,(-1)w_3}{\equiv} \begin{array}{c}\begin{matrix} x_1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 10 & 0 & 160 & -240 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & 0 & 16 & -24 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -22 & 33 & 0 & -11 \end{array}\right]\end{array}.$$

Po wykonaniu operacji $w_1 - 10w_2$ uzyskamy macierz:

$$\begin{array}{c}\begin{matrix} x_1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 & -24 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -22 & 33 & 0 & -11 \end{array}\right]\end{array}.$$

Zmiennymi bazowymi są zatem: x_4, x_3, x_2. Mamy też następującą odpowiedź:

Odp. Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań danych wzorami:
$x_1 = -x_2$, $x_6 = 8 - 16x_4 + 24x_3$, $x_5 = -11 + 22x_4 - 33x_3$, x_4, x_3, x_2 - dowolne liczby rzeczywiste.

Zadanie 3. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż nad ciałem liczb rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Rozwiązanie. Rachunki będziemy wykonywali na macierzy uzupełnionej A_u naszego układu. Mamy, że

$$A_u = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \overset{x_1 \leftrightarrow x_2}{\equiv} \begin{array}{c}\begin{matrix} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right]\end{array} \overset{w_2+2w_1,\ w_3-w_1,\ w_4+w_1}{\equiv}$$

$$\begin{array}{c}\begin{matrix} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right]\end{array} \overset{x_1 \leftrightarrow x_4}{\equiv} \begin{array}{c}\begin{matrix} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right]\end{array} \overset{w_3+w_2,\ w_4-2w_2}{\equiv} \begin{array}{c}\begin{matrix} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -3 \end{array}\right]\end{array}.$$

Po wykonaniu operacji $w_4 + w_3$ uzyskamy macierz:

$$\begin{array}{c}\begin{matrix} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]\end{array}.$$

Zatem nasz układ jest sprzeczny (nie posiada rozwiązania), bo ostatnie równanie ma postać:

$$0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_1 = -1.$$

Odp. Układ jest sprzeczny.

Zadanie 4. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż nad ciałem liczb rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}.$$

Rozwiązanie. Rachunki będziemy wykonywali na macierzy uzupełnionej A_u naszego układu. Mamy, że

$$A_u = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right] \overset{x_1 \leftrightarrow x_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 2 & 5 & -6 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_3+w_1,\ w_4+2w_1}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -4 \end{array}\right] \end{array}.$$

Wykonujemy operację $(-1)w_2$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -4 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_3+w_2}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -4 \end{array}\right] \end{array} \overset{w_4-2w_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right] \end{array}.$$

Wykonujemy operacje $\frac{1}{3}w_3$ i $(-\frac{1}{3})w_4$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \end{array} \overset{w_1+w_4,\ w_2-3w_4,\ w_3-w_4}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \end{array}.$$

Wykonujemy operacje $w_1 - 2w_3$ i $w_2 + 2w_3$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \end{array} \overset{w_1+w_2}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \end{array}.$$

Stąd mamy następującą odpowiedź.

Odp. Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{5}{3}$, $x_4 = -\frac{4}{3}$.

Zadanie 5. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż nad ciałem liczb rzeczywistych układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 12x_1 & - & 18x_2 & + & 102x_3 & - & 174x_4 & - & 216x_5 & = & 132 \\ 14x_1 & - & 21x_2 & + & 119x_3 & - & 203x_4 & - & 252x_5 & = & 154 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & -1 \\ & & & & 4x_3 & + & 5x_4 & + & 6x_5 & = & -2 \\ & & & & 7x_3 & + & 8x_4 & + & 9x_5 & = & -3 \end{array} \right. .$$

Rozwiązanie. Rachunki będziemy wykonywali na macierzy uzupełnionej A_u naszego układu. Mamy, że

$$A_u = \left[\begin{array}{ccccc|c} 12 & -18 & 102 & -174 & -216 & 132 \\ 14 & -21 & 119 & -203 & -252 & 154 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 & -3 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{6}w_1,\ \frac{1}{7}w_2,\ w_4-4w_3,\ w_5-7w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 17 & -29 & -36 & 22 \\ 2 & -3 & 17 & -29 & -36 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -5 & 4 \end{array}\right]$$

$$\overset{w_5-2w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 17 & -29 & -36 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{w_1-36w_4,\ w_2+2w_4,\ w_3-2w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 17 & -29 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{(-\frac{1}{3})w_3,\ (-1)w_4}{\equiv} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 17 & -29 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{w_1+29w_3,\ w_2-2w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 17 & 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{w_1-17w_2,\ \frac{1}{2}w_1}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{x_2 \leftrightarrow x_3}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & x_5 & \phantom{-\frac{3}{2}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \overset{x_2 \leftrightarrow x_4}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & x_5 & \phantom{-\frac{3}{2}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overset{x_2 \leftrightarrow x_5}{\equiv} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & x_2 & \phantom{-\frac{3}{2}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Zmienną bazową jest zatem x_2. Stąd mamy następującą odpowiedź.

Odp. Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań danych wzorami:
$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_2$, x_2-dowolna liczba rzeczywista, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = -\frac{2}{3}$, $x_5 = 0$.