matematyka w ubezpieczeniach
zadania z egzaminów aktuarialnych

1. W danej populacji intensywność śmiertelności zmienia się skokowo w rocznicę narodzin i jest stała aż do następnych narodzin. Jaka jest oczekiwana liczba osób z miliona 60-latków, które umrą po ukończeniu 61 lat i 8 miesięcy, a przed skończeniem 62 lat i 4 miesięcy. Dane są:

$$q_{60} = 0,01 \quad q_{61} = 0,03 \quad q_{62} = 0,05$$

Przyjąc, że 1 miesiąc to $\frac{1}{12}$ roku. Podać najbliższą wartość.
$A)$ 26067 $B)$ 26071 $C)$ 26075 $D)$ 26079 $E)$ 26083

2. Rozpatrujemy grupę osób w wieku $(x + \frac{1}{3})$ lat i analizujemy śmiertelność w tej grupie do wieku $(x + 1)$ lat. Znamy jedynie $q_x = 0,06$, dlatego rozważamy założenie UDD oraz założenie Balducciego. Podać, dla jakiego u intensywność wymierania $\mu_{x+\frac{1}{3}+u}$ będzie o 2% wyższa wg Balducciego w stosunku do UDD. Podać najbliższą wartość.
$A)$ $0,168$ $B)$ $0,172$ $C)$ $0,176$ $D)$ $0,180$ $E)$ $0,184$

3. Oblicz prawdopodobieństwo, że noworodek wybrany z populacji, w której śmiertelnością rządzi prawo Gompertza

$$\mu_x = 0,6e^x$$

dożyje wieku największej śmiertelności (tzn. takiego wieku, w którym gęstość rozkładu zmiennej losowej X jest największa). Podać najbliższą wartość.
$A)$ $0,59$ $B)$ $0,67$ $C)$ $0,75$ $D)$ $0,83$ $E)$ $0,91$

4. Dany jest wiek całkowity x. Następujące prawdopodobieństwa przeżycia

$$g =_2 p_{x+13} \quad h =_2 p_{x+\frac{1}{2}} \quad j =_2 p_{x+\frac{3}{4}}$$

obliczono stosują interpolację zakładającą, że natężenie wymierania jest stałe w rocznym przedziale między kolejnymi wiekami całkowitymi. Wówczas liczby g, h, j spełniają tożsamość
$A)$ $gj = h^2$ $B)$ $g^2 j = h^3$ $C)$ $gj^2 = h^3$ $D)$ $g^3 j^2 = h^5$ $E)$ $g^2 j^3 = h^5$

5. Dany jest wiek całkowity x oraz

$${}_3p_x = 0,83904 \quad {}_2p_{x+\frac{1}{2}} = 0,893388 \quad p_{x+1} = 0,95$$

Oblicz p_x oraz p_{x+2} stosując założenie o jednostajnym rozkładzie śmierci w ciągu roku. Podać najbliższą wartość.

A) $p_x = 0,94 \quad p_{x+2} = 0,92$
B) $p_x = 0,96 \quad p_{x+2} = 0,94$
C) $p_x = 0,96 \quad p_{x+2} = 0,92$
D) $p_x = 0,98 \quad p_{x+2} = 0,94$
E) $p_x = 0,98 \quad p_{x+2} = 0,91$

6. Rozważamy dwie niezależne populacje, w których śmiertelnością rządzi prawo Gompertza

$$\mu_x^{(1)} = B2^x \quad \mu_x^{(2)} = 2B8^x$$

wiemy, że $P(X^{(2)} \le 50) = \frac{1}{3}$. Oblicz ${}_{150}p_1^{(1)}$. Podać najbliższą wartość.
$A)$ $0,10$ $B)$ $0,15$ $C)$ $0,20$ $D)$ $0,25$ $E)$ $0,30$

7. W populacji osób urodzonych 1 stycznia, dla pewnego całkowitego wieku x, prawdopodobieństwo $q_x = 0,6$. Podać, którego dnia roku (rok ma 365 dni) nastapi zrównanie: prawdopodobieństwa śmierci ${}_uq_x$ $u \in [0,1)$, wyznaczonego przy hipotezie Balducciego z prawdopodobieństwem przeżycia ${}_up_x$ wyznaczonym przy jednostajnym rozkładzie zgonów w x-tym roczniku.

8. Rozważmy grupę 1000 osób urodzonych 1 kwietnia 1950 roku, żyjących 1 stycznia 2001. Wyznaczyć dalsze trwanie życia tych osób (sumę przeżytych lat) w okresie od 1 stycznia 2001 do 31 grudnia 2002, jeżeli wiadomo, że w tej populacji intensywność zgonów jest funkcją schodkową ze skokiem w każdą rocznicę urodzin i stałym poziomem aż do następnych urodzin. Dane są:

$$q_{50} = 0,10 \quad q_{51} = 0,15 \quad q_{52} = 0,20$$

Podać najbliższą wartość.
$A)$ 1587 $B)$ 1632 $C)$ 1687 $D)$ 1717 $E)$ 1842

9. Wyznacz prawdopodobieństwo przeżycia przez osobę 55-letnią co najmniej 10 lat, jeśli analogiczne prawdopodobieństwo dla osoby 25-letniej wynosi 0,8 oraz natężenie zgonów opisuje funkcja

$$\mu_x = kx \quad \text{dla } x > 0$$

$A)\ 0,40 \quad B)\ 0,64 \quad C)\ 0,80 \quad D)\ 0,81 \quad E)\ 0,90$

10. Rozpatrzmy osobę, która ukończyła 1 stycznia 1998 roku 30 lat. Przy założeniu Balducciego $({}_{1-u}q_{x+u} = (1-u)q_x$ dla całkowitego x i $u \in [0,1])$ prawdopodobieństwo śmierci tej osoby w ciągu pierwszych 170 dni roku 2028 jest równe prawdopodobieństwu jej śmierci w pozostałej części tego roku. Znajdź p_{60} (podaj najbliższą liczbę). Przyjmujemy, że 1 rok = 365 dni.
A) dane są sprzeczne $\quad B)\ 0,77 \quad C)\ 0,82 \quad D)\ 0,87 \quad E)\ 0,92$

11. Znajdź $\overset{\circ}{e}_x$ wiedząc, że $p_x = 0,9$ oraz $\overset{\circ}{e}_{x+1} = 35,2$. Zakładamy liniowy rozkład umieralności w przedziale $(x, x+1)$. Podaj najbliższą wartość.
$A)\ 31,7 \quad B)\ 32,6 \quad C)\ 34,6 \quad D)\ 35,7 \quad E)\ 36,1$

12. Oczekiwane dalsze trwanie życia osoby w wieku x wynosi $e_x = E(K(x)) = 28,5$ roku. Znajdź p_x, jeśli $e_{x+1} = 27,7$ roku. Podaj najbliższą wartość.
$A)\ 0,99011 \quad B)\ 0,99125 \quad C)\ 0,99278 \quad D)\ 0,99303$ E) za mało danych

13. Natężenie zgonów opisuje funkcja

$$\mu_{x+t} = be^{x+t} \quad \text{gdzie} b > 0$$

Dla jakiej wartości parametru b prawdopodobieństwo tego, że 30-latek przeżyje następne 10 lat, po czym umrze w ciągu kolejnych 5 lat, wynosi r, oraz prawdopodobieństwo ${}_{10}p_{30} = 5r$
$A)\ \frac{ln5}{ln2(e^{45}-e^{40})} \quad B)\ \frac{ln5}{2ln2(e^{45}-e^{40})} \quad C)\ \frac{ln5-ln2}{2(e^{45}-e^{40})} \quad D)\ \frac{ln5-2ln2}{2(e^{45}-e^{40})} \quad E)\ \frac{ln5-2ln2}{e^{45}-e^{40}}$

14. W danej populacji intensywność śmiertelności mężczyzn jest dla każdego wieku o połowę wyższa niż w przypadku kobiet. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany mężczyzna w wieku (x) będzie żył co najmniej tak długo jak losowo wybrana kobieta w wieku (x).
$A)\ 0,27 \quad B)\ 0,30 \quad C)\ 0,33 \quad D)\ 0,37 \quad E)\ 0,40$

15. W danej populacji śmiertelnością rządzi prawo de Moivre'a z wiekiem granicznym ω. O wieku x wiadomo, że osoby starsze w tym wieku umierają w ciągu doby dwa razy rzadziej niż osoby dwukrotnie starsze. Oblicz prawdopoodbieństwo, że osoba w wieku x dożyje wieku $2x$.
$A)\ \frac{1}{4} \quad B)\ \frac{1}{3} \quad C)\ \frac{1}{2} \quad D)\ \frac{2}{3} \quad E)\ \frac{3}{4}$

16. Dla życia (x) dane są prawdopodobieństwa śmierci dla trzech kolejnych lat:

$$q_x = 0,1 \qquad q_{x+1} = 0,2 \qquad q_{x+2} = 0,3$$

Przy założeniu jednostajnego rozkładu zgonów w ciągu roku podaj najbliższą wartość dla oczekiwanej liczby lat, którą przeżyje w 3-letnim okresie życie (x).
$A)\ 1,900 \quad B)\ 2,027 \quad C)\ 2,172 \quad D)\ 2,372 \quad E)\ 2,900$