

**ANALIZA MATEMATYCZNA II**  
**Studia podyplomowe matematyki, semestr II**

**Lista 1**

*reguła de L'Hospitala, monotoniczność, ekstrema funkcji*

1. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć podane granice:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$	2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$	3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2^x - 2^{2-x}}{(x-1)^2}$
4) $\lim_{x \rightarrow \infty} [x(e^{\frac{1}{x}} - 1)]$	5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln \cos x}$	6) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2})$
7) $\lim_{x \rightarrow \infty} ((x+3)e^{\frac{1}{x}} - x)$	8) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan(\frac{1}{2}\pi x)}{\ln(x-1)}$	9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$
10) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$	11) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\tan x}$	12) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$
13) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$	14) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \arctan x) \ln x$	15) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg}(2x)$

2. Obliczyć granicę  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$ . Czy można tu zastosować regułę de L'Hospitala?

3. Wykazać, że funkcja  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$  jest malejąca na przedziale  $(-2, 1)$ .

4. Znaleźć przedziały monotoniczności podanych funkcji:

1) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$	2) $f(x) = (x+1)e^{2x}$	3) $f(x) = 3x^5 + 5x^3$
4) $f(x) = x + \cos x$	5) $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x, (0 \leq x \leq 2\pi)$	6) $f(x) = x^2 e^{-x}$

5. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje mają ekstrema lokalne właściwe we wskazanych punktach:

a)  $f(x) = |x - 1|, x_0 = 1,$   
b)  $f(x) = 2 - x^4, x_0 = 0,$

6. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:

a)  $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1},$   
b)  $f(x) = x \ln x,$   
c)  $f(x) = |x^2 - 5x - 6|,$   
d)  $f(x) = (x - 5)e^x,$   
e)  $f(x) = e^x \sin x,$   
f)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 6,$   
g)  $f(x) = \frac{(x+3)^3}{(x+1)^2}.$