ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka finansowa, II rok
lista 10

1. Z nierówności **Schwarza** w wywnioskować, że jeśli $E(X)$ istnieje i jest większa od zera wtedy $\frac{1}{E(X)} \leq E(\frac{1}{X})$.

2. Z klasycznej nierówności Czebyszewa ocenić prawdopodobieństwo, że zmienna losowa normalna (tzn. $N(0,1)$) odchyli się od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż
   - cztery średnie odchylenia,
   - trzy średnie odchylenia.

3. Rzucamy n razy monetą. Niech X ilość orłów. Korzystając z nierówności Czebyszewa znaleźć takie n aby $P(\{|\frac{1}{n}\mathrm{X} - \frac{1}{2}| < 1/10\}) > 9/10$.

4. Strzelamy 300 razy do tarczy z prawdopodobieństwem trafienia w jednym strzale wynoszącym $1/4$. Z nierówności Czebyszewa ocenić $P(|X - 75| < 30)$, gdzie X jest ilością trafień.

5. X ma rozkład normalny $N(0,1)$. Oszacować z góry $P(\{|X| \geq 3\})$ przy pomocy:
   - nierówności Czebyszewa
   - tablic

6. Zmienne losowe $X_i, i \in N$ są niezależne i mają jednakowe rozkłady $P(\{X_i = k\}) = 0,2$, gdzie $k = 1,2,3,4,5$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że zmienna $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ przyjmie wartość większą od 320.

7. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości dodatnie i istnieje $E(X)$ oraz $E(X) = a$. Udowodnić, że wtedy $P(\{X \geq 2a\}) \leq \frac{1}{2}$.
   Wsk. Zastosować nierówność Markowa.

8. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Niech zmienna losowa X_k oznacza wyrzucenie orła za k razem. Korzystając z nierówności, Czebyszewa oszacować n aby
$$P(\{\omega : |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{10}\}) > \frac{9}{10}.$$

9. Przy jakiej liczbie rzutów kostką prawdopodobieństwo tego, że częstość wypadnięcia szóstki różni się od $\frac{1}{6}$ nie mniej niż o $\frac{1}{36}$, jest mniejsze niż 0.1?

10. X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
    - Oszacować z nierówności Czebyszewa $P(\{|X| \geq \frac{3}{2}\})$.
    - Obliczyć $P(\{|X| \geq \frac{3}{2}\})$ bezpośrednio.