ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
ii rok informatyki i ekonometrii
lista 10

1. Z klasycznej nierówności Czebyszewa ocenić prawdopodobieństwo, że zmienna losowa normalna (tzn. $N(0,1)$) odchyli się od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż
   - cztery średnie odchylenia,
   - trzy średnie odchylenia.
2. Rzucamy n razy monetą. Niech X ilość orłów. Korzystając z nierówności Czebyszewa znaleźć takie n aby $P(\{|\frac{1}{n}\mathrm{X}-\frac{1}{2}| < \frac{1}{10}\}) > \frac{9}{10}$.
3. Strzelamy 300 razy do tarczy z prawdopodobieństwem trafienia w jednym strzale wynoszącym 1/4. Z nierówności Czebyszewa ocenić $P(|X-75| < 30)$, gdzie X jest ilością trafień.
4. X ma rozkład normalny $N(0,1)$. Oszacować z góry $P(\{|X| \geq 3\})$ przy pomocy:
   - nierówności Czebyszewa
   - tablic
5. Zmienne losowe $X_i, i \in N$ są niezależne i mają jednakowe rozkłady $P(\{X_i = k\}) = 0,2$, gdzie $k = 1,2,3,4,5$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że zmienna $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ przyjmie wartość większą od 320.
6. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości dodatnie i istnieje $E(X)$ oraz $E(X) = a$. Udowodnić, że wtedy $P(\{X \geq 2a\}) \leq \frac{1}{2}$.
   Wsk. Zastosować nierówność Markowa.
7. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Niech zmienna losowa X_k oznacza wyrzucenie orła za k razem. Korzystając z nierówności, Czebyszewa oszacować n aby
$$P(\{\omega : |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{10}\}) > \frac{9}{10}.$$
8. Przy jakiej liczbie rzutów kostką prawdopodobieństwo tego, że częstość wypadnięcia szóstki różni się od $\frac{1}{6}$ nie mniej niż o $\frac{1}{36}$, jest mniejsze niż 0.1?
9. X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
   - Oszacować z nierówności Czebyszewa $P(\{|X| \geq \frac{3}{2}\})$.
   - Obliczyć $P(\{|X| \geq \frac{3}{2}\})$ bezpośrednio.
10. Rzucamy 180 razy kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy 32 razy szóstkę.
11. Korzystając z twierdzenia Moivre'a - Laplace'a oszacować prawdopodobieństwo, że w 720 rzutach kostką ilość szóstek będzie
    - zawierać się pomiędzy 121 a 140
    - mniejsza niż 125
    - większa niż 110
12. Wykonujemy 1000 rzutów symetryczną kostką. Korzystając z twierdzenia Moivre'a - Laplace'a oszacować przedział, w jaki z prawdopodobieństwem 0,9 wpada ilość otrzymanych szóstek.
13. Wydział Matematyki pragnąłby przyjąć nie więcej niż 120 kandydatów. Zdających jest 250, a szansa zaliczenia testu wynosi 0,4. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wydział będzie miał kłopot z nadmiarem kandydatów?
14. Stosując twierdzenie Moivre'a-Laplace'a obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w 800 niezależnych próbach ilość sukcesów będzie większa niż 150, a mniejsza niż 250, jeśli prawdopodobieństwo sukcesu w każdej próbie jest równe $\frac{1}{4}$.

15. Na campusie uniwersyteckim są dwie restauracje po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad a wybory restauracji dokonują losowo - powiedzmy, rzucając symetryczną monetą. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,001?

16. Prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia w jednym doświadczeniu wynosi $0,3$. Z jakim prawdopodobieństwem można twierdzić, że częstość tego zdarzenia przy 100 doświadczeniach będzie zawarta w granicach od $0,2$ do $0,4$?

17. Rzucono 1000 razy kostką. Znaleźć prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie zawarta między 3410 a 3590?

18. Na poczcie pojawia się 100 klientów dziennie, każdy z nich dokonuje wpłaty (bądź wypłaty) X_i, $i = 1, 2, \ldots 100$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, zerowej średniej i wariancji równej 100^2. Ile gotówki należy mieć w kasie rano, by z prawdopodobieństwem $0,99$ na koniec dnia nie zabrakło pieniędzy? Zakładamy, że w ciągu dnia ewentualne braki uzupełnia naczelnik, ale wieczorem chce odzyskać swoje pieniądze.

19. W Polsce jest $24,6$ mln podatników i każdy z nich myli się przy wypełnianiu zeznania podatkowego. Wartość błędu dla i-tego podatnika jest zmienna losową X_i, gdzie $E(X_i) = 0$ i $D^2(X_i) = 10000$, czyli $D(X_i) = 100$ (złotych); ponadto zakładamy niezależność X_i. Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą 1 grosz na podatnika? A 3 grosze?

20. Funkcja $p(x) = \frac{1}{3}$ dla $x \in (-1, 0)$, $p(x) = \frac{2}{3}$ dla $x \in [0, 1)$ i $p(x) = 0$ dla $x \notin (-1, 1)$ jest gęstością każdej z niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Znaleźć przybliżoną wartość prawdopodobieństwa $P(S_n < 13)$ dla $n = 60$.

21. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ są niezależne o jednakowych rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 2$. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$P(190 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 220).$$

22. Losowy błąd pomiaru pewnej wielkości ma rozkład o wartości przeciętnej $m = 0$ i odchyleniu standardowym 0,08. Obliczyć prawdopodobieństwo, że błąd średniej arytmetycznej 100 pomiarów nie przekroczy (co do wartości bezwzględnej) 0,1.