ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 10 (zmienne losowe - charakterystyki liczbowe)

1. Z sześcianu o krawędzi a wylosowano trzy wierzchołki. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe polu trójkąta utworzonego z tych wierzchołków. Obliczyć:
   - rozkład zmiennej losowej;
   - wartość oczekiwaną;
   - wariancje zmiennej losowej.
2. Obliczyć $E(X)$ jeżeli X jest zmienną losową o rozkładzie:
   - Poissona z parametrem λ
   - Bernoulliego z parametrami n, p
   - geometryczny z parametrem p
   - jednostajnym na odcinku $[a, b]$
   - wykładniczym z parametrem λ
   - normalny $N(m, \sigma)$
   - gamma z parametrami a, b
   - standardowy Cauchy'ego (z parametrami $m = 0, h = 1$)
3. Niech X suma oczek w 2 rzutach kostką. Obliczyć $E(X), D^2(X)$.
4. Losujemy n - krotnie (ze zwracaniem) liczbę spośród liczb od 1 do N. X największa spośród liczb uzyskanych w losowaniu. Obliczyć $E(X)$.
5. W urnie jest 8 białych i 2 czarne kule. Losujemy kule bez zwracania. X ilość wyciągniętych do momentu wyciągnięcia pierwszej kuli białej. Jaka jest najbardziej prawdopodobna wartość X?
6. Spośród zbioru par liczb $\{(k, l) : k, l \in \{0, 1, \dots, 9\}\}$ losowana jest jedna para (m, n). Wartością zmiennej losowej X jest $m + n$. Wyznaczyć $E(X)$.
7. Policzyć: dystrybuantę, wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej, której gęstość zadana jest wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \end{cases} .$$
8. Dany jest rozkład zmiennej losowej $P(\{\omega : X(\omega) = k\}) = \frac{c}{3^k}$, gdzie $k \in N$. Wyznaczyć stała c, wartość oczekiwaną i wariancję.
9. Zmienna losowa X może przyjmować wartości całkowite dodatnie z prawdopodobieństwami tworzącymi ciąg geometryczny malejący. Wybrać pierwszy wyraz i iloraz q tak, aby wartość oczekiwana zmiennej losowej X była równa 10. Obliczyć przy tym warunku prawdopodobieństwo $P(X \leq 10)$.
10. Gra polega na rzucaniu monetą aż do pojawienia się orła. Jeżeli orzeł wypadł za k-tym razem, to gracz A otrzymuje k rubli od gracza B. Ile rubli powinien dać gracz A graczowi B przed rozpoczęciem gry, aby gra była sprawiedliwa?
11. Udowodnić następujące własności:
    - $E(a) = a, a \in R$;
    - $E(aX) = aE(X), a \in R$;
    - $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;

zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Jeśli dla zmiennej losowej o rozkładzie Poissona mamy:
$P(N \leq 1) = \frac{8}{9}P(N = 2)$, to:
A) $E(N) = \frac{17}{9}$, B) $E(N) = 3$, C) $D^2(N) = 2$, D) $E(N^2) = 3$, E) $E(N) = \frac{8}{9}$.

2. Zmienna losowa N ma rozkład z geometrycznym ogonem, tzn. dany wzorem

$$P(N=k) = \begin{cases} p_0 & \text{dla} \quad k=0 \\ (1-p_0)pq^{k-1} & \text{dla} \quad k=1,2,\ldots \end{cases}$$

gdzie parametry rozkładu $p_0 = 0,5$ oraz $p = 1-q = 0,25$. Wartość oczekiwana tej zmiennej wynosi:
A) $1,5$; B) 2; C) $2,5$; D) 3; E) $3,5$.

3. W urnie znajduje się 10 kul białych i 10 czarnych. Wybieramy z urny kolejno bez zwracania po jednej kuli aż do momentu wyciągnięcia po raz pierwszy kuli czarnej. Wartość oczekiwana liczby wyciągniętych kul białych jest równa:
A) 5, B) $\frac{1}{2}$, C) $\frac{10}{11}$, D) 1, E) $\frac{19}{20}$.

4. W urnie znajduje się 20 kul, w tym 10 kul białych i 10 czarnych. Ciągniemy losowo bez zwracania 18 kul. Niech N oznacza liczbę wyciągniętych kul białych. Wariancja zmiennej losowej N wynosi:
A) $\frac{13}{19}$, B) $\frac{12}{19}$, C) $\frac{11}{19}$, D) $\frac{10}{19}$, E) $\frac{9}{19}$.

5. Rzucamy symetryczną kostka do gry tak długo, aż uzyskamy każdą liczbę oczek. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.
A) $12,5$; B) $18,5$; C) $12,0$; D) $13,7$; E) $14,7$.

6. Na odcinku $(0,1)$ losujemy punkt zgodnie z rozkładem jednostajnym. W ten sposób odcinek zostaje podzielony na dwa pododcinki (prawie na pewno dłuższy i krótszy). Wartość oczekiwana stosunku długości odcinka krótszego do długości odcinka dłuższego wynosi:
A) $\frac{\ln 2}{2}$, B) $\frac{\ln 2}{3}$, C) $\ln 2$, D) $(\ln 4) - \frac{1}{2}$, E) $(\ln 4) - 1$.

7. Zmienna losowa X ma rozkład logarytmiczno-normalny o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \cdot \exp\{-\frac{1}{2}[\ln x - \mu]^2\} \quad \text{dla } x > 0.$$

Wiadomo, że $P(X \le q) = 0,6$ oraz $P(X \le r) = 0,4$. Wynika stąd, że:
A) $E(X) = \sqrt{q \cdot r \cdot e}$, B) $E(\ln X) = \sqrt{q \cdot r}$, C) podane informacje są sprzeczne, D) $E(X) = \frac{q+r}{2}$, E) $E(X) = \sqrt{q \cdot r}$.

8. Załóżmy, że zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o gęstości:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad dla \quad x > 0.$$

Niech $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wartość oczekwiana zmiennej losowej $N = [X + \frac{1}{2}]$ wyraża się wzorem:
A) $[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}]$, B) $[\frac{1}{\lambda}] + \frac{1}{2}$, C) $\frac{1}{[\lambda]} + \frac{1}{2}$, D) $\frac{e^{\frac{1}{2}\lambda}}{e^{\lambda}-1}$, E) $\frac{1}{e^{\lambda}-1}$.

9. Na okręgu o promieniu 1 wybieramy losowo i niezależnie 2 punkty. Oblicz wartość oczekiwaną odległości między nimi (odległość mierzymy wzdłuż cięciwy).
A) $\frac{\pi^2}{10}$, B) $\frac{\pi}{2}$, C) $\frac{4}{3}$, D) $\frac{4}{\pi}$, E) 1.