ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 11 (zmienne losowe - nierówności związane z momentami)

1. Z klasycznej nierówności Czebyszewa ocenić prawdopodobieństwo, że zmienna losowa normalna (tzn. $N(0,1)$) odchyli się od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż
   - cztery średnie odchylenia,
   - trzy średnie odchylenia.
2. Rzucamy n razy monetą. Niech X ilość orłów. Korzystając z nierówności Czebyszewa znaleźć takie n aby $P(\{|\frac{1}{n}\mathrm{X}-\frac{1}{2}| < 1/10\}) > 9/10$.
3. Strzelamy 300 razy do tarczy z prawdopodobieństwem trafienia w jednym strzale wynoszącym $1/4$. Z nierówności Czebyszewa ocenić $P(|X-75| < 30)$, gdzie X jest ilością trafień.
4. X ma rozkład normalny $N(0,1)$. Oszacować z góry $P(\{|X| \geq 3\})$ przy pomocy:
   - nierówności Czebyszewa
   - tablic
5. Rzucamy symetryczną monetą. Jak wielkie powinno być n (n - liczba rzutów), aby prawdopodobieństwo, że liczba wyrzuconych orłów różnić się będzie od najbardziej prawdopodobnej ich liczby o więcej niż $0,05n$, było mniejsze niż 0,2 ? (Korzystać z nierówności Czebyszewa-B.).
6. Kupiono 500 ton węgla z pewnej kopalni, której węgiel zawiera przeciętnie 4% miału. Z jakim prawdopodobieństwem możemy sądzić, że kupiony węgiel zawiera co najwyżej 30 ton miału ? Obliczenia przeprowadzić korzystając z nierówności Czebyszewa.
7. Wykonano n niezależnych doświadczeń. W wyniku każdego doświadczenia może nastąpić zdarzenie A albo A', przy czym $P(A) = \frac{1}{3}$ dla każdego doświadczenia. Niech X_n oznacza liczbę wystąpień zdarzenia A. Korzystając z nierówności Czebyszewa-B. oszacować prawdopodobieństwo zdarzenia $|\frac{1}{n}X_n - \frac{1}{3}|$ dla
   - $n = 9000$
   - $n = 75000$
8. Dowieść następującego twierdzenia *Jeżeli $g : R \to R$ jest dodatnią funkcją rosnącą i istnieje $E(g(X)) = m$, to $P(\{\omega : X(\omega) > t\}) \leq \frac{m}{g(t)}$.*
9. Dowieść następującego twierdzenia *Dla dowolnej zmiennej losowej X i dla $t > 0$ zachodzi $P(\{\omega : tX(\omega) > t^2 + \ln E(e^{aX}\}) < e^{t^2}$.*
10. Niech $f : R \to R$ będzie funkcją nieujemną, parzystą i niemalejącą dla $x > 0$. Dowieść że dla dowolnej zmiennej losowej X i dowolnie wybranej stałej $c > 0$ spełniona jest nierówność
    - jeżeli $|f| \leq K < \infty$, to $P(\{\omega : |X(\omega)| \geq c\}) \geq \frac{E(f(X))-f(c)}{K}$.
    - jeżeli $|X| \leq M < \infty$, to $P(\{\omega : |X(\omega)| \geq c\}) \geq \frac{E(f(X))-f(c)}{f(M)}$ (nierówność Kołmogorowa).
11. Z nierówności **Schwarza** w wywnioskować, że jeśli $E(X)$ istnieje i jest większa od zera wtedy $\frac{1}{E(X)} \leq E(\frac{1}{X})$.
12. Zmienne losowe $X_i, i \in N$ są niezależne i mają jednakowe rozkłady $P(\{X_i = k\}) = 0,2$, gdzie $k = 1,2,3,4,5$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że zmienna $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ przyjmie wartość większą od 320.
13. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości dodatnie i istnieje $E(X)$ oraz $E(X) = a$. Udowodnić, że wtedy $P(\{X \geq 2a\}) \leq \frac{1}{2}$.
    Wsk. Zastosować nierówność Markowa.
14. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Niech zmienna losowa X_k oznacza wyrzucenie orła za k razem. Korzystając z nierówności, Czebyszewa oszacować n aby
$$P(\{\omega : |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{10}\}) > \frac{9}{10}.$$

15. Przy jakiej liczbie rzutów kostką prawdopodobieństwo tego, że częstość wypadnięcia szóstki różni się od $\frac{1}{6}$ nie mniej niż o $\frac{1}{36}$, jest mniejsze niż 0.1?

16. X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

    - Oszacować z nierówności Czebyszewa $P(\{|X| \geq \frac{3}{2}\})$.
    - Obliczyć $P(\{|X| \geq \frac{3}{2}\})$ bezpośrednio.

17. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczo-potęgowy $f(x) = \frac{x^m}{m!}e^{-x}, (x \geq 0)$. Wykazać prawdziwość nierówności

$$P(\{0 < X < 2(m+1)\}) > \frac{m}{m+1}.$$

18. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona (z parametrem λ). Dowieść, że

    - $P(\{X \geq 1\}) \leq \lambda$
    - $P(\{X \geq 2\}) \leq \frac{\lambda^2}{2}$