ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 12 (zmienne losowe - zbieżności)

1. Udowodnić, że jeśli $\{X_n : n \in N\}$ jest ciągiem zmiennych losowych, dla którego spełniony jest warunek: istnieje skończona wariancja $D^2(X_n)$ dla $n \in N$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} D^2(X_n) = 0$ (zwanym warunkiem Markowa), to ciąg $\{X_n - E(X_n) : n \in N\}$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa (stochastycznie) do zera.

2. Pokazać, że granica według prawdopodobieństwa jest wyznaczona jednoznacznie.

3. Udowodnić, że jeżeli ciąg zmiennych losowych $\sqrt{X_n}$ jest zbieżny w L^2, to ciąg X_n jest zbieżny w L^1.

4. Jeśli $X_n \stackrel{p.n}{\to} X$, to $X_n \stackrel{P}{\to} X$.

5. X_n ciąg jednakowych zmiennych losowych. Zdefiniujmy $Y_n = \prod\limits_{j=1}^{n} X_j$. Udowodnić, że jeżeli Y_n jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1 do stałej a, to $a = 0$ lub $a = 1$.

6. Dany jest ciąg zmiennych losowych przyjmujących wartości $a > 0$ na odcinku $< 0, \frac{1}{2^n} >$, 0 na odcinku $(\frac{1}{2^n}, 1 >$ z prawdopodobieństwami równymi długości odcinków. Wykazać, że tak określony ciąg X_n zmiennych losowych jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

7. Niech $\{X_n : n \in N\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych dla których z prawdopodobieństwem 1 mamy $|X_n| \leq c < \infty$. Dowieść, że $X_n \to 0$ według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} E(|X_n|) = 0$.

8. Niech $\{X_n : n \in N\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że $P(\{\omega : X_n(\omega) = \pm\frac{1}{n}\}) = \frac{1}{2}$. Wykazać, że ciąg ten jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1 i według prawdopodobieństwa.

9. Niech $\{X_n : n \in N\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że $P(\{\omega : X_n(\omega) = -n-4\}) = \frac{1}{n+4}, P(\{\omega : X_n(\omega) = n+4\} = \frac{3}{n+4}$ i $P(\{\omega : X_n(\omega) = -1\}) = 1 - \frac{4}{n+4}$. Wykazać, że
   - Wykazać, że X_n jest zbieżny według prawdopodobieństwa.
   - $E(\lim_{n\to\infty} X_n) \neq \lim_{n\to\infty} E(X_n)$.