

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 13 (prawa wielkich liczb)

1. Ciąg zmiennych losowych niezależnych X_n spełnia warunek $\frac{1}{n}D^2(X_n) \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$. Dowieść, że ciąg ten spełnia SPWL (twierdzenie Chińczyna)
2. Niech będzie dany ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $\{X_n|n \geq 1\}$ taki, że $E(X_1) = 0$ i $D^2(X_1) = 1$. Określmy ciąg
 - $Y_n = a + \alpha^n X_n$;
 - $Y_n = a + n^\alpha X_n$.

Dla jakich wartości parametru α spełnia on SPWL?

3. Niech będzie dany ciąg niezależnych zmiennych losowych
 - $\{X_n|n \geq 2\}$ i $P(X_n = \pm\sqrt{n}) = \frac{1}{n}, P(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n}$;
 - $\{X_n|n \geq 1\}$ i $P(X_n = n) = \frac{1}{1+n^2}, P(X_n = -\frac{1}{n}) = \frac{n^2}{1+n^2}$;
 - $\{X_n|n \geq 3\}$ i $P(X_n = \pm \ln n) = \frac{1}{2}$;
 - $\{X_n|n \geq 1\}$ i $P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right), P(X_n = 2^{\pm n}) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Czy ciąg ten spełnia SPWL?

4. Niech dany będzie ciąg $\{X_n|n \geq 1\}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(\{X = \pm n^\beta\}) = \frac{1}{2n^\alpha}, P(\{X = 0\}) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$, gdzie $\alpha, \beta > 0$. Przy jakiej zależności między parametrami α, β spełnia on SPWL?
5. Niech będzie dany ciąg zmiennych losowych $\{X_n|n \geq 2\}$ taki, że $X_n \in N(0, \ln n)$. Czy spełnia on SPWL?
6. Niech $\{X_n|n \geq 1\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, przy czym dla każdego $n, n = 1, 2, \dots$,

$$P(X_n = (-1)^{k-1}k) = \frac{6}{\pi^2 k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Czy ten ciąg spełnia MPWL?

7. Niech będzie dany ciąg zmiennych losowych $\{X_n|n \geq 1\}$ taki, że $P(X_n = \pm 2^n) = 2^{-(2n+1)}, P(X_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$. Niech X_n zbiega z według prawdopodobieństwa do X podać wzór na zmienną losową X i pokazać powyższą zbieżność.
8. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach równomiernych na odcinku $]1, 2[$. Wyznaczyć granicę $Y_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n X_k}$.
9. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt[n]{n}} \exp \left\{ -\frac{(x - c^n)^2}{\sqrt{n}} \right\}, \quad c \in (0, 1), n \in N.$$

Czy ciąg spełnia SPWL?

10. Zmienna losowa X_k przyjmuje wartości równe k rzutowi kostki do gry. Wyznaczyć granicę ciągu $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.
11. Niech $\{X_k|k \in N\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:

$$P(\{\omega|X_k(\omega) = i\}) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}, \quad i, k \in N.$$

Wykazać, że dla zmiennej losowej $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ zachodzi SPWL.

12. Niech $\{X_k | k \in N\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:

$$P(\{\omega | X_k(\omega) = \frac{(-1)^i}{i}\}) = \frac{1}{2^i}, i, k \in N.$$

Wykazać, że dla zmiennych losowych zachodzi SPWL.

13. Niech $\{X_k | k \in N\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona:

$$P(\{\omega | X_k(\omega) = i\}) = \frac{e^{-1}}{i!}, k \in N, i \in N \cup \{0\}.$$

Wykazać, że dla zmiennych losowych zachodzi SPWL.

14. Rozstrzygnąć, czy dla ciągu $\{X_n | n \geq 1\}$ niezależnych zmiennych losowych o niżej podanych rozkładach są spełnione warunki dostateczne stosowalności SPWL

- $P(X_n = \pm 2^n) = \frac{1}{2}$;
- $P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}}, P(X_n = 0) = 1 - n^{-\frac{1}{2}}$.