

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka finansowa, II rok
lista 1

1. Rzucamy dwiema kostkami. Niech zdarzenie A polega na tym, że suma wyników jest równa 4, a B - na tym, że przynajmniej na jednej kostce wypadła liczba parzysta. Opisać zdarzenie $A \cap B$.
2. Z talii 52 kart losujemy jedną. Z następujących zdarzeń wybrać pary zdarzeń wykluczających się:
 - A - wylosowano króla,
 - B - wylosowano pika,
 - C - wylosowano kartę czerwoną,
 - D - wylosowano kartę młodszą od 10.
3. Niech A, B, C będą zdarzeniami. Zapisać za pomocą działań na zbiorach następujące zdarzenia:
 - a) zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń A, B, C ;
 - b) zachodzą dokładnie dwa zdarzenia spośród A, B, C ;
 - c) zachodzą co najmniej dwa zdarzenia spośród A, B, C ;
 - d) zachodzą nie więcej niż dwa zdarzenia spośród A, B, C .
4. Niech A i B będą zdarzeniami. Za pomocą A, B, A', B' i odpowiednich działań na zbiorach zapisać następujące zdarzenia spośród zdarzeń A, B
 - a) zaszło co najmniej jedno,
 - b) zaszły oba,
 - c) zaszło tylko zdarzenie A ,
 - d) zaszło dokładnie jedno, ale nie wiadomo które,
 - e) nie zaszło żadne ze zdarzeń.
5. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Znaleźć najmniejsze σ -ciało \mathcal{F} zawierającą rodzinę $\mathcal{R} = \{\{1\}, \{1, 3, 5\}, \{5\}\}$.
6. Przestrzeń Ω zawiera n zdarzeń elementarnych. Jaka jest minimalna i maksymalna możliwa liczba zdarzeń losowych tej przestrzeni?
7. Czy może się zdarzyć, że liczba zdarzeń elementarnych przestrzeni Ω jest większa od liczby zdarzeń losowych tej przestrzeni?
8. Niech $\Omega = [0, 1]$ oraz niech \mathcal{F} będzie pewnym σ -ciałem podzbiorów odcinka $[0, 1]$. Udowodnić, że funkcja

$$P(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \frac{1}{2} \in A \\ 0 & \text{gdy } \frac{1}{2} \notin A \end{cases}$$

określona na zbiorach $A \in \mathcal{F}$ spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.

9. Udowodnić własności prawdopodobieństwa.
10. Pokazać, że jeśli $P(A) = 0,7$ i $P(B) = 0,8$, to $P(A \cap B) \geq 0,5$.
11. Dane są $P(A') = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ i $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Obliczyć $P(B'), P(A \cap B')$ i $P(B \setminus A)$.
12. Dane są $P(A' \cap B') = \frac{1}{2}, P(A') = \frac{2}{3}$, ponadto $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Obliczyć $P(B)$ i $P(A' \cap B)$.
13. Rzucamy niesymetryczną sześcienną kostką. Szóstka wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, a pozostałe liczby mają równe szanse wypadnięcia. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wypadnie nieparzysta liczba oczek.
14. Dwóch piłkarzy chodzi niezbyt regularnie na treningi. Jeden opuszcza 40% zajęć, a drugi chodzi na 70%. Jednocześnie są na 40% treningów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że na treningu
 - a) jest dokładnie jeden z nich,
 - b) nie ma żadnego.

zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Dwóch piłkarzy chodzi niezbyt regularnie na treningi. Jeden opuszcza 40% zajęć, a drugi chodzi na 70%. Jednocześnie są na 40% treningów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że na treningu
 - a) jest dokładnie jeden z nich,
 - b) nie ma żadnego.
2. Niech $P(A) = x, P(B) = x^2$. Wiadomo, że oba zdarzenia się wykluczają, ale jedno z nich musi zajść. Obliczyć x .
3. W wyniku doświadczenia możemy otrzymać jeden z trzech wzajemnie wykluczających się wyników: a, b, c. Niech prawdopodobieństwo otrzymania wyniku a lub b wynosi $\frac{2}{3}$, a wyniku b lub c - $\frac{3}{4}$. Obliczyć prawdopodobieństwa otrzymania każdego z wyników.
4. Wykazać, że jeśli $P(A) + P(B) > 1$, to A i B nie mogą się wykluczać.
5. Niech $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{3}$. Czy zdarzenia A i B mogą się wykluczać?
6. Rzucamy niesymetryczną kostką sześcienną. Dwójka wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, piątka - $\frac{1}{5}$, a pozostałe liczby mają równe szanse wypadnięcia. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie liczba oczek mniejsza niż 4.
7. Towarzystwo ubezpieczeniowe wypłaca z pewnej polisy 7 kategorii odszkodowań. Prawdopodobieństwo, że klient otrzyma wypłatę pierwszego typu jest równe $\frac{1}{3}$, pozostałe kategorie mają jednakowe szanse. Jakie jest prawdopodobieństwo, że klient otrzyma wypłatę typu 1 lub 3 lub 4 lub 7?