matematyka w ubezpieczeniach
III rok matematyki finansowej
lista 1

1. Czy funkcja $s(x) = e^{-\frac{x^3}{12}}$ dla $x \geq 0$ może być funkcja przeżycia?

2. Niech X bedzie zmienną losową opisującą długość życia losowo wybranego noworodka, rozważmy dwa prawdopodobieństwa

$$P(25 < X < 30) \qquad P(25 < X < 30 | X > 20)$$

   a) wyjaśnić jaka jest między nimi różnica;
   b) które z nich jest większe?
   c) wyrazić je za pomocą aktuarialnych symboli.

3. Niech $f(x)$ będzie gęstością zmiennej losowej X. Na wykresie funkcji gęstości zaznaczyć pole odpowiadające

   a) $P(X \leq x_2) = F(x_2)$;
   b) $P(X > x_1) = s(x_1)$;

   gdzie $x_1, x_2 > 0$.

4. Mając dane następujące wartości funkcji przeżycia dla pewnej populacji

Tabela 1:

x	$s(x)$
20	0.9618
21	0.9608
22	0.9598
23	0.9587

   obliczyć: ${}_2p_{21}$ oraz q_{22}.

5. Niech $s(x) = (1 - \frac{x}{100})^{\frac{1}{2}}$ dla $0 \leq x \leq 100$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że

   a) osoba w wieku 19 lat przeżyje co najmniej 17 lat;
   b) osoba w wieku 36 lat umrze w ciągu 15 lat;
   c) noworodek umrze przed osiągnięciem 55 roku życia.

6. Uzasadnić, że następujący wzór jest prawdziwy

$${}_{t_1+t_2+\ldots+t_n}p_x = {}_{t_1}p_x \cdot {}_{t_2}p_{x+t_1} \cdot {}_{t_3}p_{x+t_1+t_2} \cdot \cdots \cdot {}_{t_n}p_{x+t_1+t_2+\ldots+t_{n-1}}$$

7. Przedstawić ${}_3q_x$ za pomocą symboli aktuarialnych dotyczących rocznych okresów.

8. Pokazać, że:

$$\mathring{e}_x = E(T(x)) = \int_0^\infty {}_tp_x dt.$$

9. Wiedząc, że

$$ {}_tp_x = \frac{100-t-x}{100-x} \quad \text{dla} \;\; 0 \le x \le 100 \quad \text{oraz} \;\; 0 \le t \le 100-x $$

obliczyć prawdopodobieństwo, że

a) osoba w wieku 30 lat dożyje 60-tych urodzin;

b) osoba w wieku 30 lat umrze w ciągu 6 lat;

następnie wyznaczyć funkcję przeżycia oraz policzyć średni czas życia (x).

10. Mając dane ${}_tp_x = 1 - (\frac{t}{100})^{1{,}5}$ dla $x = 60$ oraz $0 < t < 100$ oblicz

a) $E(T(x))$

b) $P(K(x) = 20)$

11. Mając dane $G(t) = 1 - (\frac{100-t-x}{100-x})^2$ dla $0 \le t \le 100 - x$ oblicz

a) $E(T(x))$

b) $Var(T(x))$

12. Niech X będzie zmienna losową o dystrybuancie danej wzorem

$$ F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{dla} \;\; x > 0 $$

a) jaki rozkład ma zmienna losowa X?;

b) pokazać, że dystrybuanta zmiennej losowej $T(x)$ jest funkcją zależną jedynie od t (a nie od x) czyli, że posiada własność braku pamięci;

oblicz:

c) $E(T(x))$

d) $Var(T(x))$

13. Niech $X \sim U[0, \omega]$

a) pokazać, że $T(x)$ ma rozkład $U[0, \omega - x]$;

b) obliczyć $Var(T(x))$;

c) wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $K(x)$.

14. Obliczyć $e_x = E(K(x))$, gdy $T(0)$ ma rozkład wykładniczy z parametrem μ.

15. Zdefiniujmy zmienną losową

$$ K^*(x) = min(K(x), n), \quad K(x) = 0, 1, \ldots $$

a) wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $K^*(x)$

b) oznaczmy $E(K^*(x))$ przez $e_{x:\overline{n}|}$, pokazać, że

$$ e_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} k_k p_x \cdot q_{x+k} + n_n p_x = \sum_{k=1}^{n} {}_k p_x $$

c) pokazać, że

$$Var[K^*(x)] = \sum_{k=0}^{n-1} k^2_k p_x \cdot q_{x+k} + n^2_n p_x - (e_{x:\overline{n}|})^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k+1)_k p_x - (e_{x:\overline{n}|})^2$$

16. Pokazać, że $\lim\limits_{t \to 0} \frac{_tq_x}{t} = \mu(x)$.

17. Jeśli $s(x) = (1 - \frac{x}{100})^{\frac{1}{2}}$ gdzie $0 \le x \le 100$
oblicz:

   a) $\mu(36)$;
   b) $E(T(36))$.

18. Znając $_tp_x = \frac{100-x-t}{100-x}$ dla $0 \le x \le 100$ oraz $0 \le t \le 100 - x$ obliczyć μ_{45}.

19. Niech $\mu(x) = 0,001$ dla $20 \le x \le 25$ obliczyć $_{2|2}q_{20}$.

20. Wiedząc, że natężenie wymierania pewnej populacji dane jest wzorem

$$\mu_x = \frac{3}{100 - x} \quad 0 \le x \le 100$$

oblicz:

   a) $_{10}p_{50}$
   b) $_{12}q_{50}$
   c) $_{10|5}q_{50}$
   d) $s(50)$

21. Wiedząc, że natężenie wymierania pewnej populacji określone jest funkcją

$$\mu_x = \begin{cases} \frac{3}{110-x} & \text{dla } 0 \le x < 50 \\ \frac{2,5}{100-x} & \text{dla } 50 \le x < 100 \end{cases}$$

   a) wyznaczyć $_tp_x$, $\quad 0 \le t \le 100 - x, \quad 0 \le x \le 100$
   b) obliczyć $\overset{\circ}{e}_{30}$

22. Zakładając, że natężenie śmiertelności jest stałe dla $x \ge 50$ oraz $\overset{\circ}{e}_{50} = 40$, obliczyć p_{60}.

23. W danej populacji śmiertelnością rządzi prawo Weibulla z intensywnością wymierania

$$\mu_{x+t} = k \cdot (x+t), \qquad k > 0.$$

Oblicz $\frac{SD(T(0))}{E(T(0))}$ (SD oznacza odchylenie standardowe). Podaj najbliższą wartość.
$A)$ $0,47$ $\quad B)$ $0,52$ $\quad C)$ $0,57$ $\quad D)$ $0,62$ $\quad E)$ $0,67$.