Procesy stochastyczne

Matematyka finansowa, I rok, studia II stopnia

Lista nr 1

σ–ciała, funkcje mierzalne

Z.1 Niech $\mathcal{H}$ będzie σ–ciałem podzbiorów pewnego niepustego zbioru X. Udowodnij, że wtedy zachodzi:
1) $A, B \in \mathcal{H} \implies A \cap B \in \mathcal{H}$
2) $A, B \in \mathcal{H} \implies A \cup B \in \mathcal{H}$
3) $A, B \in \mathcal{H} \implies A \setminus B \in \mathcal{H}$
4) $A, B \in \mathcal{H} \implies B \setminus A \in \mathcal{H}$

Z.2 Udowodnij, że nie istnieje nieskończone, przeliczalne σ–ciało podzbiorów pewnego niepustego zbioru X.

Z.3 Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną wszystkich takich podzbiorów $A \subseteq X$, że co najmniej jeden ze zbiorów: A, A' jest przeliczalny. Udowodnij, że $\mathcal{S}$ jest σ–ciałem podzbiorów X.

Z.4 Wyznaczyć σ–ciało podzbiorów zbioru X, generowane przez rodzinę wszystkich jednoelementowych podzbiorów zbioru X.

Z.5 Zbadaj, czy następujące rodziny tworzą σ–ciało podzbiorów pewnego niepustego zbioru X:
1) $\mathcal{H} = \{\emptyset, A, A', X\}$, gdzie $\emptyset \neq A \subset X$ - ustalone
2) $\mathcal{H} = \{\emptyset, A, B, A', B', X\}$, gdzie $\emptyset \neq A, B \subset X$ - ustalone

Z.6 Wyznacz klasy funkcji $f : (X_1, \mathcal{H}_1) \to (X_2, \mathcal{H}_2)$ $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$–mierzalnych:
1) $\mathcal{H}_1 = \{\emptyset, X_1\}$, $\mathcal{H}_2 = \{\emptyset, X_2\}$
2) $\mathcal{H}_1 = \{\emptyset, A, A', X_1\}$, $\mathcal{H}_2 = \{\emptyset, X_2\}$
3) $\mathcal{H}_1 = \{\emptyset, X_1\}$, $\mathcal{H}_2 = \{\emptyset, B, B', X_2\}$
4) $\mathcal{H}_1 = \{\emptyset, A, A', X_1\}$, $\mathcal{H}_2 = \{\emptyset, B, B', X_2\}$
5) przyjąć w punktach 2),3),4), że $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, $A = (0; +\infty)$, $B = \{1\}$

Z.7 Zbadaj, czy rodzina $\mathcal{H} = \{A \subseteq \mathbb{R} : x \in A \iff x \pm 1 \in A\}$ jest σ–ciałem podzbiorów $\mathbb{R}$.
Jeżeli tak, opisz klasę funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{H}$–mierzalnych.

Z.8 Zbadaj, czy rodzina $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 : (x, y) \in A \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1\}$ jest σ–ciałem podzbiorów $\mathbb{R}^2$.
Jeżeli tak, opisz klasę funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$–mierzalnych.

Z.9 Zbadaj, czy rodzina $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R}^2 : (x, y) \in A \Leftrightarrow |x| \geqslant |y|\}$ jest σ–ciałem podzbiorów $\mathbb{R}^2$.

Z.10 Definiujemy σ–ciało zbiorów borelowskich $\mathbb{R}$ jako najmniejsze σ–ciało zawierające wszystkie zbiory otwarte $\mathbb{R}$ lub równoważnie: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\Big(\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}\Big)$.
Pokaż, że następujące zbiory są borelowskie:
1) $[a, b]$ 2) $[a, b)$ 3) $(a, b]$ 4) $\{5\}$

Z.11 Udowodnij, że jeżeli funkcja f jest $\mathcal{H}$–mierzalna, to $\mathcal{H}$–mierzalne są także funkcje:
$f + c,\ f^2,\ |f|,\ \sqrt{|f|},\ \dfrac{1}{f}$.