procesy stochastyczne
I rok matematyki II-go stopnia
lista 1

1. Rozważmy rzut dwiema kostkami do gry. Niech X przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek. Rozważmy następujące zdarzenia

   a) A - na pierwszej kostce wypadły 3 oczka;

   b) B- na pierwszej kostce wypadły co najmniej 3 oczka.

   c) C - suma wyrzuconych oczek wynosi 7;

   d) D - suma wyrzuconych oczek wynosi co najmniej 7.

   Oblicz $E(X|A), E(X|B), E(X|C)$ oraz $E(X|D)$.

2. Pokazać, że $E(X|\Omega) = E(X)$.

3. Niech
$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A, \end{cases}$$
   pokazać, że $E(1_A|B) = P(A|B)$.

4. Niech $X \sim Exp(2)$. Wyznaczyć $E(X|X > 2)$.

5. Niech $X \sim U[0, 3]$. Wyznaczyć $E(X|X > 2)$.

6. Rozważmy schemat Bernoullie'go z prawdopodobieństwem sukcesu równym p. Jaka jest oczekiwana liczba sukcesów w pierwszym doświadczeniu, jeśli wiadomo, że w serii n doświadczeń zaszło k sukcesów?

7. Niech X będzie ilością wyrzuconych orłów w dwóch rzutach monetą. Oblicz warunkową wartość oczekiwaną zmiennej losowej X pod warunkiem $\sigma-$ciała $\mathcal{H} = \sigma(\{(R, R)\})$.

8. Niech η będzie dyskretną zmienną losową. Pokazać, że
$$E(E(\xi|\eta)) = E(\xi).$$

9. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0; 1], \mathcal{B}([0; 1]), m_L)$, ξ i η zmienne losowe zadane następująco
$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right[\\ 2 & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\\ 3 & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$
$$\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 2 & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$
   Opisz $\sigma(\xi)$. Wyznacz $E(\eta|\xi = x)$ i $E(\eta|\xi)$.

10. Pokazać, że
$$E(1_A|1_B)(\omega) = \begin{cases} P(A|B) & \omega \in B \\ P(A|(\Omega \setminus B) & \omega \notin B \end{cases}$$

11. Niech $\Omega = [\,0, 1]$ i prawdopodobieństwo na Ω zadaje miara Lebesgue'a. Znajdź warunkową wartość oczekiwaną $E(f|\mathcal{F})$, gdzie $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ oraz

- $\mathcal{F} = \sigma\left(\left[\,0, \frac{1}{2}\right], \mathbb{Q} \cap [\,0, 1]\right)$ i
$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \in \mathbb{Q} \cap [\,0, 1] \\ \sqrt{x} & x \notin \mathbb{Q} \cap [\,0, 1] \end{cases}$$
- $\mathcal{F} = \sigma\left(\left[\,0, \frac{1}{4}\right[, \left[\frac{1}{4}, 1\right]\right)$ i $f(x) = \sqrt{x}$,
- $\mathcal{F} = \sigma\left(\left[\,0, \frac{1}{2}\right[, \left[\frac{1}{3}, 1\right]\right)$ i $f(x) = x$

12. Niech $\Omega = [\,0, 1]$ i prawdopodobieństwo na Ω zadaje miara Lebesgue'a. Wyznacz $E(\xi|\eta)$, jeśli
$$\xi(x) = 2x^2, \qquad \eta(x) = 1 - |2x - 1|.$$

13. Niech wektor (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Wyznacz gęstość warunkową $f_{X|Y}(x|y)$ a następnie wyznacz $E(X|Y)$.

14. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = \frac{x^3}{2} \exp\left(-x(y + 1)\right) \mathbb{I}_{\{x>0, y>0\}}$. Wyznaczyć $E(Y|X)$ oraz $E(Y^2|X)$.

15. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0; 1], \mathcal{B}([0; 1]), m_L)$, ξ i η zmienne losowe zadane następująco
$$\xi(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 1 & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$
$$\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right[\\ 1 & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\\ x^2 & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$
Opisz $\sigma(\xi)$. Wyznacz $E(\eta|\xi = x)$ i $E(\eta|\xi)$.

16. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Pokaż, że $E(X|X + Y) = \frac{X+Y}{2}$.

17. Uogólnić wynik poprzedniego zadania na przypadek n-zmiennych losowych.

18. Rozpatrzmy $\Omega = [0, 1]$, σ-ciało zbiorów borelowskich i P miarę Lebesgue'a na $[0, 1]$. Opisz $\sigma(Y)$ i znajdź $E[X|Y]$, jeśli
    (a) $X(x) = \cos\frac{\pi}{2}x$, $Y(x) = \sin \pi x$,
    (b) $X(x) = e^x$, $Y(x) = \cos^2 \pi x$,
    (c) $X(x) = e^{2x}$, $Y(x) = \begin{cases} 2 & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 3 & x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[\\ x & x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$

19. Niech $\Omega = [0, 1]$, Σ będzie σ-ciałem zbiorów mierzalnych Ω, zaś P będzie miarą Lebesgue'a na $[0, 1]$. Wyznaczyć $E(f|\mathcal{H})$, gdzie $f(x) = x$ i $\mathcal{H}$ jest σ-ciałem generowanym przez
    (a) $\{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{4}, 1]\}$;
    (b) $\{[0, a], [b, 1]\}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$;

    Rozważyć w punkcie (19b) różne warianty odpowiedzi.