

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa  
matematyka, III rok  
lista 1 (powtórzenie z kombinatoryki)

Liczba permutacji  $n$ -elementowego zbioru  $A$  (czyli liczba wszystkich  $n$ -wyrazowych ciągów o różnych wyrazach należących do zbioru  $A$ ) wynosi ..... (ozn.  $P_n$ ).

Liczba  $n$ -elementowych permutacji  $k$ -elementowego zbioru  $A$ , w których ustalone elementy powtarzają się odpowiednio  $n_1, n_2, \dots, n_k$  razy, gdzie  $\sum_{j=1}^k n_j = n$ , wynosi .....

Liczba  $k$ -wyrazowych wariacji z powtórzeniami  $n$ -elementowego zbioru  $A$  (czyli liczba  $k$ -wyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru  $A$ ) jest równa ..... (ozn.  $\bar{V}_n^k$ ).

Liczba  $k$ -wyrazowych wariacji bez powtórzeń  $n$ -elementowego zbioru  $A$  (czyli liczba  $k$ -wyrazowych ciągów o różnych wyrazach należących do zbioru  $A$ ) jest równa ..... (ozn.  $V_n^k$ ).

Liczba  $k$ -wyrazowych kombinacji  $n$ -elementowego zbioru  $A$  (czyli liczba wszystkich  $k$ -elementowych podzbiorów zbioru  $A$ ) wynosi ..... (ozn.  $C_n^k$ ).

Liczba  $k$ -wyrazowych kombinacji z powtórzeniami  $n$ -elementowego zbioru  $A$  (czyli liczba wszystkich  $k$ -elementowych multipodzbiorów zbioru  $A$ ) wynosi ..... (ozn.  $\bar{C}_n^k$ ).

### Zadania

- Udowodnić, że dla dowolnych  $n, k \in \mathbb{N}$  takich, że  $n \geq k$  zachodzą następujące wzory
  - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ;
  - $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ , o ile tylko  $k \geq 1$ ;
  - $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ;
  - $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ .
- Do windy w 8 piętrowym wieżowcu wsiadły 4 osoby. Na ile różnych sposobów mogły one wysiąść, jeśli każda z nich wysiada na
  - dowolnym piętrze;
  - innym piętrze;
  - wszyscy wysiadają na tym samym piętrze.
- Dany jest sześcian. Ze wszystkich wierzchołków sześcianu losujemy 3 tworząc trójkąt. Ile jest możliwości takich losowań?
- W turnieju, w którym uczestniczy 20 graczy, każdy z nich gra po jednej partii z innym. Ile partii rozegrano?
- Na turnieju rozegrano 105 meczy każdy z każdym. Ilu zawodników uczestniczyło w turnieju?
- Ile można wykonać chorągwi mającej 3 pasy kolorów z 4 barw?
- Dane jest 7 gatunków cukierków czekoladowych, z których wybieramy 4 rodzaje. Ile różnych paczek można w ten sposób otrzymać?
- Rok liczy 365 dni. Ile jest możliwych wszystkich wyników, tak aby 5 osób urodziło się każda innego dnia?
- W urnie jest 7 ponumerowanych kul. Losujemy 7 kul po jednej bez zwracania. Ile można otrzymać różnych wyników?

10. Grupę składającą się z 25 osób dzielimy na dwie podgrupy po 13 i 12 osób. Ile jest możliwych podziałów?
11. Grupę 24 osób dzielimy na dwie równoliczne podgrupy. Ile jest możliwych podziałów?
12. Na ile sposobów możemy wybrać 6 liczb z 49?
13. Danych jest  $n$  kul i  $N$  komórek. Kule umieszczamy losowo w komórkach. Ile jest takich rozmieszczeń, jeśli
  - a) kule i komórki są rozróżnialne;
  - b) kule się nierozróżnialne, a komórki są;
  - c) kule są nierozróżnialne i ponadto w każdej komórce może się znajdować co najwyżej jedna kula.
14. Dane są 3 szuflady i 5 koszul. Ile jest możliwości rozmieszczenia tych koszul w szufladach?
15. Iloma sposobami można posadzić w rzędzie  $m$  drzew liściastych i  $n$  iglastych ( $m > n$ ) tak, aby żadne dwa drzewa iglaste nie sąsiadowały ze sobą?
16. Ile można skonstruować trójkątów z odcinków o długościach równych: 5, 7, 9, 11, 13?
17. Jak długie powinny być znaki w alfabecie Morse'a, aby zapisać 24 literowy alfabet?
18. Oblicz liczbę tych permutacji zbioru  $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ , w których
  - a) liczby 1, 2 nie sąsiadują ze sobą;
  - b) liczby 1, 2, 3 występują w porządku rosnącym.
19. Ile słów z sensem lub bez można utworzyć z liter tworzących słowo
  - a) abrakadabra;
  - b) probabilistyka.
20. Ile różnych liczb dwucyfrowych można utworzyć z pięcioelementowego zbioru cyfr?
21. Ile jest różnych liczb naturalnych, które są dzielnikami liczby  $2^5 \cdot 5^3 \cdot 11^2$ ?
22. Ile jest stycyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 4?
23. Ile jest wszystkich liczb siedmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i na dokładnie dwóch miejscach stoją cyfry parzyste?

### **Zadania do samodzielnego rozwiązania**

1. Na okręgu zaznaczono 6 różnych punktów.
  - a) Ile trójkątów o wierzchołkach w tych punktach możemy narysować?
  - b) Ile wielokątów o wierzchołkach w tych punktach możemy narysować?
2. Dzieci łączą się w pary. Ile dzieci wzięło udział w zabawie, jeżeli wiadomo, że mogły się one połączyć na 210 sposobów?
3. Na płaszczyźnie danych jest 12 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Ile jest różnych prostych przechodzących przez dokładnie 2 punkty.
4. Ile jest różnych tablic rejestracyjnych samochodów składających się z 3 liter i 4 cyfr (24 litery), jeśli
  - a) ustawienie tablic jest takie jak w Polsce;
  - b) możemy mieszać kolejność liter i cyfr.

5. W szafie znajduje się 10 różnych par butów. Wyjmujemy 4 buty. Ile jest możliwości, że nie wyjmujemy żadnej pary?
6. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych nieparzystych, jeśli cyfry
- nie mogą się powtarzać;
  - mogą się powtarzać.
7. Na każdej z ośmiu kartek zapisano jedną z liczb  $1, 2, \dots, 8$ , na każdej kartce inną liczbę. Następnie każdą kartkę wkładamy do jednej z 3 szuflad biurka.
- Na ile sposobów można rozmieścić kartki w szufladach?
  - Na ile sposobów można rozmieścić kartki w szufladach tak, aby w pierwszej szufladzie nie było kartek z parzystą liczbą?
  - Na ile sposobów można rozmieścić kartki w taki sposób, aby sumy liczb zapisanych na kartkach znajdujących się w poszczególnych szufladach były równe?
8. Dane są zbiory  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .
- Ile jest wszystkich funkcji ze zbioru  $A$  w zbiór  $B$ ?
  - Ile jest wszystkich funkcji różnowartościowych ze zbioru  $A$  w zbiór  $B$ ?
  - Ile jest wszystkich funkcji rosnących ze zbioru  $A$  w zbiór  $B$ ?
9. Ile jest stycyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5?
10. Ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 12?