ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 1

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład prawdopodobieństwa określony następująco: $P(X = 1, Y = 1) = a, P(X = 1, Y = 2) = 0,3, P(X = 3, Y = 1) = 0,4, P(X = 3, Y = 2) = 0,1$. Wyznaczyć stałą a. Zapisać ten rozkład w tabeli. Obliczyć wartość dystrybuanty w punktach: $(0, 0), (1, 1), (2, 2)$.

2. Funkcja $F(x, y)$ jest określona następująco:

   a) $F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \;\; i \;\; y < 0 \\ 1 & \text{w.p.p} \end{cases}$

   b) $F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \;\; lub \;\; y < 0 \\ 1 & \text{w.p.p} \end{cases}$

   c) $F(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x + y \geq 0 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$

   Zbadać czy tak określona funkcja może być traktowana jako dystrybuanta pewnej zmiennej losowej (X, Y).

3. Dystrybuanta dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) dana jest wzorem

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 2 \;\; \text{lub} \;\; y < 2 \\ (1 - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{y}) & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

   Wyznaczyć dystrybuanty brzegowe i oblicz prawdopodobieństwa $P(X > 2)$, $P(1 < X \leq 3, 1 < Y \leq 3)$.

4. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$, gdzie $\Omega = \{0, 1, \dots, 9\}$, $P(\{\omega\}) = 0,1 \forall \omega \in \Omega$, określone są zmienne losowe $X(\omega)$ - reszta z dzielenia ω przez 2, $Y(\omega)$ - reszta z dzielenia ω przez 3. Znaleźć rozkład wektora losowego (X, Y). Ile wynosi $P(X = Y)$?

5. Rzucamy trzy razy monetą. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów, natomiast zmienna losowa Y przyjmuje wartość 0, jeśli w pierwszym rzucie wypadł orzeł lub wartość 1, jeśli w pierwszym rzucie wypadła reszka. Wyznaczyć rozkład zmienne losowej (X, Y).

6. Zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) ma rozkład jednostajny wewnątrz prostokąta ograniczonego odciętymi $x = a, x = b$ i rzędnymi $y = c, \;\; y = d \;\; (b > a, \;\; d > c)$. Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa i dystrybuantę tej zmiennej losowej.

7. Funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{dla} \quad 0 \leq x < \infty, x \leq y < \infty \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

   określa gęstość zmiennej losowej (X, Y). Obliczyć dystrybuantę tej zmiennej.

8. Wyznaczyć dystrybuantę $F(x, y)$ dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y), jeśli dana jest jej gęstość

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 0 \leq x < 1, \; x \leq y \leq 2 - x \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

9. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f(x,y) = \begin{cases} cx(x - y) & \text{dla} \quad 0 < x < 2, -x < y < x \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

   a) obliczyć stałą c;
   b) obliczyć $P((X, Y) \in A)$, gdzie $A = \{(x, y) : 0 < x < 2, 0 < y < x\}$;
   c) znaleźć rozkłady brzegowe.

10. Dana jest funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x^2 - y^2)e^{-x} & \text{dla} \quad |y| \leq x \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

   Zbadać czy tak określona funkcja jest gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y).

11. Niech
$$f(x,y) = \begin{cases} c(x^2+y^2) & \text{dla} \quad (x,y) \in K \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$
gdzie $K = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq 1-x\}$

a) wyznaczyć stałą c tak, aby funkcja $f(x,y)$ była gęstością pewnej zmiennej losowej (X,Y);

b) obliczyć $P(X^2+Y^2 \leq 0,5)$.

12. Niech (X,Y,Z) będzie trzywymiarową zmienną losową o gęstości $f(x,y,z) = cg(x,y,z)$. Wyznaczyć stałą c, jeżeli:

a) $g(x,y,z) = 1$ dla $0 \leq x \leq 1,\ -2 \leq y \leq\ 3,\ 4 \leq z \leq\ 5$ i $g(x,y,z) = 0$ w pozostałej części R^3;

b) $g(x,y,z) = 1$ dla $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ i $g(x,y,z) = 0$ w pozostałej części R^3;

c) $g(x,y,z) = x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}$ dla $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ i $g(x,y,z) = 0$ w pozostałej części R^3 gdzie $l \geq 1, m \geq 1, n \geq 1$.

13. Zmienna losowa (X,Y) ma gęstość
$$f(x,y) = \frac{a}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)},$$

a) wyznaczyć parametr a;

b) znaleźć dystrybuantę $F(x,y)$;

c) znaleźć rozkłady brzegowe.

14. Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa trzywymiarowej zmiennej losowej (X,Y,Z) mając daną dystrybbuantę
$$F(x,y,z) = (1-e^{-ax})(1-e^{-by})(1-e^{-cz})$$
dla $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

15. Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia punktu o współrzędnych (X,Y) w obszar określony nierównościami $1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2$, jeżeli współrzędne punktu (X,Y) mają następującą dystrybuantę
$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-y^2} + a^{-x^2-2y^2} & \text{dla} \quad x \geq 0\ y \geq 0, \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

16. Współrzędne punktu losowego (X,Y) mają rozkład jednostajny wewnątrz prostokąta ograniczonego odciętymi 0 i a oraz rzędnymi 0 i b. Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia punktu losowego w koło o promieniu R, jeżeli $a > b$, a środek koła pokrywa się z początkiem układu współrzędnych.

17. Gęstość prawdopodobieństwa układu zmiennych losowych (X,Y) dana jest wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} c(R - \sqrt{x^2+y^2}) & \text{dla} \quad x^2+y^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$
Wyznaczyć stałą c oraz prawdopodobieństwo trafienia w koło o promieniu $a < R$ ze środkiem w początku układu współrzędnych.

18. Zmienna losowa dwuwymiarowa (X,Y) ma rozkład dany gęstością
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{3x^2y^2} & \text{dla} \quad x \geq 1,\ \frac{1}{x} \leq y \leq x^2 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$
Znaleźć dystrybuantę tej zmiennej losowej.

19. Niech $\lambda > 0$ oraz niech
$$f(x,y,z) = \begin{cases} \alpha e^{-\lambda(x+y+z)} & \text{dla} \quad x \geq 0,\ y \geq,\ z \geq 0 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$
Dla jakiej wartości parametru α funkcja $f(x,y,z)$ jest gęstością wektora losowego? Wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej losowej.