matematyka w ubezpieczeniach
III rok matematyki finansowej
lista 2

1. Wiedząc, że dystrybuanta przyszłego czasu życia noworodka w pewnej populacji dana jest wzorem
$$F(x) = 1 - \frac{1}{1+x}, \quad x \geq 0,$$
wyznacz
   a) funkcję przeżycia,
   b) gęstość rozkładu przyszłego czasu życia noworodka,
   c) rozkład przyszłego czasu życia (x),
   d) prawdopodobieństwo tego, że (20) przeżyje rok,
   e) prawdopodobieństwo tego, że (30) umrze pomiędzy wiekiem 40 a 45 lat.

2. Wiedząc, że w pewnej populacji dystrybuanta przyszłego czasu życia noworodka dana jest wzorem
$$F(x) = 1 - \sqrt[6]{1 - \frac{x}{120}}, \quad \text{gdzie } x \in [0, 120],$$
wyznacz prawdopodobieństwo tego, że
   a) noworodek dożyje 30-tego roku życia,
   b) (30) umrze przed osiągnięciem 50-tego roku życia,
   c) (40) dożyje 65-tego roku życia.

3. Niech $s(x) = (1 - \frac{x}{100})^{\frac{1}{2}}$ dla $0 \leq x \leq 100$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
   a) osoba w wieku 19 lat przeżyje co najmniej 17 lat;
   b) osoba w wieku 36 lat umrze w ciągu 15 lat;
   c) noworodek umrze przed osiągnięciem 55 roku życia.

4. Przedstawić ${}_3q_x$ za pomocą symboli aktuarialnych dotyczących rocznych okresów.

5. Uzasadnić, że następujący wzór jest prawdziwy
$${}_{t_1+t_2+\ldots+t_n}p_x = {}_{t_1}p_x \cdot {}_{t_2}p_{x+t_1} \cdot {}_{t_3}p_{x+t_1+t_2} \cdot \cdots \cdot {}_{t_n}p_{x+t_1+t_2+\ldots+t_{n-1}}$$

6. Mając dane $p_x = 0,99$, $p_{x+1} = 0,985$, ${}_3p_{x+1} = 0,95$ oraz $q_{x+3} = 0,02$, oblicz
   a) p_{x+3},
   b) ${}_2p_x$,
   c) ${}_2p_{x+1}$,
   d) ${}_3p_x$,
   e) ${}_{1|2}q_x$.

7. Pokazać, że:
$$\overset{\circ}{e}_x = E(T(x)) = \int_0^\infty {}_tp_x dt.$$

8. Wiedząc, że

$$ {}_tp_x = \frac{100-t-x}{100-x} \quad \text{dla} \;\; 0 \le x < 100 \quad \text{oraz} \;\; 0 \le t \le 100-x $$

obliczyć prawdopodobieństwo, że

a) osoba w wieku 30 lat dożyje 60-tych urodzin;

b) osoba w wieku 30 lat umrze w ciągu 6 lat;

następnie wyznaczyć funkcję przeżycia oraz policzyć przyszły oczekiwany czas życia (x).

9. Mając dane ${}_tp_x = 1 - (\frac{t}{100})^{1,5}$ dla $x = 60$ oraz $0 < t < 100$ oblicz

a) $E(T(x))$

b) $P(K(x) = 20)$

10. Mając dane $G(t) = 1 - (\frac{100-t-x}{100-x})^2$ dla $0 \le t \le 100-x$ oblicz

a) $E(T(x))$

b) $Var(T(x))$

11. Niech $X \sim U[0, \omega]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $K(x)$ a następnie policzyć $E(K(x))$.

12. Obliczyć $e_x = E(K(x))$, gdy $T(0)$ ma rozkład wykładniczy z parametrem μ.