

procesy stochastyczne
I rok matematyki II-go stopnia
lista 2

1. Niech τ będzie momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$. Które z następujących zmiennych losowych $2\tau^2$, $\tau \vee n$, τ^3 , $\tau(\frac{\tau}{2} + 1)$, 2τ , $\tau - 1$, $\tau + 1$

- (a) $2\tau^2$,
- (b) $\tau \vee n$,
- (c) τ^3 ,
- (d) $\tau(\frac{\tau}{2} + 1)$

są momentami stopu względem tej filtracji?

2. Niech τ i σ będą momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$. Udowodnić, że zdarzenie $\{\tau \leq \sigma\}$ należy jednocześnie do \mathcal{F}_τ i do \mathcal{F}_σ .

3. Pokazać, że jeżeli mamy $(\tau_n)_{n \geq 1}$ ciąg momentów stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$, to

- (a) $\sup_n \tau_n$,
- (b) $\inf_n \tau_n$,
- (c) $\limsup_n \tau_n$,
- (d) $\liminf_n \tau_n$

są momentami stopu.

4. Niech τ_1 i τ_2 będą momenty stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$. Pokazać, że wtedy mamy $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$.

W KOLEJNYCH ZADANIACH USTALONA JEST PRZESTRZEŃ PROBABILISTYCZNA (Ω, Σ, P) , DANA JEST FILTRACJA $(\mathcal{F}_n)_{n \in T}$. PONADTO T JEST PODZBIOREM ZBIORU LICZB CAŁKOWITYCH, O ILE NIE JEST POWIEDZIANE INACZEJ.

5. Niech ciąg $(X_n)_{n \in T}$ będzie (\mathcal{F}_n) -martyngałem. Zbadaj, czy ciąg zmiennych losowych $(Y_n)_{n \in T}$, gdzie $Y_n = \cos(\pi X_n)$, też jest (\mathcal{F}_n) -martyngałem.

6. Niech ciąg $(X_n)_{n \in T}$ będzie (\mathcal{F}_n) -martyngałem oraz $E(X_n^2) < +\infty$ dla dowolnego n . Udowodnij, że ciąg $(X_n^2)_{n \in T}$ jest (\mathcal{F}_n) -podmartyngałem.

7. Niech $T = N$. Udowodnij, że $(X_n)_{n \in T}$ jest (\mathcal{F}_n) -martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jedno z warunków

$$\begin{aligned} \forall_{n \in N} E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= X_n \quad P\text{-p.n.}, \\ \forall_{n \in N} E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) &= 0 \quad P\text{-p.n.}. \end{aligned}$$

8. Przy założeniach z zadania 7 udowodnij analogiczne warunki dla półmartyngałów.

9. Niech $(X_n)_{n \in N}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych posiadających skończoną wartość oczekiwaną takich, że $E(X_n) = 0$ dla dowolnej liczby naturalnej n . Definiujemy $M_n X_1 + \dots + X_n$ dla dowolnej liczby naturalnej n . Udowodnij, że $(M_n)_{n \in N}$ jest (\mathcal{F}_n^X) -martyngałem.

10. Niech $(X_n)_{n \in N}$ będzie ciągiem niezależnych, ograniczonych zmiennych losowych takich, że $E(X_n) = 1$ dla $n \in N$. Definiujemy $M_n X_1 \cdot \dots \cdot X_n$. Udowodnij, że $(M_n)_{n \in N}$ jest (\mathcal{F}_n^X) -martyngałem.
11. Niech $(X_n)_{n \in T}$ będzie (\mathcal{F}_n) -martyngałem, zaś $\varphi: R \rightarrow R$ funkcją wypukłą. Udowodnij, że jeśli ciąg $(\varphi(X_n))_{n \in T}$ jest całkowny, to jest (\mathcal{F}_n) -podmartyngałem.
12. Niech $(X_n)_{n \in T}$ będzie (\mathcal{F}_n) -podmartyngałem, zaś $\varphi: R \rightarrow R$ niemalejącą funkcją wypukłą. Jeżeli ciąg $(\varphi(X_n))_{n \in T}$ jest całkowny, to jest on (\mathcal{F}_n) -podmartyngałem.
13. Udowodnij, że $(X_n)_{n \in T}$ jest (\mathcal{F}_n) -podmartyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy $(-X_n)_{n \in T}$ jest (\mathcal{F}_n) -nadmartyngałem.
14. Udowodnij, że jeśli $(X_t)_{t \in T}$ i $(Y_n)_{n \in T}$ są dwoma (\mathcal{F}_n) -martyngałami (odpowiednio (\mathcal{F}_n) -nadmartyngałami, (\mathcal{F}_n) -podmartyngałami), zaś a i b dowolnymi liczbami rzeczywistymi (odpowiednio dodatnimi liczbami rzeczywistymi), to $(aX_n + bY_n)_{n \in T}$ też jest (\mathcal{F}_n) -martyngałem (odpowiednio (\mathcal{F}_n) -nadmartyngałem, (\mathcal{F}_n) -podmartyngałem).
15. Udowodnij, że jeśli $(X_n)_{n \in T}$ jest (\mathcal{F}_n) -podmartyngałem, to dla dowolnej liczby rzeczywistej a ciąg $(\max\{X_n, a\})_{n \in T}$ jest (\mathcal{F}_n) -podmartyngałem. W szczególności uzasadnij, że $(X_n^+)_{n \in T}$ jest (\mathcal{F}_n) -podmartyngałem.
16. Udowodnij, że jeśli $(X_n)_{n \in T}$ jest (\mathcal{F}_n) -nadmartyngałem, to dla dowolnej liczby rzeczywistej a ciąg $(\min\{X_n, a\})_{n \in T}$ jest (\mathcal{F}_n) -nadmartyngałem. W szczególności uzasadnij, że $(-X_n^-)_{n \in T}$ jest (\mathcal{F}_n) -nadmartyngałem.
17. Udowodnij, że jeżeli $(M_n)_{1 \leq n \leq m}$ jest (\mathcal{F}_n) -nadmartyngałem, a τ i σ są momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{1 \leq n \leq m}$ takimi, że $P(\{\tau \leq m\}) = P(\{\sigma \leq m\}) = 1$ oraz $P(\{\sigma \leq \tau\}) = 1$, to
- $$E(M_1) \geq E(M_\sigma) \geq E(M_\tau) \geq E(M_m).$$
18. Udowodnij, że jeżeli $(M_n)_{1 \leq n \leq m}$ jest (\mathcal{F}_n) -podmartyngałem, a τ i σ są momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{1 \leq n \leq m}$ takimi, że $P(\{\tau \leq m\}) = P(\{\sigma \leq m\}) = 1$ oraz $P(\{\sigma \leq \tau\}) = 1$, to
- $$E(M_1) \leq E(M_\sigma) \leq E(M_\tau) \leq E(M_m).$$
19. Niech będą spełnione założenia definicji transformaty martyngałowej. Udowodnij, że wówczas transformata martyngałowa jest (\mathcal{F}_n) -martyngałem.
20. Niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $P(\{X_n = \pm 1\}) = P(\{X_n = 0\}) = \frac{1}{3}$. Dla jakich wartości c ciąg $(Y_n)_{n \geq 1}$, gdzie $Y_n = \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 - nc$, jest (\mathcal{F}_n^X) -podmartyngałem, (\mathcal{F}_n^X) -martyngałem, (\mathcal{F}_n^X) -nadmartyngałem?
21. Niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wartościach oczekiwanych $E(X_n) = m_n \neq 0$. Niech $Y_n = \prod_{i=1}^n \frac{X_i}{m_i}$. Udowodnij, że ciąg $(Y_n)_{n \geq 1}$ jest (\mathcal{F}_n^X) -martyngałem.
22. Niech X będzie całkowną zmienną losową, a $(\mathcal{F}_n)_{n \in T}$ dowolną filtracją. Określamy $X_n E(X|\mathcal{F}_n)$. Udowodnić, że $(X_n)_{n \in T}$ jest (\mathcal{F}_n) -martyngałem.
23. Załóżmy, że $(X_n)_{n \geq 1}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie o średniej 0. Niech $Z_0 = 0$, $Z_n = X_0 X_1 + X_1 X_2 + \dots + X_{n-1} X_n$ dla $n \geq 1$. Udowodnić, że ciąg (Z_n) jest (\mathcal{F}_n) -martyngałem.

24. Dany jest ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $P(\{\xi_n = \pm 1\}) = \frac{1}{2}$. Niech $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ dla $n \geq 1$.
- (a) Udowodnić, że $(X_n)_n$ oraz $(X_n^2 - n)_{n \geq 1}$ są (\mathcal{F}_n^ξ) -martyngalami.
 - (b) Wyznaczyć taką wartość parametru a , by ciąg $(a^n \cos X_n)_{n \geq 1}$ był (\mathcal{F}_n^ξ) -martyngalem.
 - (c) Udowodnić, że dla $\lambda > 0$, ciąg $(\exp(\lambda X_n - \frac{\lambda^2 n}{2}))_{n \geq 1}$ jest (\mathcal{F}_n^ξ) -nadmartyngalem.
25. Niech $q, p \in]0, 1[$, $q + p = 1$. Niech X_n oznacza pozycję w chwili n punktu startującego w chwili 0 z punktu 0 na prostej R i $\forall n \in N$ poruszającego się w chwili n z prawdopodobieństwem p w kierunku dodatnim, a z prawdopodobieństwem q w kierunku ujemnym. Udowodnij, że $(\frac{q}{p})^{X_n}$ jest (\mathcal{F}_n) -martyngalem.